Newton et les origines de l'*analyse* : 1664-1666

Marco Panza

14 janvier 2002

Table des matières

Première partie

Introduction

Les pages qui suivent s'attachent à la question de l'origine d'une théorie mathématique.

Je considère les mathématiques comme une activité humaine, portant sur des objets que cette activité crée et étudie en vue de certains buts. Je conçois par conséquent une théorie mathématique comme une structure formée par un ensemble d'objets (le domaine de la théorie) et une famille de procédures d'inférence, définies sur ces objets et aptes à conduire de la donation de ces objets à la détermination de leurs propriétés et relations[1]. Si on s'occupe du processus qui conduit à l'établissement d'une théorie mathématique, il faut donc, à mon sentiment, chercher à comprendre d'abord comment une certaine succession d'actes a pu conduire à la constitution d'un certain domaine d'objets, en fixant, entre autres choses, les procédures portant sur ces objets, aptes à en déterminer les propriétés et les relations.

L'effort de caractérisation de l'activité mathématique (ou, pour être plus précis, de l'activité humaine que l'on qualifie de "mathématiques") peut et doit, je crois, conduire à des distinctions et des définitions plus fines, qui peuvent servir ensuite d'outils pour d'autres recherches. J'ai poursuivi cet effort en d'autres occasions[2]. Les pages qui suivent ne portent sur l'origine d'une théorie mathématique que dans un sens limité et, pour ainsi dire, encore préliminaire : il ne s'agit que de comprendre comment une certaine succession d'actes a conduit à la constitution d'un certain ensemble d'objets mathématiques. Pour l'objectif de cette recherche, il suffira donc de penser une théorie mathématique comme n'étant caractérisée que par l'ensemble des objets sur lesquels elle porte. Étudier son origine, c'est donc chercher à comprendre comment ces objets furent constitués.

* * *

[1]Selon le sens avec lequel j'utilise cette expression, une théorie mathématique ne doit donc pas être conçue ni comme une région ou une portion du savoir mathématique, ni comme un système d'énoncés, liés entre eux par une chaîne déductive. Je dis qu'un objet mathématique est donné lorsqu'il est défini (explicitement ou implicitement) et qu'il est caractérisé de telle sorte qu'on sache le reconnaître comme tel et qu'on possède les moyens pour en déterminer les propriétés et relations. Il n'est donc pas possible de donner un objet mathématique, sans se réclamer de la fixation de ces procédures d'inférence. Il s'ensuit que les deux composants d'une théorie mathématique ne doivent pas être pensés comme étant séparables l'un de l'autre. Tel est aussi le cas d'autres structures. Qu'on pense par exemple à la définition de $\mathbb{N}$: les nombres naturels sont donnés, comme tels, en tant qu'arguments d'une application qui associe à chacun d'eux son successeur ; néanmoins on dit de $\mathbb{N}$ qu'il est une structure formée par un ensemble et une application définie sur cet ensemble.

[2]Cf. par exemple Panza (1995*b*), (1997*a*), (1998) et (2000*b*).

On distingue souvent entre histoire — mais, pour être plus précis, on devrait dire "historiographie" — et philosophie des mathématiques pour démarquer les frontières entre deux disciplines séparées. Je ne partage pas cette conception. On ne dispose que des théories mathématiques que les actes des hommes qui nous ont précédés ont su constituer. Il ne devrait pas être nécessaire de le souligner, mais il vaut mieux le faire, compte tenu des dégénérescences métaphysiques qui, au cours des siècles, ont accompagné le débat, dit "philosophique", à propos des mathématiques : ces actes et ces hommes furent des actes et des hommes particuliers ; ces hommes furent des êtres finis, ne possédant que les facultés que nous possédons, vivant et agissant dans des conditions déterminées. Leurs actes sont donc une histoire et l'étude de ces actes constitue une historiographie[3]. S'il reste un espace pour quelque chose d'autre dans notre effort de compréhension des mathématiques qu'on aurait quelques raisons de qualifier de "philosophie", il ne s'agit que de l'espace de l'élaboration des catégories interprétatives que nous employons au cours de cette étude. Et cet espace n'est certainement pas celui d'une discipline séparée.

Je ne crois pas en effet que la philosophie des mathématiques, ou des sciences, doive viser l'établissement des rapports (souvent imaginaires ou extrinsèques) entre systèmes ou thèses philosophiques et productions scientifiques, comme a par exemple prétendu le faire L. Brunschvicg dans *Les étapes de la philosophie mathématique*[4]. Je ne crois pas qu'elle doive chercher à modéliser la science, à reconnaître en son évolution ou en sa structure des manifestations particulières d'une loi ou d'une logique fixées à l'avance, comme l'ont fait, par exemple, sous des formes différentes, les néopositivistes, Popper, Kuhn ou Lakatos. Je ne crois pas non plus que sa tâche soit d'exposer des théories scientifiques d'une manière autre, plus proche de la sensibilité d'un philosophe, par exemple à la manière d'une dialectique phénoménologique abstraite, comme l'ont fait, différemment l'un de l'autre, A. Lautman et J. T. Desanti[5]. Je ne crois pas plus qu'elle ait pour but de dévoiler la nature véritable des objets ou du langage de la science, nous fournir une sémantique pour ce langage, et, par ce biais, une théorie générale de la connaissance scientifique, comme cherche à le faire la philosophie des sciences d'inspiration analytique. Enfin, je ne crois pas que la vraie philosophie des sciences soit installée à l'intérieur de l'activité scientifique, sous la forme d'une orientation ou d'une attitude, dites "épistémologiques", qui gouvernent et inspirent la production scientifique, comme l'ont dit un grand nombre d'historiens qui se veulent "sensibles aux problématiques philosophiques". Je pense la philosophie des sciences, comme un effort d'élaboration des catégories interprétatives qui nous servent à comprendre les sciences telles qu'elles sont et telles qu'elles ont été.

En disant d'emblée que la recherche dont les résultats sont exposés ci-dessous est une recherche historique (plutôt que philosophique), je ne veux donc insister que sur ceci : mon but n'a été que la compréhension de l'origine d'une théorie mathématique particulière, et non pas la mise au point d'une ou plusieurs catégories interprétatives générales. Les catégories

[3]Le terme "mathématiques" soufre, dans le langage courant, d'une ambiguïté analogue à celle que résout la distinction entre histoire ("*res gestæ*") et historiographie ("*historia rerum gestarum*"). On devrait distinguer entre les mathématiques dont on dit d'habitude qu'on les fait — qui ne sont donc rien qu'une activité humaine, et constitue de ce fait une histoire —, et les mathématiques dont on dit d'habitude qu'on les étudie — qui sont par contre l'ensemble des propriétés des objets créés par cette activité, et que cette même activité dévoile. Faire de l'historiographie des mathématiques signifie étudier les mathématiques dans le premier de ces deux sens.

[4]Cf. Brunschvicg (1912).

[5]Cf. Lautman (1977) et Desanti (1968).

interprétatives dont je me sers ici ont fait l'objet d'autres recherches et d'autre expositions[6], dont je ne crois pas nécessaire de résumer ici les résultats.

* * *

La théorie mathématique dont il sera ici question est la théorie des fluxions, constituée par le jeune Newton, à Cambridge, entre les années 1664 et 1671. Je ne suis intéressé que par l'origine de cette théorie ; ainsi, je consacrerai l'essentiel de mon étude aux recherches mathématiques conduites par Newton entre le printemps 1664 et le mois d'octobre 1666. Ces recherches sont documentées, de manière on ne peut plus précise, par un large recueil de notes manuscrites que D. T. Whiteside a publiées dans le premier volume des *Mathematical Papers of Isaac Newton*[7]. C'est à l'examen détaillé de ces notes que sont consacrés les chapitres 4 à 11 de mon ouvrage. Les chapitres 2 et 3 sont consacrés à exposer les deux théories qui fournissent le point de départ de la construction de Newton, respectivement la théorie des quadratures de Wallis et la théorie des tangentes de Descartes, avec les nombreux développements apportés à celle-ci par les travaux des mathématiciens réunis autour de van Schooten. Enfin, le chapitre 12 dresse un cadre très rapide de l'évolution de la théorie de Newton après 1666, et sert de conclusion.

Les présentations et les notes qui accompagnent l'édition des textes de Newton par Whiteside constituent en elles-mêmes un commentaire tellement vaste, précis et pertinent, qu'on pourrait penser qu'aucune autre analyse n'est désormais nécessaire. Bien que mon travail se serve largement des conclusions auxquelles Whiteside est parvenu, et qu'il n'aurait même pas été possible sans l'aide de cet appareil documentaire, il vise à réaliser une présentation unitaire et compacte de l'évolution des recherches de Newton, en s'appuyant sur un petit fragment de la grande masse de matériaux édités par Whiteside dans les huit volumes des *Mathematical Papers*. Il cherche ensuite — plutôt que à traduire les arguments de Newton dans le formalisme du calcul différentiel et intégral moderne — à expliquer par ces arguments l'origine de ce calcul et à montrer en quoi ces arguments diffèrent de ceux auxquels on est aujourd'hui habitué. Dans la plupart des cas, la différence tient à une absence majeure, celle d'un objet remplissant dans la théorie naissante de Newton, le rôle qui, dans le calcul différentiel et intégral, est rempli par la dérivée ou la différentielle. Ainsi, j'ai constamment cherché à montrer comment les objets qui forment le domaine de la théorie des fluxions se sont graduellement constitués. On ne doit pas confondre ces objets avec ceux qui forment le domaine du calcul différentiel et intégral leibnitzien[8], ni avec ceux qui forment le domaine du calcul différentiel et intégral moderne, ou encore des nombreuses théories distinctes que nous reconnaissons aujourd'hui être des ancêtres de ce calcul. Le domaine du calcul des fluxions a été plutôt un des points de départ de la lente et graduelle construction de domaines d'objets essentiellement différents de celui sur lesquels ont porté successivement ces autres théories. Confondre cette relation génétique avec une relation d'équivalence mal définie, ou

[6] Cf. la note 2.

[7] Cf. Newton (MP).

[8] Bien que n'aie pas insisté sur cet aspect de mon travail, j'espère avoir apporté une contribution à la compréhension de la nature des différences qui séparent la théorie des fluxions de Newton du calcul différentiel et intégral de Leibniz. Cette différence ne tient pas, tout simplement, aux langages ou aux notations respectivement utilisées par Newton et Leibniz, ni ne peut être réduite à une différence entre les "attitudes" ou les styles mathématiques de ces derniers, mais elle tient aux domaines de leurs théories : ces théories portent sur des objets mathématiques essentiellement distincts.

même avec une simple identité, comme on l'a malheureusement fait trop souvent bien après L. Carnot[9], signifie se condamner à ne pas comprendre les raisons d'être d'un large fragment de l'histoire des mathématiques. Mon travail voudrait être une contribution à l'effort que l'historiographie des mathématiques doit accomplir pour se libérer de cet empêchement.

* * *

Cette dernière observation exige une clarification, qui servira aussi à introduire mes prochaines considérations. La constitution d'un domaine d'objets mathématiques se fait toujours à partir de la disponibilité préalable d'autres objets qui, à leur tour, peuvent être ou non des objets mathématiques. Cette construction tient essentiellement à la détermination de critères d'identité nouveaux et donc à une réorganisation du domaine de ces objets.

Voici des exemples des modalités par lesquelles cette réorganisation peut être accomplie. On peut prendre comme des nouveaux objets des classes d'équivalence définies sur les objets préalables et penser les éléments de ces classes comme des représentations ou des expressions de ces objets nouveaux[10]. On peut aussi associer à des procédures explicitement codifiées, réalisables sur les objets préalables, des symboles ou des termes nouveaux désignant des objets nouveaux ; c'est ce que Cavaillès appelait "thématisation"[11]. On peut enfin considérer des objets donnés, fonctionnant comme des représentations ou des expressions d'autres objets ou des conditions que d'autres objets seraient censés satisfaire, comme des objets autonomes, sur lesquels il est possible de définir des procédures d'une manière parfaitement indépendante de la considération des objets ou des conditions que ses objets étaient censés représenter, exprimer, ou satisfaire. Ceci revient à transformer des objets qu'on pourrait qualifier de "conditionnels" en objets "propres" : j'appelle "conditionnels" des objets mathématiques que, à l'intérieur d'une certaine théorie, on n'étudie que parce qu'ils révèlent ou expriment des propriétés d'autres objets, que j'appelle "propres", car ils constituent les véritables objets d'études de telle théorie[12].

[9]Cf. Carnot (1797) et (1813) et, à propos du jugement de Carnot, J. et N. Dhombres (1997), pp. 459-461.

[10]Dans la suite de mon exposition, j'utiliserai toujours les termes "représentation" et "expression" pour me référer à des objets qui entretiennent avec d'autres objets une relation bien définie qui fait que les premiers objets se présentent comme des modes de manifestation des seconds objets ou de certaines de leurs propriétés. Le terme "représentation" sera employé toutes les fois que les seconds objets assurent leur fonction de manifestation grâce à leurs propriétés figurales ou extensives particulières ; en revanche, le terme "expression" sera employé lorsque cette fonction de manifestation n'est assurée que grâce à des conventions symboliques explicites. Ainsi, une courbe sera conçue comme une représentation d'une équation et une équation comme une expression d'une courbe.

[11]Cf. par exemple Cavaillès et Lautman (1939), 10.

[12]Pour une précision à propos de la distinction entre objets conditionnels et objets propres, cf. Panza (1998). E. Giusti a récemment suggéré que les objets mathématiques sont crées par un "processus d'objectivation de procédures" portant sur des objets (non nécessairement mathématiques) préalables [cf. Giusti (1999), 26, mais aussi 74]. Ce processus, qu'on peut penser comme une thématisation, au sens de Cavaillès, compte trois étapes, toutes les trois nécessaires, d'après Giusti, pour la création d'un véritable objet : ce qui va devenir un objet mathématique doit se présenter à la fois comme "outil de recherche", comme "objet d'étude" et comme "solution de problèmes". La notion d'outil de recherche me semble être proche de ma notion d'objet conditionnel, et celles d'objet d'étude et de solution de problèmes me semblent correspondre à deux aspects distincts de ma notion d'objet propre. Ces identifications possibles mises à part, ce qui rapproche mon attitude de celle de Giusti est la conviction que le processus de création des objets mathématiques a lieu dans l'histoire et ne peut être étudié que comme un phénomène historique. Plus que vers une ontologie particulière, la question de l'objectivité mathématique pointe vers une historiographie attentive aux modalités d'édification du domaine des théories mathématiques.

On peut, en général, dire que la constitution d'un nouveau domaine d'objets mathématiques est accomplie à partir de la donation préalable d'autres objets, lorsque, en se réclamant de ces objets et de leurs propriétés ou relations, on sait définir d'autres propriétés ou relations et les assigner à des entités que, d'une manière ou d'une autre, on est capable d'exhiber, de sorte qu'aucune ambiguïté ne soit possible quant à leur identité[13].

* * *

L'opération accomplie par Newton, à l'occasion de la constitution de la théorie des fluxions, consiste essentiellement dans une réorganisation des objets hérités de la tradition géométrique, et en particulier de la relativement récente géométrie cartésienne. Parmi les effets de cette réorganisation, l'un revêt une grande importance pour les développements futurs des mathématiques : les équations entières à deux variables qui, dans la géométrie cartésienne, ne fonctionnaient que comme des objets conditionnels — des expressions des conditions que les courbes dites "géométriques" sont censées satisfaire — se transforment dans des objets propres. C'est à partir de ces nouveaux objets propres que Newton définira la notion de fluxion dans le *De Methodis*.

Le terme "fluxion" n'apparaisse nulle part dans les notes rédigées par Newton entre le printemps 1664 et le mois d'octobre 1666. Cependant, lorsque ce dernier l'emploie pour la première fois, dans le *De Methodis*, en 1671, il l'utilise pour dénoter des objets qui avaient déjà fait subrepticement leur apparition dans des notes précédentes, en particulier dans le traité qu'il rédigea dans le moins d'octobre 1666[14]. Ces objets apparaissent d'ailleurs, dans ce traité, comme des sortes de généralisations d'autres objets qui, sous des noms différents, tels "vitesse", "mouvement" ou "augmentation", avait été largement présents dans plusieurs notes, rédigées à partir de l'été 1665. Cette généralisation permet d'assigner aux nouveaux objets le rôle d'objets propres, indépendants de toute considération géométrique, tandis que les vitesses, mouvements ou augmentations ne fonctionnaient que comme des objets conditionnels et n'étaient définis qu'en termes géométriques. Bien que l'intérêt de la théorie des fluxions, ainsi qu'elle est exposée dans le *De methodis*, tient, en grande parties, à ses applications géométriques, celle-ci se présente en effet comme une théorie autonome, portant sur des objets d'une nature essentiellement nouvelle par rapport à ceux de la géométrie classique et aussi aussi à ceux de la géométrie cartésienne. Ces objets préfigurent les objets qui plus tard viendront à former les domaines des théories mathématiques qu'on réunit d'habitude sous l'appellation, en vérité assez générique, d' "analyse". Rechercher les origines de la théorie des fluxions, c'est donc aussi, je crois, rechercher les origines de ces théories. Ces sont ces origines que je qualifie d'origines de l'*analyse*.

* * *

Pour justifier cette thèse, il faut d'abord l'éclairer.

[13]Cf. les travaux cités à la note 2. En employant une formule ramassé, on pourrait dire que des objets mathématiques sont constitués lorsqu'on dispose d'un mode d'exhibition des porteurs d'une propriété ou des *relata* d'une relation qui soit immune de la possibilité d'une "mauvaise identification" [à propos de la notion de mauvaise identification (*misidentification*), cf. Shoemaker (1968)].

[14]Cf. la section 11.1.4.

Le terme "*analyse*", écrit en italique, est ici employé pour désigner une classe d'équivalence de théories mathématiques. Cela signifie qu'il est employé dans une signification qu'il faut avoir soin de distinguer des nombreuses autres significations qu'on assigne d'habitude à ce même terme[15].

Pour plus de précision, je signalerai deux de ces significations, en les distinguant de la précédente. D'abord, ce terme ne sera jamais utilisé au cours de mon étude pour faire référence à une méthode ; bien que cet usage ait été et soit encore fort courant, il me semble trop vague pour s'y conformer dans une recherche qui vise, entres autres, à fournir des clarifications de nature historiographique[16]. Le terme "analyse", écrit en romain, sera en revanche parfois utilisé par la suite pour faire référence à une modalité de la pensée, c'est-à-dire qu'il indiquera une forme propre à certaines procédures d'inférence, ou en général à certains arguments, ou même les procédures ou les arguments qui possèdent cette forme ; j'ai cherché ailleurs[17] à caractériser une telle forme avec toute la précision dont j'ai été capable, et il ne me semble pas utile de revenir ici sur la question.

Revenons en revanche à l'*analyse*, conçue comme classe d'équivalence de théories mathématiques. Comme mon but n'est ici que d'en étudier l'origine, il suffira de caractériser cette classe intensionnellement, sans chercher à déterminer de manière précise son extension. Selon le point de vue que j'ai exposé ci-dessus, je dirai simplement que l'*analyse* est la classe d'équivalence des théories mathématiques qui traitent d'objets *analytiques* comme objets propres. Il faut donc commencer ma recherche en disant plus clairement ce que j'entends par l'expressions "objet *analytique*". En parlant d'objets *analytiques*, je ne me réfère pas, tout simplement aux équations, ou à toute sorte d'expressions symboliques relevant d'un langage et d'une syntaxe déterminés. Pour éclairer le sens que j'assigne à cette expression, je ne peux pas me limiter à fournir une simple définition abstraite. Une reconstruction, encore que très rapide, de l'histoire des mathématiques qui a conduit jusqu'à Newton est nécessaire. C'est l'objet du chapitre qui suit.

[15]Pour une liste de ces significations, certainement encore incomplète, cf. Otte et Panza (1997*b*).

[16]Il ne faut pas confondre un telle signification avec celle que le mot "analyse" assume dans l'expression composée "méthode de l'analyse et de la synthèse". La méthode à laquelle cette dernière expression se réfère — qui a été, en différents moments de l'histoire, différemment caractérisé de manière plus ou moins précise — n'est en fait guère celui de l'analyse, mais, justement, celui de l'analyse et de la synthèse. Si on veut assigner une signification séparée au terme "analyse", lorsqu'il est employé comme composant de ce terme composé, il faut supposer qu'il désigne non pas une méthode, mais une modalité de la pensée [cf. ci-dessous].

[17]Cf. Panza (1996*b*).

Chapitre 1

De la géométrie à l'*analyse*

Lorsque Newton commença ses études mathématiques, les mathématiques étaient déjà en train de changer. Descartes en particulier, mais aussi Viète, Cavalieri, Wallis, et bien d'autres, avaient entamé une œuvre de réforme des conceptions classiques. Le but du présent chapitre est de décrire sommairement ces conceptions et d'indiquer les contenus essentiels de ces premiers essais de réforme.

1.1 Le cadre euclidien

Les objets propres des mathématiques classiques peuvent, d'une manière fort générale, être distingués en deux classes : d'un côté, il y a la grande famille des quantités, de l'autre un nombre assez restreint de formes géométriques, généralement des courbes.

Cette distinction ne doit pas faire penser à deux domaines nettement séparés. Les liens entre ces classes d'objets étaient si forts, que souvent on croit, à tort, que parmi les objets étudiés par les mathématiques classiques, il y en avait certains — par exemples les droites, les polygones, ou les cercles — qui pouvaient indifféremment être pensés comme des quantités ou comme des formes géométriques. Cependant, si on regarde les choses de manière plus fine, on se rend compte que les critères d'identité qui caractérisent une droite, un polygone ou un cercle en tant que quantités ne sont pas les mêmes que ceux qui caractérisent la droite, le polygone, ou le cercle en tant que formes géométriques. Il ne faut donc pas confondre une forme avec une quantité particulière qui possède cette forme. Pour ne donner qu'un exemple : la droite en tant que forme est un objet bien différent de toute droite particulière en tant que quantité. Il est vrai pourtant que dans le cadre des mathématiques classiques en caractérisant une forme, par exemple une certaine courbe, on ne pouvait éviter de se réclamer de la considération de certaines quantités, et que souvent la caractérisation d'une quantité relevait de la reconnaissance d'une forme. Il n'est donc guère surprenant de rencontrer, dans les mathématiques classiques, des théories portant en même temps sur des formes et des quantités et visant l'établissement de relations entre ces deux sortes d'objets. Un exemple est donné par la théorie des coniques d'Apollonius.

Bien que je ne connaisse rien de tel qu'une définition précise, établissant, en général et une fois pour toutes, ce qu'est une quantité, il me semble que la stipulation suivante est très proche de l'esprit des mathématiques classiques[1] : des objets (distincts) sont des quantités si et seulement si on sait les ajouter les uns aux autres et qu'on sait établir si chacun d'eux est plus grand, plus petit ou égal à chacun des autres[2].

Cela ne signifie pas qu'une définition générale de l'addition, et de l'ordre total devaient nécessairement précéder la caractérisation d'un objet particulier comme une quantité. Dans les mathématiques classiques, on ne trouve rien de semblable à des notions générales d'addition, d'ordre et d'égalité. Les huit premières parmi les notions communes des *Éléments*[3] peuvent être lues comme des conditions générales qu'une opération et deux relations doivent respecter pour pouvoir être reconnues respectivement comme une jonction, une comparaison quant à la taille, et une égalité. Néanmoins, il serait anachronique et erroné de les considérer comme des définitions générales de l'addition, de l'ordre strict et de l'égalité.

Loin de disposer d'une opération universelle, dite "addition" et de deux relations aussi universelles, indiquées par les termes "plus grand" et "égal", portant sur des objets quelconques, qui, par le seul fait de se soumettre à cette opération et à ces relations, se présenteraient comme des quantités, Euclide consacre implicitement une bonne partie des *Éléments* à définir la jonction[4] et l'égalité pour les différentes sortes d'objets sur lesquels portent ses théories, et à déterminer les conditions sous lesquelles un de ces objets peut être dit plus grand ou plus petit qu'un autre objet de la même sorte. Et ceci est partie intégrante de la caractérisation d'une famille d'objets d'une certaine sorte comme un domaine de quantités. Ainsi, dans les *Éléments* d'Euclide, caractériser le domaine des segments (de droites)[5] comme un domaine de quantités consiste à dire ce que signifie : que deux segments pris ensemble forment un troisième segment qui vaut comme leur jonction ; qu'un segment est

[1]Parmi les définitions imprécises, on peut citer celle, assez célèbre et très tardive, de d'Alembert, d'après laquelle une quantité est "tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution" [cf. d'Alembert (Dis.), VI].

[2]L'adjectif "égal" et le symbole "=" comptent plusieurs significations dans l'histoire des mathématiques, et ce n'est que fort récemment, dans le contexte d'une mathématique ensembliste, que l'on a pris coutume de les comprendre comme renvoyant à une identité (c'est-à-dire à la relation que tout objet a avec lui même, et seulement avec lui-même). Cependant, une égalité est toujours une relation d'équivalence, mais elle n'est pas toujours la même relation d'équivalence. Caractériser un domaine de quantités signifie, entre autres choses, spécifier la relation d'équivalence qui y vaut comme une égalité. Il faut pourtant observer qu'une relation d'équivalence ne peut valoir comme une égalité sur un domaine de quantités, que si elle est définie comme un cas particulier d'une relation d'ordre, c'est-à-dire que si a n'est pas égal à b, alors soit a est plus grand que b, soit b est plus grand que a. En d'autres termes, la définition d'une relation d'égalité entre quantités doit participer à la définition d'un ordre total. Il s'ensuit, par exemple, que la congruence ne peut pas valoir comme une égalité entre deux quantités (sauf si on a défini une relation d'ordre dont elle est un cas particulier).

[3]Cf. Euclide (EH), I, 10 et (EV), I, 178-179 ; lorsque j'indiquerai, dans la suite de ma dissertation, un axiome, une définition ou une proposition des *Éléments* par un nombre, je ferai toujours référence à l'édition de Heiberg.

[4]On sait qu'à proprement parler il n'y a pas d'opération d'addition dans les *Éléments*, il y a seulement des procédures revenant à prendre ensemble deux quantités de façon à former une troisième quantité de la même sorte. Pour indiquer ceci, Euclide n'utilise d'ailleurs aucun terme spécifique : la conjonction "καὶ", interpolée entre les noms de ces quantités, est souvent considérée comme suffisante pour indiquer que ces quantités doivent être prises ensemble. Néanmoins, la simple décision de prendre deux quantités ensemble n'est pas suffisante pour déterminer une troisième quantité formée par celles-ci. En parlant de définition de la jonction entre deux quantités, je me réfère justement à la détermination des procédures aptes à construire, reconnaître ou tout simplement caractériser cette troisième quantité, à partir de la donation des deux premières.

[5]À la suite du présent chapitre, le terme "segment", sans autres spécifications, sera toujours employé pour indiquer des segments de droites, ce qu'Euclide appelle tout simplement "(lignes) droites".

plus grand qu'un autre ; que deux segments sont égaux. Les quantités d'Euclide sont ainsi, par définition, partagées en classes séparées, caractérisées par le fait que tous et seulement les objets appartenant à une même classe peuvent s'ajouter entre eux, se comparer selon la taille et, éventuellement, se reconnaître comme égaux.

Dans ce cadre, il n'y avait pas d'espace pour une théorie traitant de quantités en général, c'est-à-dire pour une théorie dans laquelle il ne serait pas décidé au préalable de quelles sortes de quantités il est question.

Pour contredire cette conclusion, quelqu'un pourrait citer l'exemple de la théorie des proportions d'Eudoxe, qu'Euclide présente dans le livre V des *Éléments*, un exemple qui aurait d'autant plus de valeur que cette théorie est la clef de la géométrie pré-cartésienne. Il me semble pourtant que cet exemple est loin de contredire la conclusion précédente. Comme la référence à la théorie d'Eudoxe va être fondamentale dans la suite, je prendrai le temps pour éclairer mon point de vue assez soigneusement.

* * *

Dans les *Éléments*, Euclide présente, comme on le sait, non pas une, mais deux théories des proportions : une dans le livre V, due à Eudoxe et traitant de grandeurs ; l'autre dans le livre VII, due à Théétète et traitant de nombres (qui pour Euclide ne sont que les nombres entiers positifs).

Nombres et grandeurs sont, les uns et les autres, des quantités, mais il y a entre eux une différence fondamentale : les premiers, au contraire des deuxièmes, satisfont la condition de la mesure commune : pour tout couple de nombres, il y a un nombre qui est une mesure commune de ces nombres ; en revanche, il est possible que deux grandeurs soient telles qu'aucune autre grandeur n'en soit une mesure commune[6]. Conformément à la notion euclidienne de mesure, cela signifie que pour tout couple de nombres, a et b, on peut trouver un nombre h, tel que a et b résultent tous les deux de l'adjonction de h à lui-même un certain nombre de fois[7], tandis que cela n'est pas nécessairement les cas si a, b et h sont des grandeurs. Cette différence dérive évidemment de ce que les nombres sont tous formés à partir d'un élément commun, l'unité, de sorte qu'ils résultent tous en ajoutant l'unité à elle-même un certain nombre de fois ; rien d'analogue n'est en revanche vrai pour les grandeurs. En indiquant la jonction par notre signe d'addition, et en utilisant notre notation multiplicative pour indiquer une jonction réitérée, on a alors ceci : si a et b sont des nombres, alors, il y a

[6]On indique souvent cette différence en disant que les nombres sont des quantités continues et les grandeurs des quantités discrètes [cf. par exemple Klein (1934-1936), 10)]. Cette formulation me paraît néanmoins fort malheureuse, surtout par rapport à la théorie aristotélicienne de la continuité, qui était certainement un cadre de référence des mathématiques d'Euclide [pour la théorie aristotélicienne de la continuité et ses relations avec la géométrie d'Euclide, je renvoie le lecteur à Panza (1992*b*), (1995*a*) et (2000)]. Elle ne tient, tout au plus, qu'à une métaphore. Pourtant, si on veut éclairer la nature de la distinction entre nombres et grandeurs, il faut sortir de cette métaphore et regarder de plus près les théories mathématiques des nombres et des grandeurs.

[7]Si on voulait être précis, on devrait énoncer cette propriété un peu différemment, pour tenir compte du fait que pour Euclide l'unité n'est pas un nombre. Par simplicité, j'évite pourtant ici d'introduire cette précision, qui ne me paraît pas essentielle quant à l'objet de la présente discussion.

toujours trois autres nombres h, n et m, tels que :

$$\begin{aligned} a &= \underbrace{h+h+\cdots+h}_{n \text{ fois}} = nh \\ b &= \underbrace{h+h+\cdots+h}_{n \text{ fois}} = mh \end{aligned} \tag{1.1}$$

en revanche, si a et b sont des grandeurs d'une certaine sorte, rien n'assure qu'il y ait une autre grandeur h de la même sorte qui satisfait (1.1), quels que soient les nombres n et m.

La définition VII.21 des *Éléments* qui, conformément à la théorie des proportions de Théétète, établit la condition sous laquelle quatre nombres sont en proportion, peut alors être reformulée comme suit : quatre nombres x, y, X et Y sont en proportion si et seulement si parmi les mesures communes respectivement de x et y et de X et Y, il y en a deux qui mesurent respectivement x et y, et X et Y selon les mêmes facteurs. En employant la notation habituelle pour indiquer une proportion, on aura ainsi, en symboles :

$$(x : y = X : Y) =_{df} \exists h \left[\begin{pmatrix} x = nh \\ y = mh \end{pmatrix} \Rightarrow \exists H \begin{pmatrix} X = nH \\ Y = mH \end{pmatrix} \right] \tag{1.2}$$

où n, m, h et H sont évidemment des nombres, de même que x, y, X et Y.

Cette définition n'est évidemment convenable que parce que les nombres satisfont la condition de la mesure commune. En effet, s'il n'en était pas ainsi, et que x et y étaient tels que, quels que soient n, m et h, l'antécédent de l'implication qui apparaît dans le membre de droite de (1.2) soit faux, alors cette implication serait satisfaite pour tout h, X et Y et donc les nombres x, y, X et Y seraient en proportion, quels que soient X et Y. La définition VII.21 ne peut donc pas être appliquée à des grandeurs quelconques, si on veut éviter de devoir en conclure que deux grandeurs incommensurables sont entre elles dans la même raison que tout autre couple de grandeurs. C'est la raison qui oblige à chercher une définition différente pour la proportionnalité de quatre grandeurs, dont la légitimité ne présuppose pas le respect de la condition de la mesure commune.

La définition V.5 des *Éléments* qui, suivant la théorie d'Eudoxe, établit la condition sous laquelle quatre grandeurs sont en proportion, est justement une définition de ce type. Cette définition peut en effet être reformulée ainsi : quatre grandeurs x, y, X et Y (deux à deux de la même sorte) sont en proportion si et seulement si entre tous les multiples de x et y il y a la même relation d'égalité ou d'inégalité qu'il y a entre les mêmes multiples de X et de Y. En indiquant encore la jonction réitérée d'une grandeur à elle-même par notre notation multiplicative, et les relations d'inégalité par les symboles "> " et "<", on aura ainsi, en symboles :

$$(x : y = X : Y) =_{df} \begin{pmatrix} (nx = my) \Rightarrow (nX = mY) \\ (nx > my) \Rightarrow (nX > mY) \\ (nx < my) \Rightarrow (nX < mY) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

où n et m sont évidemment des nombres. Il est facile de voir qu'à la différence de la définition VII.21, cette définition est infinitaire : elle ne peut être associée, en tant que telle, à aucune procédure finie qui puisse permettre de décider si quatre grandeurs sont en proportion (bien qu'il suffise de trouver deux nombres n et m qui ne satisfont pas une des implications qui interviennent dans le membre de droite de (1.3) pour en conclure que x, y, X et Y ne sont pas en proportion).

Il ne suffit pourtant pas de noter que les théories de Théétète et d'Eudoxe se fondent sur des définitions différentes pour en terminer avec la description des différences entre ces deux théories.

Si p est un nombre et a une quantité quelconque, le produit pa est évidemment, de la manière dont on vient de le définir, une quantité de la même sorte que a. Comme tout nombre est comparable à tout autre nombre, mais toute grandeur n'est pas comparable à toute autre grandeur, il s'ensuit des définitions VII.21 et V.5 qu'il fait sens de se demander si quatre nombres quelconques sont ou non en proportion, tandis qu'il ne fait sens de se demander si quatre grandeurs sont en proportion, qu'à condition que ces grandeurs soient deux à deux comparables, c'est-à-dire qu'elles soient deux à deux de la même sorte.

Cela n'est pas encore tout. En partant de la définition VII.21, Euclide n'a aucune difficulté à montrer, dans la proposition VII.19, que quatre nombres x, y, X et Y sont en proportion si et seulement si le produit[8] de x et Y est égale au produit de y et X :

$$(x : y = X : Y) \Leftrightarrow (xY = yX) \tag{1.4}$$

Il s'ensuit que, en accord avec la théorie de Théétète, dire que quatre nombres sont en proportion est parfaitement équivalent à affirmer que deux produits de nombres sont égaux. La relation de proportionnalité, qui est une relation à quatre places, se montre ainsi être équivalente à une égalité, qui n'est évidemment qu'une relation à deux places. Lorsqu'on imagine, qu'au moins un des nombres x, y, X et Y est variable ou indéterminé, la condition qui est exprimée par une proportion peut alors être aussi bien exprimée par une équation. Or, rien de ceci n'a lieu dans la théorie d'Eudoxe. Du fait que deux grandeurs peuvent être ajoutées l'une à l'autre ne suit pas qu'on puisse définir quelque chose comme un produit de deux grandeurs ; et, en effet, rien de similaire à un produit entre deux grandeurs n'apparaît dans les mathématiques classiques.

Les circonstances qu'on vient de rappeler font que les théories de Théétète et d'Eudoxe furent considérées, dans la tradition des mathématiques classiques, comme des théories essentiellement distinctes de deux sortes de quantités essentiellement distinctes : rien comme une théorie unitaire des quantités ne fait partie de cette tradition[9].

On pourrait observer que, formellement, la théorie de Théétète pourrait être vue comme un cas particulier de la théorie d'Eudoxe : il s'agirait de référer les définitions sur lesquelles se fonde la deuxième de ces théories à des quantités quelconques (nombres ou grandeurs) et de montrer ensuite que si on restreint ces définitions à des nombres, alors on retrouve comme théorèmes les définitions sur lesquelles se fonde la première. À certaines conditions près, ceci est possible, mais c'est un fait qu'historiquement les deux théories se développèrent séparément. Cela ne fut pas d'ailleurs seulement un hasard de l'histoire, cela mais tient à une logique : la possibilité de convertir une proportion entre nombres en une équation déplaça vers les équations tout l'intérêt d'une théorie des nombres ; d'un autre côté, l'impossibilité de faire de même pour une proportion entre grandeurs posa à la théorie d'Eudoxe des problèmes qu'on n'avait aucune raison de se poser par rapport à des nombres.

La théorie d'Eudoxe ne fut donc pas une théorie des quantités en général.

[8]Le produit de deux quantités n et h dont le première est un nombre est défini, conformément aux égalités (1.1), comme une jonction réitérée.

[9]Cf. Giusti (1987), 409-410.

* * *

Si on s'en tient aux considérations précédentes, on pourrait penser néanmoins que dans les mathématiques classiques il y avait de l'espace pour une théorie des grandeurs en général, et que la théorie des proportions d'Eudoxe fut justement une telle théorie. Cela est pourtant également faux.

Certes, en exposant la théorie d'Eudoxe dans le livre V des *Éléments*, Euclide ne spécifie jamais de quelle sorte de grandeurs il est en train de parler, ce qui ne présente aucune difficulté, car son traitement concerne toute sorte de grandeurs. Cela n'est pourtant pas la même chose que de dire que cette théorie porte sur les grandeurs en général : elle ne fait que considérer une relation, la relation de proportionnalité, qui peut avoir lieu entre quatre grandeurs de la même sorte, quelle que soit cette sorte. En parlant de grandeurs sans autre spécification, Euclide se réfère à n'importe quelle sorte de grandeurs parmi celles qu'il a préalablement définies, ou qu'on pourrait éventuellement définir plus tard. En effet, si on ne'en reste qu'à l'exposition de la théorie d'Eudoxe, rien ne permet de comprendre ce qu'est une grandeur.

On pourrait imaginer qu'Euclide nous donne *de facto*, par l'exposition de cette théorie, une définition implicite des grandeurs en général. Cependant, s'il en était ainsi, Euclide devrait aussi nous dire ce que signifie en général que deux grandeurs sont égales, sont l'une plus grande que l'autre, et forment une troisième grandeur en étant ajoutées l'une à l'autre, ou du moins donner une axiomatique propre à fournir une définition implicite de ces relations et de cette opération. Faute de cela, même sa définition de proportionnalité perdrait tout son sens. Or, si on fait abstraction des notions communes, qui sont certes à ce propos insuffisantes, rien de cela n'apparaît dans les *Éléments*.

Loin d'être une théorie des grandeurs en général, la théorie des proportions d'Eudoxe qu'Euclide expose dans le livre V des *Éléments* me semble ainsi un schéma pour des théories des grandeurs particulières. L'édification de ce schéma fut sans doute un résultat extraordinaire auquel ces mathématiques parvinrent. Pourtant rien n'autorise, dans le cadre de cette théorie, à affirmer d'une grandeur qu'elle est plus grande ou égale à une autre, ou qu'elle est le résultat de la jonction de deux autres grandeurs. *A fortiori*, on ne peut pas affirmer, et encore moins démontrer, que des grandeurs satisfont certaines proportions. La raison en est que rien, dans le cadre de cette théorie, ne nous dit ce que signifie qu'une grandeur est plus grande ou égale à une autre, ou qu'elle est le résultat de la jonction de deux autres grandeurs ; *a fortiori*, rien ne nous dit ce qui signifie que des grandeurs satisfont certaines proportions. Ainsi, lorsqu'on affirme, toujours dans le cadre de cette théorie, que quatre grandeurs sont en proportion, on ne dit proprement rien, ni de ces grandeurs ni d'aucun autre objet ; on se limite à énoncer l'antécédent ou le conséquent d'une implication qui n'a aucune signification en dehors de cette implication[10]. Les objets de cette théorie ne sont donc pas des grandeurs ; mais des schémas de propositions sur des grandeurs.

S'il n'y eut pas de théorie de grandeurs en général dans le cadre des mathématiques classique c'est parce que les grandeurs, prises en général, ne furent pas des objets de ces

[10] J'insiste, pour plus de clarté. Je ne me limite pas à affirmer que dans la théorie d'Eudoxe on ne peut pas démontrer que quatre grandeurs sont en proportion, en peuvent seulement démontrer que si quatre grandeurs sont en proportion, alors quelque chose se passe, ou que si quelques chose se passe, alors quatre grandeurs sont en proportion. J'affirme que dans le cadre de cette théorie, la proposition "$x : y = X : Y$" n'a aucune signification en dehors d'une implication dont elle est soit l'antécédent, soit le conséquent.

mathématiques. La seule réponse à la question "qu'est-ce qu'une grandeur ?" qui semble convenir à la nature des mathématiques classiques est la suivante : une grandeur est soit un segment, soit un polygone, soit un angle, soit toute sorte d'autre quantité particulière, autre qu'un nombre, qu'on a tour à tour défini en spécifiant, entre autres choses, les conditions qui donnent sens aux relations d'égalité et de comparaison quant à la taille, et à l'opération de jonction.

* * *

On est ainsi parvenu à deux conclusions négatives : dans le cadre des mathématiques classiques il n'y eut d'espace ni pour une théorie des quantités en général, ni, plus modestement, pour une théorie des grandeurs en général. La théorie des proportions d'Eudoxe fournit tout au plus à ces mathématiques un schéma pour des théories des grandeurs particulières.

Il s'ensuit que dans le cadre des mathématiques classiques lorsqu'on disait d'une quantité qu'elle était plus grande ou égale à une autre, qu'elle était le résultat de la jonction de deux autres, ou qu'elle était en proportion avec trois autres, on n'affirmait de cette quantité qu'elle jouissait de certaines propriétés bien définies, qu'à condition qu'on eût préalablement spécifié de quelle sorte de quantités on était en train de parler. Si, en employant une notation moderne, on traduit aujourd'hui ces discours par des écritures telles que "$x = y$","$x > y$","$x+y = z$", ou "$x : y = X : Y$", on ne produit des propositions dotées d'une signification qu'à condition de savoir à quelles sortes de quantités les symboles "x", "y", "z", "X" et "Y" étaient censés renvoyer. Lorsque ces précisions ne sont pas données, on doit comprendre tout simplement que ces discours et ces écritures sont censés référer à l'une ou l'autre parmi les différentes sortes de quantités connues, en prenant alors, dans les différents cas, des significations distinctes.

* * *

Comme on y fera constamment référence dans la suite, il convient peut-être d'expliciter le sens que prennent les relations d'égalité et d'inégalité et l'opération de jonction, dans la tradition euclidienne, lorsqu'elles sont référées respectivement à des segments et à des polygones.

Pour ce qui est des segments, la question est d'emblée résolue au début des *Éléments* par les propositions I.1 et I.2, qui montrent comment construire un segment dont une extrémité est placée en un point quelconque du plan, et qui ne peut qu'être égal (suivant les notions communes et la définition du cercle) à un autre quelconque segment donné placé n'importe où dans le plan. Ce segment étant construit, il est ensuite facile de tracer un cercle dont il est le rayon. Tout segment qui est aussi un rayon de ce cercle sera ainsi égal au segment donné. De là il s'ensuit que si deux segments a et b sont donnés, alors a est égal à b si et seulement si, une fois qu'on a construit, conformément à la procédure indiquée dans la proposition II.2, un segment b' égal à b, dont une extrémité coïncide avec une extrémité de a (il se peut naturellement que b et b' coïncident), l'autre extrémité de a se trouve sur le cercle de rayon b' dont le centre est l'extrémité commune de a et b'[11]. Si cette autre extrémité

[11]Il s'ensuit qu'il ne faut pas confondre chez Euclide l'égalité de deux segments avec la possibilité de leur superposition parfaite. Pour amener deux segments, donnés en deux positions différentes, à se superposer

de a se trouve à l'extérieur de ce cercle, alors a est plus grand que b ; si elle se trouve à l'intérieur de ce cercle, alors b est plus grand que a. Enfin, une fois que le segment b' a été construit et le cercle dont il est le rayon tracé, en prolongeant a à partir de l'extrémité que ce segment partage avec b' jusqu'à rencontrer ce cercle, on construit un nouveau segment c qui est formé par deux parties, dont l'une est a et l'autre égale à b. Ce nouveau segment c peut ainsi être conçu comme le résultat de la jonction de a et b.

Quant aux polygones, ils sont égaux entre eux si et seulement s'ils sont chacun égaux au même carré. Or, deux carrés sont égaux si et seulement si leurs côtés sont égaux, et un d'eux est plus grand que l'autre si et seulement si son côté est plus grand que le côté de l'autre. En démontrant la proposition I.47 (le théorème de Pythagore) Euclide nous montre d'autre part que le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est composé par des parties, chacune desquelles ne peut qu'être égale (conformément aux propositions précédentes) à un des deux carrés construits sur les côtés de ce même triangle rectangle. Il s'ensuit que le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle doit être pris comme égal à la jonction (addition) de deux carrés construits sur les côtés de ce même triangle rectangle. Si deux carrés sont donnés, il est donc facile d'en construire un autre qui résulte de leur jonction. Il suffit donc de spécifier les conditions sous lesquelles on peut dire d'un polygone quelconque qu'il est égal à un carré, pour connaître les conditions sous lesquelles on peut dire de ce même polygone qu'il est plus grand ou égal à un autre polygone, ou qu'il est le résultat de la jonction de deux autres polygones. Les conditions sous lesquelles on peut dire d'un polygone quelconque qu'il est égal à un carré sont justement spécifiées par la proposition II.14 des *Éléments*. Cette proposition fournit ainsi la clef pour traiter les polygones comme des quantités[12].

Dans la géométrie d'Euclide, le fait d'affirmer que deux segments ou deux polygones sont égaux entre eux, que l'un d'eux est plus grand que l'autre, ou qu'un certain segment ou un certain polygone résulte de la jonction respectivement de deux autres segments ou de deux autres polygones équivaut donc à affirmer que des constructions sont possibles, c'est-à-dire qu'elle peuvent être réalisées. Du coup, pour démontrer qu'il en est ainsi, il faut réaliser ces constructions. Ces constructions sont évidemment soumises à des conditions fixées par les postulats de telle géométrie et la preuve qu'elles exhibent vraiment des segments ou des polygones égaux à d'autres donnés (d'où on tire ensuite que ces constructions correspondent aux relations et aux opérations indiquées) se fait récursivement, à partir des conditions générales imposées à toute relation d'égalité par les notions communes, de la définition du cercle, et de la supposition de l'égalité de deux segments ou deux polygones qui se superposent parfaitement[13].

parfaitement, il faut en déplacer un rigidement. Mais pour Euclide le déplacement rigide d'un segment revient à la construction d'un autre segment qui, suivant les notions communes et la définition du cercle, ne peut qu'être déclaré égal au segment donné. Euclide se limite plutôt à supposer que deux segments qui se superposent parfaitement sont égaux. Pour une discussion plus détaillée de la question cf. Panza (2000).

[12]Dans son argument, Euclide se réclame d'une relation d'équivalence entre polygones (en particulier entre triangles) qu'il faut bien sûr distinguer soigneusement de la relation d'égalité qui assigne aux polygones le statut de quantités. C'est la relation que nous qualifions aujourd'hui de congruence [cf. la note (2), ci-dessus]. Il suppose, en particulier, que deux triangles dont on parvient à montrer la congruence sont égaux (bien que la réciproque ne soit évidemment pas vrai). Pour plus de précisions sur ce point, cf. encore Panza (2000).

[13]Cf. les notes (11) et (12), ci-dessus.

1.2 Une clarification terminologique : *algèbre* et Algèbre

Le cadre qu'on vient rapidement de décrire ne marque pas seulement les mathématiques euclidiennes, il est aussi celui dans lequel les mathématiques évoluèrent jusqu'à la fin du XVI$^{\text{ème}}$ siècle. La transformation profonde qui correspond à la naissance de l'*analyse*, dont je me propose ici de montrer un prélude, fut précédée par une autre transformation, peut-être moins profonde, mais sans doute telle qu'elle a fourni aux mathématiciens de la deuxième moitié du XVII$^{\text{ème}}$ siècle un cadre plus souple, dans lequel la séparation nette entre théorie des nombres et théories des grandeurs avait été largement résorbée. Pour faciliter la description, qui ne pourra qu'être fort rapide, de cette transformation préalable, je commencerai par introduire une précision terminologique : je distinguerai trois sens, essentiellement distincts, qu'il me paraît possible d'assigner au termes "algèbre" et à ses dérivés. Il me semble en effet que ces termes sont souvent employés par les historiens des mathématiques d'une manière imprécise, et que cela est la raison de plusieurs confusions que je voudrais en revanche m'efforcer d'éviter.

* * *

D'abord, j'utiliserai ce terme, que j'écrirai alors en italique, pour me référer à la théorie mathématique, ou, pour être plus précis, à la classe d'équivalence de théories mathématiques, qui fixent les règles de transformation des écritures symboliques, ne comportant que des symboles de quantités d'une part et des symboles indiquant l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'extraction de racine, l'égalité et l'inégalité d'autre part, de manière indépendante de la nature des quantités que les premiers de ces symboles indiquent. Une telle écriture sera ensuite dite "*algébrique*" (toujours en italique) seulement si on est disposé à lui assigner un sens indépendamment de la détermination de la nature de ces quantités.

Si la reconstruction ci-dessus est correcte, il s'ensuit que, dans le cadre des mathématiques classiques, il n'y a pas d'espace pour de l'*algèbre*. Cela ne dépend pas, évidemment, de l'absence de la notation symbolique qui nous est ajourd'hui habituelle. En effet, l'absence de cette notation n'empêcha pas, par exemple, Diophante ou les mathématiciens arabes d'employer des formules stables et codifiées pour indiquer des relations ou des opérations référées à des nombres. Ainsi, employer notre notation et écrire par exemple "x^2+1-2x" pour indiquer un nombre inconnu que Diophante cherche à déterminer ne me semble pas une trahison majeure quant à la nature des mathématiques diophantiennes[14]. Le point est que la manière dans laquelle un mathématicien travaillant dans le cadre classique pouvait traiter ces formules n'était pas indépendante de la considération de la nature des quantités auxquelles ces formules était référées. Lorsqu'elle est censée indiquer une formule de l'arithmétique de Diophante, l'écriture précédente n'est donc pas *algébrique*,

[14]Les livres I-VI de l'*Arithmétique* de Diophante furent imprimés pour la première fois, en latin, dans la traduction et avec le commentaire de G. Xylander, en 1575 [cf. Diophante (AX), et, pour une édition moderne, Diophante (OT)]. Les livres IV-VII n'ont survécu qu'en traduction arabe et sont maintenant disponible grâce à l'édition faite par J. Sesiano [cf. Sesiano (1982)]. L'exemple considéré dans le texte est pris du livre VI, § 16 [cf. Sesiano (1982), 149 et 392-393].

dans mon sens, de même que ne l'est pas l'écriture "$3a = b$ " référée à la géométrie d'Euclide[15].

Suivant ma convention, on ne peut donc pas parler d'*algèbre* avant qu'on ait fourni une définition générale de l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines, c'est-à-dire une définition de ces opérations en tant qu'opérations portant sur n'importe quelle sorte de quantités et donc indépendantes de la nature particulière de ces quantités. La question est évidemment plus compliquée pour les trois dernières opérations, car dans les mathématiques classiques, d'Euclide jusqu'à la fin du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, on ne disposait pas d'une définition de la multiplication (et donc de la division et de l'extraction de racine) propre à n'importe quelle sorte de grandeur : on assignait un sens à des opérations qu'on pourrait penser respectivement comme une multiplication, une division d'une grandeur par un nombre[16], ou une multiplication de deux nombres ; à diverses époques, on commença même à traiter comme un nombre le résultat de la division des deux nombres quelconques entre eux, et de l'extraction d'une racine d'un nombre quelconque ; mais on n'assigna pas de sens ni à la multiplication ou à la division de deux grandeurs, ni à l'extraction des racines d'une grandeur.

Le fait de disposer d'une définition générale de l'addition, de la soustraction, de la multiplication, de la division et de l'extraction des racines n'est pourtant pas encore une condition suffisante pour pouvoir se réclamer de ces opérations en général, pour assigner certaines propriétés à des quantités. Je m'explique. Supposons définie l'addition entre segments. En disant que le segment z est la somme des segments x et y nous disons alors quelque chose de ces segments, nous affirmons qu'ils jouissent de certaines propriétés. On peut en revanche imaginer une définition de l'addition en général qui n'exige pas une définition préalable de la quantité en général. L'écriture *algébrique* "$y+x = z$" ne pourra pas dans ce cas nous dire quelque chose des quantités x, y et z. Dans ces conditions, une écriture "*algébrique*" ne nous dit pas que certaines quantités jouissent de certaines propriétés ; elle ne correspond qu'à une étape dans une procédure de transformation symbolique, exprimant dans son ensemble des propriétés de certaines opérations. Pour ne donner qu'un exemple, en tant qu'*algébrique*, l'écriture "$x + y = z$" ne nous dira pas, dans ces conditions, que la quantité z est la somme des quantités x et y, mais elle exprimera, confrontée à l'autre écriture *algébrique* "$y+x = z$", la commutativité de l'addition. On verra que celle-ci est justement la situation dans laquelle

[15] En histoire des mathématiques, le terme "algèbre" est généralement employé pour indiquer une classe de théories ayant à faire avec des expressions symboliques où interviennent des symboles littéraux indiquant des quantités, connues ou inconnues, et d'autres symboles indiquant des opérations d'addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racines portant sur ces quantités. J. Klein est allé jusqu'à soutenir [cf. Klein (1934-1936)] que "la création du langage formel des mathématiques est identique à la fondation de l'algèbre moderne". Bien que Klein fût bien conscient que cette "création" n'était pas indépendante d'une nouvelle conception des quantités (en particulier des nombres, d'après Klein), cette insistance sur les aspects notationnels a porté beaucoup d'historiens des mathématiques à croire (ou à raisonner comme s'ils croyaient) que parler d'algèbre, au moins avant Abel et Galois, ne revient qu'à parler d'un certain système notationnel et des règles de manipulation des notations qui interviennent dans ce système. Cela me semble une mésentente profonde. Je suis naturellement persuadé que la possibilité de l'*algèbre*, dans mon sens, tient à l'introduction de notations permettant de se référer en général à des quantités indéterminées [cf. à ce propos la note (43), ci-dessous], mais je vise, par ma définition, à isoler la question qui me semble essentielle, et qui n'est pas, je crois, une question de notations.

[16] Cf. la note (8), ci-dessus. Cela ne signifie évidemment pas qu'on savait toujours construire les grandeurs résultant d'une multiplication d'un nombre par une autre grandeur (comme le montre le cas de la duplication du cube), ou d'une division d'une grandeur par un nombre (comme le montre le cas de la trisection de l'angle).

se trouvera Viète.

* * *

Du fait que dans le cadre des mathématiques classiques on ne puisse pas parler d'*algèbre* dans le sens précédent, il ne s'ensuit pas que le terme "algèbre" ne puisse pas être convenablement employé (et même, d'un point de vue strictement philologique, plus convenablement employé) pour indiquer une théorie mathématique, ou une classe d'équivalence de théories mathématique, qui eût, dans ce même cadre, son espace indiscutable. Je me réfère aux théories — allant de l'arithmétique de Diophante, jusqu'aux travaux de la tradition arabe et de l'école italienne de Cardano, Tartaglia, Ferrari, Scipione del Ferro, Bombelli — visant la solution d'une large classe de problèmes numériques et, plus en général, la manipulation (c'est-à-dire la transformation) des structures symboliques indiquant des opérations sur les nombres. Pour me référer à ces théories j'emploierai le terme "Algèbre numérique" (écrit en romain, et avec une majuscule)[17].

Plus généralement, j'emploierai les termes "Algèbre" et "Algébrique" (toujours en romain et avec majuscule) pour me référer à des théories traitant des relations qui s'instaurent parmi des quantités d'une nature déterminée par l'application à ces quantités d'opérations qu'on reconnaît comme des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions ou des extractions de racines, ces opérations étant évidemment définies par rapport à ces quantités. L'Algèbre numérique doit ainsi, selon cette convention, être conçue comme une parmi de nombreuses Algèbres possibles ; néanmoins elle fut la seule à être développée à l'intérieur du cadre des mathématiques classiques.

* * *

Le développement de l'Algèbre numérique ne se fit pas sans que des relations, même étroites, fussent établies entre celle-ci et la géométrie. Les mathématiciens arabes avait déjà fait usage d'une pratique consistant à accompagner l'énonciation des résultats Algébriques par des illustrations géométriques[18]. Les mathématiciens de la Renaissance n'abandonnèrent pas cette pratique, et arrivèrent même à qualifier ces illustrations de "démonstrations"[19]. Bien qu'on puisse ramener cette coutume à un respect de la tradition classique, d'après

[17]Le but de ma recherche me permet, je crois, de passer sous silence une distinction majeure : celle entre une théorie des nombres en tant que multitudes déterminés d'unités, et une théorie des nombres en tant que quantités d'une espèce particulière. La thèse fondamentale de l'étude classique de J. Klein à propos de "l'origine de l'algèbre" [cf. Klein (1934-1936)] est justement que cette origine tient au passage de la première de ces conceptions du nombre (qui pour Klein est le propre de l'arithmétique grecque) à la deuxième. Bien que préparé par l'œuvre de Diophante (qui est pourtant encore "concerné seulement par la recherche de nombres entièrement déterminés" et vise l'étude des "relations possibles que [ces] nombres [...] peuvent avoir entre eux" [cf. Klein (1934-1936), 134-135]), ce passage n'aurait complètement lieu qu'avec Viète et serait intimement connecté avec l'introduction d'un nouveau formalisme. La thèse de Klein est sans doute fascinante, même si celui-ci évite malheureusement de la mettre à l'épreuve d'une étude des textes issus de la tradition arabe et de la Renaissance italienne (ce qui d'après C. Fraser [cf. Fraser (1997), 48-50] aboutirait à une relativisation du rôle de Viète dans ce passage). Elle reste pourtant, en tant que telle, indépendante de la question que j'aborde ici : celle de l'unification des théories des nombres et des grandeurs, déjà pensés, les uns et les autres, comme des quantités d'une espèce particulière.

[18]Cf. : Giusti (1992), 304 ; et Rashed (1994), 13-14 ; et (1996), 359-362.

[19]L'exemple de l'*Ars magna* de Cardan est à ce propos parlant : cf. Cardan (1545).

laquelle la géométrie aurait constitué la partie logiquement première des mathématiques[20], il me semble difficile de justifier, dans le cadre théorique des mathématiques de l'époque, la possibilité de faire dépendre la preuve de résultats propres à l'Algèbre numérique de la considération d'objets géométriques. Il me semble plutôt que ces "démonstrations" doivent être conçues comme des constructions, visant à fournir des "modèles géométriques"[21] pour ces résultats, en particulier pour des classes d'équations et pour les procédures conduisant à la détermination de leurs racines. Si on peut donc parler, en toute légitimité, de "constructions géométriques des équations"[22], il reste que ces constructions ne pouvaient que fonctionner comme des illustrations, des confirmations, des vérifications, des justifications par analogie, des généralisations[23], mais non pas, au sens strict, comme des preuves.

Cette possibilité de fournir des modèles géométriques de théorèmes ou problèmes numériques se fondait évidemment sur les analogies, déjà largement étalées dans les *Éléments*, entre les produits de deux nombres et les rectangles et entre les produits de trois nombres et les parallélépipèdes[24].

L'égalité

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.5}$$

où les symboles "a" et "b" indiquent des nombres quelconques, présente par exemple une analogie évidente avec l'égalité géométrique

$$R\left((a+b), a\right) + R\left((a+b), b\right) = Q(a+b) \tag{1.6}$$

où les symboles "a" et "b" indiquent des segments quelconques et les symboles "$R(x,y)$" et "$Q(y)$" dénotent respectivement le rectangle construit sur les segments x et y et le carré construit sur le segment x, égalité exprimant le contenu de la proposition II.2 des *Éléments*.

La proposition VI.16 des mêmes *Éléments* était d'ailleurs là pour montrer que des analogies comme celles-ci ne pouvaient pas être purement occasionnelles. En affirmant que quatre segments quelconques "x", "y", "X" et "Y" sont en proportion si et seulement si le carré construit sur les segments "x" et "Y" est égal au carré construit sur les segments "y" et "X", cette proposition énonçait en effet l'équivalence

$$(x : y = X : Y) \Leftrightarrow (R(x,Y) = R(y,X)) \tag{1.7}$$

dont l'analogie avec l'équivalence (1.4) est évidente.

Si x, y et z sont trois segments commensurables, que le segment h est leur mesure commune, et que n, m et p sont trois nombres (entiers positifs) tels que $x = nh$, $y = mh$

[20]Cf. Freguglia (1989), 4.

[21]Cf. Freguglia (1994), 260 et (1999), 113.

[22]Cf. Freguglia (1991), 202.

[23]Cf. Giusti (1992), 304, où, après avoir cité la thèse classique, d'après laquelle les modélisations géométriques des résultats de l'Algèbre numérique s'expliquent "par le fait que seule la géométrie était [considérée comme étant] à même de produire des preuves", E. Giusti ajoute une autre explication qui me semble être, de loin, plus satisfaisante et correcte : "seul le langage de la géométrie rendait possible [à cette époque] la traduction d'un exemple numérique particulier en une situation générale".

[24]L'analogie entre les théorèmes du livre II des *Éléments* et les règles fondamentales de l'Algèbre numérique a fait l'objet de nombreuses discussions. M. S. Mahoney [cf. Mahoney (1994), 32-33] a rappelé que déjà Pierre de la Ramée avait insisté sur cette analogie [cf. La Ramée (1599)]. Elle a t soulignée, à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle par Tannery et Zeuthen [cf. Tannery (1882), 257-259 et Zeuthen (1886), ch. I, 1-38], entre autres. Plus récemment, Giusti [cf. Giusti (1992), 304] a parlé d' "équivalence essentielle entre les règles de l'algèbre et les méthodes du deuxième livre des *Éléments* d'Euclide".

et $z = ph$, il est de surcroît facile de montrer que le rectangle construit sur x et y et le parallélépipède construit sur x, y et z contiennent respectivement nm carrés égaux au carré construit sur h et nmp cubes égaux au cube construit sur h. On aura alors les implications suivantes :

$$\left.\begin{array}{r} x = nh \\ y = mh \end{array}\right\} \Rightarrow R(x, y) = nm\,[Q(h)] \tag{1.8}$$

et

$$\left.\begin{array}{r} x = nh \\ y = mh \\ z = ph \end{array}\right\} \Rightarrow P(x, y, z) = nmp\,[C(h)] \tag{1.9}$$

où les symboles "$P(x, y, z)$" et "$C(h)$" dénotent respectivement le parallélépipède construit sur les segments x, y et z et le cube construit sur le segment h.

Ce fut probablement ce fait évident, joint aux analogies indiquées ci-dessus, qui conduit à penser et indiquer respectivement un rectangle et un parallélépipède comme des produits de segments. Il ne faut pourtant pas penser cette pratique comme une définition d'une opération de multiplication entre segments, analogue à la multiplication entre nombres. Contre cette interprétation ne milite pas seulement l'absence d'une définition explicite, mais surtout deux circonstances mathématiques aussi évidentes que le fait et les analogies précédents : d'abord l'impossibilité d'étendre, dans le cadre des mathématiques classiques, une éventuelle définition de la sorte au cas du produit de plus de trois segments ; ensuite, l'impossibilité de comparer, et donc d'additionner, un produit ainsi défini avec les segments de départ, un produit de deux ou trois nombres étant au contraire parfaitement comparable, et donc additionnable, avec ces nombres. Rien de similaire à une application de l'Algèbre numérique au traitement des grandeurs, ne peut découler ainsi d'une telle pratique.

Ainsi, s'il ne faut donc pas confondre les constructions géométriques des équations[25], et, plus généralement, les modélisations géométriques des résultats propres à l'Algèbre numérique également répandues parmi les mathématiciens de la Renaissance, avec des applications de la géométrie à l'Algèbre numérique, il ne faut pas non plus confondre ces modélisations avec des applications de l'Algèbre numérique à la géométrie[26]. En effet, une chose est d'observer que l'égalité (1.6) et l'équivalence (1.7) correspondent respectivement à l'égalité (1.5) et à l'équivalence (1.4), une autre, bien différente est de prouver l'égalité (1.6) et l'équivalence (1.7) en se réclamant respectivement de l'égalité (1.5) et de

[25]Des exemples particulièrement significatifs de ces constructions se trouvent autant dans le II$^{\text{ème}}$ livre de l'*Algèbre* de R. Bombelli [cf. Bombelli (1572)], que dans le II$^{\text{ème}}$ livre de l'*Arithmétique* de S. Stevin [cf. Stevin (1585)]. Sur les exemples de Bombelli, cf. Freguglia (1988), 101-102 ; (1989), 75-77 ; (1991), 202-204 ; (1994), 264-271 ; et (1999), 100-116 ; sur ceux de Stevin, cf. Freguglia (1992), 137-140. Bombelli revint aussi sur la question dans le quatrième livre de l'*Algèbre* [cf. Giusti (1992), 308-318], qui, de même que le cinquième, resta inédit jusqu'à 1929, date à laquelle, il fut publié par E. Bortolotti [cf. Bombelli (AB IV,V) et, pour l'édition intégrale du traité, Bombelli (AB)].

[26]Il est pourtant facile de comprendre que de toute modélisation géométrique d'un résultat numérique, on peut tirer, par renversement, des modèles numériques de résultats géométriques, et parvenir de là, par généralisation, à un usage de l'Algèbre numérique comme un "guide [que je dirais heuristique pour la solution de problèmes géométriques" [cf. Giusti (1992), 304]. En se réclamant de l'œuvre de Bombelli, Giusti a ainsi résumé ce processus : "a geometrical problem, often [...] an abacus problem in geometric disguise, is solved by putting it into equations, solving that equation by means of the algebraic rules, and then following step by step the solution formula, or rather the computational path, which proceeds itself from inside out, in order to produce a geometric construction" [cf. Giusti (1994), 317].

l'équivalence (1.4). Ce serait seulement cette inférence démonstrative qui marquerait une application de l'Algèbre numérique à la géométrie, mais c'est aussi exactement cette inférence démonstrative qui est impossible dans le cadre des mathématiques classiques.

* * *

Ce qui est commun entre les deux significations précédentes des termes "*algèbre*" et "Algèbre" est qu'elles établissent les limites de ce qui est dit "*algébrique*" ou "Algébrique" de manière explicite, ou même compositionnelle : ces limites sont par définition celles de l'application, ou de la présence d'un ensemble déterminé et restreint d'opérations (définies de manières différentes dans les deux cas), à savoir, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines. Ceci est justement la raison pour laquelle ces termes, pris dans ces significations, ne sauraient pas s'appliquer à des théories mathématiques modernes. La signification aujourd'hui habituelle du terme "algèbre" me semble en fait toute autre. Les limites de ce qui est dit "algébrique" par les mathématiciens modernes sont en effet fixées de manière indirecte, en se réclamant de l'extension d'un corps défini implicitement comme l'ensemble des racines possibles des équations entières à coefficients dans un corps donné.

Ce changement de perspective n'est pas simplement l'effet de l'avènement d'une nouvelle attitude. Il est plutôt l'aboutissement de nombreuses recherches mathématiques et de l'apparition de nouvelles théories. L'histoire de ces recherches et de l'apparition de ces théories ne peut évidement pas être reconstruite ici, même rapidement. Pour éviter des ambiguïtés qui pourraient miner la cohérence de mes reconstructions, il me faudra néanmoins introduire plus loin des précisions ultérieures qui rendront plus claire l'opposition entre le sens moderne du terme "algèbre" et les sens que je viens d'assigner aux termes "*algèbre*" et "Algèbre". Pour l'instant, ce que j'ai dit est suffisant pour me permettre de continuer ma reconstruction.

1.3 Viète

La première tentative consciente de dépasser le cadre classique, de sorte à rendre possible une application des lois de l'Algèbre numérique à la solution de problèmes concernant les grandeurs fut celle que F. Viète accomplit dans son *Isagoge in artem analyticam*[27].

L'objectif déclaré de Viète est celui d'une réforme de la méthode de l'analyse et de la synthèse. Cette réforme se présente comme une réinterprétation de la distinction de Pappus entre analyse et synthèse problématiques et analyse et synthèse théorematiques[28]. Viète[29] comprend cette distinction comme une distinction entre deux "espèces" d'analyse, qu'il qualifie respectivement de "ζητητικὴ" et de "ποριστικὴ", et il propose d'ajouter à celle-ci une troisième "espèce" dite "ρητικὴ" ou "εξηγητικὴ". Viète parle d'espèces d'analyse, mais *de facto* il définit celles-ci comme des phases successives de la méthode de l'analyse et de la synthèse problématique : les deux premières phases, c'est-à-dire la zététique et la

[27]Cf. Viète (1591*a*).

[28]La *Collection Mathématique* de Pappus fut imprimée pour la première fois, dans la traduction latine faite par Commandino, en 1588 [cf. Pappus (CC)]. Pour une édition moderne, cf. Pappus (CH). La distinction entre analyse et synthèse y est exposée au début du livre VII.

[29]Cf. Viète (1591*a*), ch. 1, 1.

poristique, tiennent à l'analyse, la troisième, c'est-à-dire l'exégétique, constitue en revanche la synthèse, car elle consiste dans l' "exhibition", ou construction de ce qui est cherché. Cette tripartition n'est d'ailleurs que l'effet d'une transformation profonde de cette méthode qui assigne à l'analyse une forme et une fonction essentiellement nouvelles.

Conformément aux préceptes aristotéliciens[30], l'analyse se présentait, dans la méthode classique de l'analyse et de la synthèse problématiques, comme un processus portant de la supposition de disposer de ce qui est cherché jusqu'à l'individuation des moyens propres à rendre possible sa détermination ou sa construction. Dans la nouvelle méthode de Viète, elle apparaît en revanche comme un processus de transformation de la configuration des donnés et des inconnus énoncée par le problème en une nouvelle configuration, équivalente à la première, mais propre à rendre plus aisée la détermination des inconnus[31]. Si la lecture des textes de Viète (en particulier des *Zeteticorum libri*[32], où ce dernier montre comment appliquer sa théorie à la solution d'un large ensemble de problèmes) ne laisse aucun doute quant à cette nouvelle conception de l'analyse, la répartition de cette tâche entre la zététique et la poristique est plus obscure. Si on en reste à ce que nous dit Viète dans le chapitre I de l'*Isagoge*, on devrait penser que cette tâche appartient entièrement à la zététique, tandis que la poristique vise à prouver que la nouvelle configuration des donnés et des inconnus, à laquelle on parvient par le biais de la zététique, est équivalente à la configuration originelle[33] (on comprendra tout à l'heure la fonction de cette preuve). On pourrait pourtant interpréter la distinction de Viète d'une autre manière, et assignera la zététique la seule tâche de mettre le problème en équation ; la poristique se chargerait alors de transformer l'équation fournie par la zététique en une nouvelle équation, ou, plus fréquemment, en une proportion, propre à suggérer un théorème qui non seulement indique la voie de la synthèse, mais répond déjà, — bien que pas encore par le biais d'une construction — à l'interrogation posée par le problème[34]. Sans vouloir nier la légitimité de cette interprétation, je parlerai en suite de zététique dans le premier de ces deux sens[35].

[30]Cf. Panza (1997*b*).

[31]C'est ce qu'on a justement qualifié d' "analyse configurationnelle" : cf. pour une discussion Mäenpää (1997), qui attribue pourtant l'introduction de l'analyse configurationnelle à Descartes. Sur cet usage de l'analyse, cf. aussi Bos (1996), 189.

[32]Cf. Viète (1591*b*).

[33]Cf. Mahoney (1994), 34.

[34]Cette interprétation a été suggérée par P. Freguglia qui l'a illustrée de plusieurs exemples [cf. Freguglia (1988), 70-71 ; (1989), 50-51 ; (1997), 167 et (1999), pp. 121-126 ; cf. aussi Bos (1996), 191]. La question que Freguglia soulève en suggérant cette interprétation n'est pas seulement terminologique. Cette interprétation assigne en effet un rôle fondamental au théorème qui précède l'exégétique. Comme ce théorème commande la synthèse ou solution, et qu'il est à son tour suggéré, dans la plupart des cas, par une proportion, Freguglia en conclut que, dans la version de Viète, la méthode de l'analyse et de la synthèse vise la détermination d'une proportion et l'exécution de la construction correspondante. Loin d'être évacuée par la réforme proposée par Viète, la théorie des proportions assumerait ainsi, conformément à cette réforme, un rôle fondamental : elle deviendrait la clef de voûte du nouvel art analytique. Cette conclusion est aussi celle de Giusti [cf. Giusti (1992)], qui se réclame essentiellement, non pas de l'*Isagoge* et des *Zeteticorum libri*, mais de la *Canonica recensio* [cf. Viète (1591-1593)]. Freguglia va cependant jusqu'à soutenir que l'art analytique de Viète conduit *de facto* à une "géométrisation de l'algèbre" [cf. Freguglia (1988), p. 73 ; (1989), p. 53 , 61, 64 ; (1991), 208-209 ; (1994), 276 ;et (1999), 121]. L'*Isagoge* et les *Zeteticorum libri* ne constitueraient ainsi, à côté de la *Canonica recensio*, du *De æquationum recognitione et emendatione* [cf. Viète (1615)], et des *Notæ Priores* [cf. Viète (1631)], que des étapes d'un programme plus général, visant cet objectif.

[35]D'après Klein, l'imprécision de Viète à propos de la distinction entre zététique et poristique tient au fait que cette distinction n'est pas essentielle pour lui, car, "en concentrant sa réflexion sur les procédures, il ne différencie plus entre 'théorèmes' et 'problèmes', ou, plus exactement, car *il voit tout les théorèmes*

Interprétée de cette manière, la zététique présente à son tour des phases successives. Elle tient d'abord à une interprétation du problème donné et à son expression par le biais d'un ensemble convenable d'équations et/ou proportions, constituant la configuration originelle des donnés et des inconnus. Pour transformer cette configuration en une configuration nouvelle, Viète propose d'opérer en appliquant des règles de transformation explicites[36] qui sont énoncées par seize propositions, dans le chapitre II de l'*Isagoge*[37]. Dans un style très austère qui est celui de tout le traité, Viète ne joint à l'énoncé de ces propositions que trois ou quatre lignes de commentaires concernant les propositions 14 et 16 et une introduction aussi rapide qu'ambiguë[38] :

> Symbola æqualitatum & proportionum notiora quæ habentur in Elementis adsumit Analytice ut demostrata,qualia sunt ferè.

Pour plus de clarté, je reporte ici ces seize propositions, en traduisant (sauf pour la première) la formulation discursive de Viète dans un langage symbolique qui nous est aujourd'hui plus habituel. Compte tenu de la manière dans laquelle ce dernier se rapporte ensuite à ces propositions, en les interprétant manifestement comme les énoncés de règles de transformation d'équations et/ou de proportions, il me semble que cette traduction ne trahit pas l'esprit de l'entreprise de Viète, et, au contraire, l'explicite. Voici donc ces propositions :

1. Le tout est plus grand que sa partie.

2. $[(a = b) \wedge (c = b)] \Rightarrow a = c$

3.-6. $[(a = b) \wedge (c = d)] \Rightarrow \begin{cases} a + c = b + d \\ a - c = b - d \quad a, c > b, d \\ ac = bd \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \end{cases}$

7. $(a : b = A : B) \Rightarrow \begin{cases} a : A = b : B \\ b : a = B : A \end{cases}$

8.-11. $\left.\begin{array}{c} a : b = A : B \\ a' : b' = A' : B' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (a + a') : (b + b') = (A + A') : (B + B') \\ (a - a') : (b - b') = (A - A') : (B - B') \\ \qquad a, b, A, B > a', b', A', B' \\ aa' : bb' = AA' : BB' \\ \dfrac{a}{a'} : \dfrac{b}{b'} = \dfrac{A}{A'} : \dfrac{B}{B'} \end{cases}$

comme problèmes" [cf. Klein (1934-1936), 166].

[36]Selon Klein, ce qui caractérise de la réforme de la méthode de l'analyse et de la synthèse par Viète, c'est la conjonction d'une démarche classique — élaborée, et exposée par Pappus, relativement à la géométrie — avec "la manière de procéder de l'*Arithmétique* de Diophante" [Cf. Klein (1934-1936), 157].

[37]Cf. Viète (1591a), 1-2.

[38]Cf. Viète (1591a), ch. II, 1.

12. $\begin{cases} (a=b) \Rightarrow \begin{cases} ac = bc \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c} \end{cases} \\ (a:b = A:B) \Rightarrow \begin{cases} ac : bc = A : B \\ \dfrac{a}{c} : \dfrac{b}{c} = A : B \end{cases} \end{cases}$

13. $\sum_{i=1}^{n} ab_i = a \sum_{i=1}^{n} b_i$

14[39]. $\begin{cases} (ab)c = a(bc) \\ \dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{\frac{a}{c}}{b} \end{cases}$

15.-16. $(a : b = A : B) \Leftrightarrow (aB = bA)$

À l'exception de la première, qui répète la huitième notion commune d'Euclide, elles énoncent toutes des propriétés générales de l'égalité, de l'addition, de la soustraction, de la multiplication, de la division et de la relation de proportionnalité, sans que ces opérations et relations soient préalablement définies. On pourrait supposer que Viète se réfère implicitement aux définitions d'Euclide. Cependant, pour se référer à ces définitions, il aurait dû non seulement référer ces opérations et relations à des quantités d'une nature déterminée, mais il aurait dû, de surcroît, limiter la portée de la plupart d'elles aux seuls nombres. Or, ceci ne semble guère le propos de Viète. Ce que j'ai indiqué ici par les symboles littéraux "a", "a'", "b", "b'", "c", "d", "A", "A'", "B" et "B'" n'est nommé par Viète que dans les propositions 14-16, où celui-ci parle de grandeurs ("magnitudines") ; dans les autres propositions il se limite à employer des adjectifs ou des pronoms neutres pluriels. Il ne semble pas vouloir référer ses seize propositions à quelque sorte de quantités particulières[40]. Ceci rend manifestement impossible leur dmonstration à partir de n'importe quelle prémisse tirée de la tradition classique[41]. Malgré l'appel à la tradition des *Éléments*, ces propositions semblent ainsi fonctionner comme un véritable système axiomatique, définissant implicitement les opérations d'addition, soustraction, multiplication et division et les relations d'égalité et de proportionnalité, en tant que référées à des quantités dont la nature reste indéterminée[42]. On verra tout à l'heure que pour permettre à la zététique de jouer son rôle à l'intérieur de

[39]Klein interprète la première partie de la proposition 14 comme énonçant non pas l'associativité, mais la commutativité de la multiplication [cf. Klein (1934-1936), 323-324]. Le texte de Viète est en effet assez obscur. On pourrait le traduire ainsi : "Facta continuè sub magnitudinibus, vel ex iis continuè orta, esse æqualia quocumque magnitudinem ordine ductio vel adplicatio fiat." La référence à une "succession de grandeurs" me laisse penser que Viète envisage un produit de plus de deux quantités. D'ailleurs, il parle de "l'ordre de la multiplication", et non pas de l'ordre des facteurs.

[40]La distinction précise entre les significations des termes "quantité" et "grandeur" que j'ai faite ci-dessus ne correspond pas, surtout à la Renaissance (quand les frontières entre l'exposition mathématique et la rhétorique étaient loin d'être clairement définies), à une convention terminologique explicitement établie et généralement respectée. L'usage d'un langage stable dans l'exposition mathématique, qui caractérisait déjà les mathématiques grecques, ne s'imposera à nouveau qu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle.

[41]Les grossiers commentaires ajoutés par Vaulézard au texte de Viète, lors de sa traduction française de l'*Isagoge*, [cf. Vaulézard (1630), 16-21], visant soit à rapporter chacune de ces propositions à une notion commune ou à un théorème d'Euclide, soit à en fournir une preuve, ne font que montrer avec plus de clarté cette impossibilité.

[42]Cf. : Klein (1934-1936), 158 ; Mahoney (1980), 143-144 ; et Bos (1993), 189-190. D'après Viète — écrit

la méthode de l'analyse et de la synthèse proposée par Viète, il sera nécessaire d'assigner à ces quantités certaines propriétés. Cependant, ceci ne reviendra guère à en déterminer la nature particulière[43]. On peut donc soutenir que les seize propositions que Viète énonce dans le deuxième chapitre de l'*Isagoge* fournissent — à ce qu'il me semble, pour la première fois dans l'histoire des mathématiques — une base axiomatique pour l'*algèbre*[44]. La structure logique d'une telle axiomatique semble d'ailleurs irréprochable ; si quelques axiomes peuvent nous apparaître à première vue comme superflus, c'est que nous supposons des relations préalables entre addition et soustraction et entre multiplication et division, que Viète ne postule guère[45].

En tant qu'elle ne s'appuie que sur les propositions 2-16, l'*algèbre* de Viète ne peut pourtant que présider aux transformations prescrites par la zététique. Prise dans son ensemble[46], la méthode de Viète présente au moins trois exigences distinctes que cette *algèbre* ne peut pas satisfaire à elle toute seule. D'abord, la zététique ne peut opérer ses transformations si le problème donné n'est pas reformulé par le biais d'un système d'équations et/ou de proportions. Ensuite, celle-ci ne peut prétendre à être considérée comme une partie d'une méthode visant la solution de ce problème si rien ne nous assure que les transformations qu'elle opère ne modifient pas la nature ce dernier. Enfin, le système d'équations et/ou proportions auquel conduit la zététique ne peut servir de point de départ à une construction ou d'une identification des quantités inconnues, qu'à condition qu'il puisse être interprété

Mahoney — "the form of the things denoted by alphabetical letters is purely and simply quantity : not just numbers or line segments, but everything for which it makes sense to say that it is added, subtracted, multiplied, and divided."

[43]Le mérite que les historiens des mathématiques assignent d'habitude à Viète est celui d'avoir introduit une notation littérale, où autant les quantités inconnues que les quantités connues étaient notées par des lettres majuscules (des voyelles pour les inconnues, des consonnes pour les connues). J'insiste plutôt sur le fait que l'axiomatique de Viète fonde une théorie, dont les objets ne sont pas des quantités d'une espèce particulière, mais certaines opérations qu'on peut définir en général sur n'importe quelles quantités. Mahoney [cf. Mahoney (1994), 35-36] a montré comment ces deux aspects de l'œuvre de Viète sont strictement connectés entre eux : "[...] the new notation made it possible to divorce algebra from a style of exposition rooted in examples and verbal algorithms. Viète's literal symbolism *enabled* the mathematician to treat the data of a problem as parameters and hence to treat the problem itself as a general type. [...] The liberation of algebra from the necessity of dealing with particular examples involving specific numerical coefficients had two far-reaching corollaries. First, by eliminating the possibility of actually carrying out combinatory operations involving the parameters, it focused attention on those combinatory operations and hence on the procedures of solution rather than on the solution itself. [...] algebra was transformed from a sophisticated sort of arithmetical problem-solving into the art of mathematical reasoning itself, insofar as that reasoning was based on combinatory operations. [C'est justement ce que je qualifie de passage de l'Algèbre numérique à l'*algèbre*] [...] Second [...], the symbolic solution of equations drew attention to the structure of the solution and hence to the structure of the original equation".

[44]D'après J. Klein, ce sont plutôt les règles de la "logistique spécieuse" que Viète énonce dans le chapitre IV de l'*Isagoge* [cf. Viète (1591*a*), 4-8] qui constituent "le premier système axiomatique moderne" [cf. Klein (1934-1936), 176]. Ces règles ne me semblent pour ma part rien d'autre que des préceptes indiquant l'usage qu'on doit faire des règles fixées dans les chapitre II. S'il y a de l'*algèbre* chez Viète, elle tient à ces règles, et non pas à la "logistique spécieuse", qui en fournit tout au plus un mode d'emploi.

[45]La seule postulation effectivement superflue semble être celle qui est exprimée par la première partie de la proposition 12, qui ne fait qu'énoncer des cas particuliers des propositions 5 et 6. Quant à la deuxième des implications énoncées par cette proposition, elle ne découle des propositions 10 et 11 qu'à condition d'introduire une unité u, fonctionnant comme élément neutre de la multiplication, et de supposer que pour toute quantité c, $c : c = u : u$. Même si le nombre 1 avait certainement pu fonctionner ici comme une unité de la sorte, il reste le fait qu'en l'absence d'une définition explicite de la relation de proportionnalité, il est impossible de s'assurer que $c : c = 1 : 1$, pour toute quantité c.

[46]Cf. Klein (1934-1936), 168-169 et Di Stefano (1992), 157-158.

comme l'expression de certaines relations bien définies parmi les quantités sur lesquelles porte le problème posé[47]. Or, il est clair qu'aucune de ces exigences ne peut être satisfaite si on en reste à la définition implicite des opérations d'addition, soustraction, multiplication et division et des relations d'égalité et proportionnalité qui nous est fournie par les propositions 2-16.

La stratégie que Viète suit pour répondre à ces exigences tient essentiellement à une généralisation des relations qui s'instaurent entre les segments, pris en tant que tels, et les produits de deux ou trois segments, lorsqu'on considère ces produits comme des expressions des rectangles et des parallélépipèdes construits sur ces segments, et qu'on pense la division comme l'opération inverse de la multiplication. Après avoir fourni, dans le deuxième chapitre de l'*Isagoge*, des règles qui permettent de transformer, l'une dans l'autre, des équations et/ou des proportions, il suggère dans le troisième[48] d'interpréter ces équations et proportions comme référées, en général, à des quantités qui s'ordonnent suivant une hiérarchie d'ordres qui communiquent entre eux grâce aux opérations de multiplication et division. Le produit de deux quantités a et b est ainsi défini d'emblée comme une quantité d'un ordre supérieur ou égal autant à l'ordre de a qu'à l'ordre de b. Leur quotient est une quantité d'un ordre inférieur ou égal à l'ordre de a. La loi d'ascension et descente des ordres est celle qui apparaît comme la plus naturelle : si a et b sont respectivement des quantités de l'ordre n et m, alors leur produit est une quantité de l'ordre $n+m$ et leur quotient une quantité de l'ordre $n-m$. Lorsque il s'agit de quantités particulières, dont l'ordre est fixé, Viète parle de quantités "comparées"[49], lorsque il s'agit par contre d'indiquer la variation de l'ordre due à la considération de différentes puissances d'une même quantité, il parle de quantités "scalaires"[50]. Si on suppose que parmi les quantités comparées ou scalaires, il y en a certaines d'ordre zéro, il s'ensuit que ces quantités fonctionnent, vis-à-vis d'autres quantités et par rapport à la multiplication et à la division, comme les nombres fonctionnent, dans le cadre euclidien, vis-à-vis des grandeurs. Malheureusement, Viète est loin d'être explicite sur ce point. Si l'on se permet cette interprétation de sa théorie, il s'ensuit que les quantités comparées et scalaires fonctionnent, dans leur ensemble, comme des quantités quelconques, dont la nature particulière n'est pas déterminée et ne nécessite pas d'être déterminée. Si on exclut les quantités d'ordre zéro, alors on doit plutôt penser les quantités comparées ou scalaires comme des grandeurs, dont la nature particulière n'est pas déterminée et ne nécessite guère d'être déterminée.

Si la multiplication et la division des quantités comparées et scalaires ne subissent ainsi aucune restriction[51], l'analogie entre la hiérarchie infinie des quantités comparées et scalaires et celle finie dans laquelle s'ordonnent les segments, les rectangles et les parallélépipèdes ne peut être maintenue qu'à condition d'introduire des restrictions concernant l'addition et la soustraction. C'est justement le choix de Viète qui suppose que deux quantités ne peuvent être additionnés entre elles et l'une d'elles soustraite de l'autre qu'à condition qu'elles soient du même ordre. Il s'ensuit que certaines des lois fixées par les propositions 2-16 doivent être soumises à leur tour à une restriction. Ceci est en particulier le cas des propositions 3 et

[47] Cf. Bos (1996), 189.
[48] Cf. Viète (1591*a*), 2-4.
[49] Cf. Viète (1591*a*), ch. III, 3.
[50] Cf. Viète (1591*a*), ch. III, 3.
[51] Sauf si l'on veut éviter des quantités dont l'ordre soit inférieur au premier ; pour cela il faut en effet supposer que dans une division l'ordre du diviseur est inférieur à l'ordre du dividende.

4, où l'on doit supposer que c et d sont respectivement du même ordre que a et b, et 8 et 9, où l'on doit supposer que a', b', A' et B' sont respectivement du même ordre que a, b, A et B[52]. À propos des proportions, Viète reste en revanche ambigu : non seulement il ne fournit aucune définition explicite pour la relation de proportionnalité, mais il évite de préciser si l'on doit ou non supposer que les scalaires qui entrent dans une proportion sont deux à deux du même ordre. Si c'était le cas, tant la première partie de la proposition 7 que la proposition 15 devraient être soumises à des restrictions.

Aucune de ces restrictions ne concerne pourtant la nature particulière des quantités considérées. Bien que Viète emploie des termes d'origine géométrique pour se référer autant aux ordres des scalaires (qu'il dénote respectivement par les termes "côté [*latus*]" ou "racine [*radix*], "carré [*quadratum*] ", "cube [*cubus*]", "carré de carré [*quadrato-quadratum*]", "carré en cube [*quadrato-cubus*]"...)[53], qu'à ceux des comparées (qu'il dénote respectivement par les termes "longueur [*longitudo latitudóve*]", "plan [*planum*]", "solide [*solidum*]", "plan-plan [*plano-planum*]", "plan-solide [*planum-solidum*]"...)[54], dont les premiers sont encore en usage aujourd'hui, il est clair que ces termes ne renvoient pas en général à des objets géométriques déterminés. Ainsi, les restrictions dont on vient de parler ne nous empêchent pas, il me semble, de concevoir la théorie de Viète comme une *algèbre*.

Il est pourtant clair qu'au sein de cette *algèbre* on ne peut pas affirmer que certaines quantités jouissent de certaines propriétés. Lorsqu'on dit, dans le cadre de cette *algèbre* que la grandeur x est le résultat d'une certaine opération réalisée sur les grandeurs y et z (ou, dans le cas d'une racine, sur une seule de ces grandeurs), on ne dit rien de ces grandeurs, on se limite à énoncer l'antécédent ou le conséquent d'une implication qui n'a aucune signification en dehors de cette implication. Cette *algèbre* n'est donc pas une théorie des quantités, mais seulement une théorie de certaines opérations sur des quantités, gouvernant des transformations symboliques qui n'expriment que des propriétés de ces opérations. Dans ce sens l'*algèbre* de Viète est structurellement analogue à la théorie des proportions d'Eudoxe. On pourrait exprimer ceci en disant que cette algèbre n'est pas assertive.

Il reste le problème de comprendre comment cette *algèbre* peut être appliquée à la solution des problèmes. La réponse de Viète est double et se trouve implicitement exposée dans le *corpus* des *Zeteticorum libri*. D'abord Viète formule une bonne partie de ces problèmes comme référés en général à des quantités quelconques, dites "côtés". Ensuite, il interprète des problèmes référés à des objets géométriques particuliers comme des cas particuliers de problèmes généraux, en assignant à chaque objet concerné par le problème le rôle d'une quantité scalaire ou comparée déterminée[55]. Mais comment garantir, dans ce dernier cas, que l'application des lois de l'*algèbre*, qui ne dérivent au fond que d'une libre postulation, ne conduise pas à des erreurs et permette de déterminer des équations et/ou des proportions qui peuvent suggérer des constructions effectives des objets dont il est question dans le problème ? Si la fonction de fournir la première de ces garanties tient, dans le plan de Viète, à la poristique, il est clair que celle-ci ne peut pas opérer sans une interprétation particulière

[52] Viète n'explicite cette restriction que par rapport aux propositions 8 et 9, en demandant que a', b', A' et B' soient respectivement "semblables" à a, b, A et B.

[53] Cf. Viète (1591a), ch. III, 3

[54] Cf. Viète (1591a), ch. III, 3

[55] On note pourtant que Viète ne semble pas considérer comme nécessaire d'exprimer un segment par une quantité du premier ordre, une surface par une du deuxième et un solide par une du troisième. L'assignation à chaque objet déterminé d'un rôle dans la hiérarchie des quantités, dépend plutôt de la nature du problème et des relations entre les objets qui sont considérés : cf. par exemple, Viète (1591a), ch. V, prop. 1-3, 8.

des opérations et des relations auxquelles tient l'*algèbre*. À elle toute seule, elle ne peut pas, en outre, fournir la deuxième de ces garanties. Il est donc clair que la seule garantie effective dont la méthode de Viète puisse disposer, lorsqu'elle est appliquée à des problèmes particuliers, n'est au fond que la possibilité de se réclamer des analogies indiquées ci-dessus entre les produits de deux ou trois segments et les rectangles et les parallélépipèdes construits sur ces segments, pour interpréter les produits de deux ou trois quantités pris comme expressions de segments, comme des quantités fonctionnant respectivement comme des expressions des rectangles et des parallélépipèdes construits sur ces segments. Ce n'est pas seulement une garantie qui ne concerne que certains cas particuliers, mais c'est surtout une garantie qui ne se fonde, à son tour, que sur une analogie qu'on ne peut vérifier qu'*a posteriori* et, de plus, à l'intérieur d'un cadre mathématique que le projet de Viète semble avoir comme mission de bouleverser. C'est, selon moi, une des raisons de l'échec du projet de Viète, qui ne trouva, en tant que tel, que de rares héritiers. À cette raison, on doit pourtant, je crois, en ajouter deux autres. D'abord, la pesanteur algorithmique d'une *algèbre* soumise, comme celle de Viète, à une loi des homogènes. Ensuite la difficulté pour des conceptions aussi novatrices que celles de Viète de s'imposer dans une communauté dont les points de vue étaient fort différents. Le commentaire de Vaulézard, autant à l'*Isagoge* qu'aux *Zeteticorum libri*, me semble une preuve manifeste de cette dernière difficulté[56].

1.4 Descartes

Une stratégie essentiellement différente de celle de Viète, visant néanmoins le même objectif — celui de rendre possible une application des lois de l'Algèbre numérique à la solution de problèmes concernant des grandeurs — fut celle suivie par Descartes dans sa *Géométrie*[57]. En vérité, la possibilité de cette application allait de même, d'après Descartes, qu'une large réforme de la géométrie classique, qui, bien que se réclamant des mêmes fondements que la géométrie d'Euclide, visait à en élargir les limites et à introduire, au cœur de celle-ci, une opération de multiplication définie sur les segments, à partir de laquelle la construction d'une Algèbre géométrique fût possible.

1.4.1 Entre *algèbre* et Algèbre des segments

Le point de départ de l'entreprise de Descartes, auquel celui-ci consacre les premières lignes de la *Géométrie*[58], est justement la définition d'une opération de multiplication sur les segments, en fonction de laquelle il est ensuite facile de définir aussi, toujours sur les segments, la division et l'extraction de racines. Ces définitions comportent deux moments distincts et successifs : d'abord Descartes énonce les conditions qu'un segment c doit satisfaire pour que, deux segments a et b étant donnés, on puisse dire du segment c qu'il est, respectivement, le produit de a et b (ce qu'on notera "$ab = c$"), le quotient de a et b (ce qu'on notera "$\frac{a}{b} = c$"), et la racine n-ième de a (ce qu'on notera "$\sqrt[n]{a} = c$"), n étant un nombre naturel non nul quelconque[59] ; ensuite il montre comment ce segment c peut être

[56] Cf. la note (41), ci-dessus.
[57] Cf. Descartes (1637).
[58] Cf. Descartes (1637), 297-298.
[59] En vérité Descartes n'écrit explicitement aucune de ces égalités, et se contente de dire qu'un certain segment est le produit ou le quotient de deux autres, ou une certaine racine d'un autre. Néanmoins, lorsqu'il

construit à partir de la donnée des segments a et b. Le premier moment constitue à lui seul la véritable définition, car le deuxième ne fait qu'indiquer comment celle-ci peut se transformer en une sorte de calcul ; si on éliminait le deuxième moment, on pourrait quand même donner sens aux égalités précédentes, en les pensant comme des abréviations d'autres écritures qui expriment les conditions énoncées lors du premier moment ; simplement on ne saurait pas associer à ces écritures une démarche propre à déterminer, c'est-à-dire (d'après Descartes, qui suit ici fidèlement Euclide) à construire, le segment c dont il est question.

Or, comme ces conditions reviennent à ce qu'une proportion soit satisfaite (et donc, d'après la définition V.5 des *Éléments*, à ce que aient lieu certaines inégalités, déterminées à partir de la disponibilité d'une addition portant sur les termes de cette proportion), il s'ensuit qu'elles peuvent être référées non seulement à des segments, mais aussi à toute autre grandeur[60]. Les définitions de Descartes peuvent donc, bien qu'en contrevenant à la lettre de la *Géométrie*, être étendues à toutes sortes de grandeurs et conduisent même, comme on le verra ci-dessous, à donner un sens à la multiplication et à la division de deux grandeurs de nature distincte, c'est-à-dire non comparables (et donc non additionnables) entre elles. Simplement, lorsqu'elles ne sont pas référées explicitement à des segments, elles ne fournissent pas une base pour une procédure propre à déterminer ou à construire le résultat des opérations qu'elles définissent. Dans l'exposition qui suit, je vais d'emblée me référer à cette généralisation possible qui me semble implicitement acceptée autant par Newton que par la plupart des successeurs de Descartes qui en comprirent et en suivirent l'enseignement.

La clef des définitions de Descartes est l'introduction d'une grandeur unité, c'est-à-dire d'une grandeur qui, sans être pour autant une mesure commune à toutes les grandeurs de la même espèce, fonctionne par hypothèse comme un élément neutre de la multiplication définie sur ces grandeurs. Descartes semble donc avoir compris que les deux propriétés qui distinguent le nombre 1 de tout autre nombre — c'est-à-dire le fait d'être une mesure de tout autre nombre et d'être l'élément neutre de la multiplication — sont essentiellement indépendantes, et que n'importe quelle grandeur d'une espèce considérée peut remplir la même fonction par rapport aux autres grandeurs de cette même espèce. Cette grandeur doit être bien sûr fixée à l'avance, encore que rien n'exige (et ne permette, d'ailleurs) de la déterminer une fois pour toutes, c'est-à-dire de l'identifier une fois pour toutes avec une grandeur particulière de l'espèce considérée. Pour définir sur les grandeurs de n'importe quelle espèce une multiplication structurellement équivalente à la multiplication parmi les nombres, il suffit de supposer qu'une grandeur a été fixée à l'avance et de lui rapporter cette définition. Cette grandeur peut, comme le dit Descartes lui-même, être "prise à discrétion"[61], pourvu qu'elle ne varie pas au cours du traitement d'un même problème[62]. Des choix différents de cette grandeur induiront des résultats différents pour la multiplica-

utilise des notations symboliques, il emploie les mêmes que nous employons aujourd'hui, avec deux seules exceptions : au lieu d'utiliser le signe "=", Descartes utilise le signe "$\propto$" renversé ; il n'utilise pas d'exposant pour indiquer l'ordre d'une racine, en notant avec "$\sqrt{}$" la racine carrée et avec "$\sqrt{C.}$" la racine cubique (celles-ci étant les deux seules racines qui interviennent explicitement dans la *Géométrie*).

[60]Cf. Costabel (1985), 37, d'après lequel "le caractère réel de la réforme cartésienne" consisterait dans l'établissement d'un "code d'écriture fondé sur quatre opérations, deux directes et deux inverses, applicables à des grandeurs [...] finies."

[61]Cf. Descartes (1637), 297.

[62]On remarque ici une analogie entre les grandeurs unités de Descartes et les variables indépendantes dont se servira Newton : cf. ci-dessous, p. 4.1.1.

tion de deux grandeurs fixées, mais la structure relationnelle que la définition en question induira sur l'ensemble de ces grandeurs restera, elle, invariante[63]. Et cela est justement tout ce qui est nécessaire pour pouvoir disposer d'une Algèbre référée à ces grandeurs[64].

Compte tenu de la théorie des proportions d'Eudoxe, la définition de la multiplication choisie par Descartes s'impose comme parfaitement naturelle. Pourvu que a, b et c soient trois grandeurs de la même espèce et u soit la grandeur de cette espèce choisie comme unité[65], cette définition peut être énoncée ainsi :

$$(ab = c) =_{df} (c : a = b : u) \tag{1.10}$$

où la proportion est évidemment définie suivant la définition V.5 des *Éléments*. De cette définition suit, d'après la proposition VI.16 des mêmes *Éléments*, qu'un segment c est le produit de deux autres segments a et b si et seulement si le rectangle $R(a, b)$ est égal au rectangle $R(c, u)$, ce qui fournit une interprétation de l'analogie entre les produits de deux segments et les carrés construits sur ces segments.

La multiplication entre deux grandeurs de la même espèce étant ainsi définie il ne reste, si l'on veut conserver les relations qui lient entre elles les opérations de multiplication, de division et d'extraction de racines dans l'Algèbre numérique qu'à définir ces deux dernières opérations comme des opérations inverses :

$$\left(\frac{a}{b} = c\right) =_{df} (bc = a) \tag{1.11}$$

$$\left(\sqrt[n]{a} = c\right) =_{df} (c^n = a) \tag{1.12}$$

En explicitant ces définitions en termes de proportions on obtient évidemment :

$$\left(\frac{a}{b} = c\right) =_{df} (c : a = u : b) \tag{1.13}$$

$$\left(\sqrt[n]{a} = c\right) =_{df} (u : c = c : x_1 = x_1 : x_2 = \cdots = x_{n-2} : a) \tag{1.14}$$

Ce sont justement les définitions données par Descartes[66]. Ces trois définitions assignent implicitement aux opérations de multiplication, de division et d'extraction de racine référées à

[63]Cf. Jullien (1996), 78.

[64]D'après V. Jullien [cf. Jullien (1996), 72], les éléments de "l'ensemble que Descartes munit de l'opération multiplicative (et de ses opérations dérivées) [...] sont des grandeurs graduées, des 'lignes droites' rapportées à une longueur-unité." S'il est certes vrai que le produit de deux éléments de cet ensemble varie lorsqu'on change d'unité, cela ne signifie pas, je crois, qu'on doive penser un symbole élémentaire, disons "a", indiquant un de ces éléments, comme indiquant des grandeurs différentes pour chaque choix de l'unité. Les symboles élémentaires que Descartes utilise pour indiquer les éléments de cet ensemble me semblent fonctionner comme des noms propres invariants sous le changement de l'unité [cf. à ce propos la remarque de Florimond de Baune dans son commentaire à la *Géométrie*, citée par le même Jullien : cf. Jullien (1996), 75-76 et Florimond de Baume (1649), 111 ; pour le commentaire de Florimond, cf. la section 3.2]. Je reviendrai sur cette question ci-dessous, pp. 52-55.

[65]Descartes dénote en vérité le segment unitaire par la chiffre "1" [cf. Descartes (1637), 300]. Il me semble pourtant clair que dans le contexte de la *Géométrie* ce chiffre dénote directement un segment et non pas sa mesure numérique. C'est pour rendre clair ce point essentiel et éviter toute confusion qui pourrait dériver de la notation de Descartes, que je dénoterai dans la suite les grandeurs unité par la lettre "u".

[66]Cf. Descartes (1637), 297-298 :"[...] ou bien en trouver vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux comme l'vnité est a l'autre, ce qui est le mesme que la Diuision ; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou plusiurs moyennes proportionnelles entre l'vunité & quelque autre ligne, ce qui est le mesme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c".

des grandeurs d'une espèce quelconque un large ensemble de propriétés qu'il serait facile de déduire de propriétés connues des proportions. Ces déductions montreraient alors que toute Algèbre induite par ces définitions sur les grandeurs de n'importe quelle espèce est parfaitement isomorphe à l'Algèbre numérique, une fois qu'on accepte de considérer le quotient de deux nombres et une racine quelconque d'un nombre comme des nombres à leur tour, ce qui, à l'époque de Descartes, ne faisait certes plus de problème[67]. La structure commune de ces Algèbres peut ainsi être prise comme une *algèbre*, car, par le seul fait d'être commune à ces Algèbres, elle satisfait des lois qui ne dépendent pas de la nature des quantités considérées, pourvu qu'on accepte que ces quantités soient toutes d'une même espèce[68].

On pourrait penser qu'étant fondée sur des définitions explicites, l'*algèbre* induite par les définitions précédentes fournisse, à la différence de celle de Viète, un contexte dans lequel il soit possible d'affirmer que certaines quantités jouissent de certaines propriétés, c'est-à-dire que cette *algèbre* est assertive. On pourrait penser, par exemple, que l'écriture "$xy = z$" propre à cette *algèbre* nous dise que la quantité z est la quatrième proportionnelle entre les quantités u, x et y, u étant une unité convenable. Cette dernière spécification, "u étant une unité convenable" nous fait comprendre, cependant, à elle-seule, qu'il n'en est pas ainsi : ou bien les symboles "x", "y" et "z" réfèrent à des quantités d'une nature particulière, et alors on sait déterminer la quantité u convenablement et donner un sens à l'affirmation "la quantité z est la quatrième proportionnelle entre les quantités u, x et y" — mais alors l'écriture "$xy = z$"est une écriture Algébrique, mais non *algébrique* —, ou bien cette dernière affirmation n'a pas, à elle-seule, un sens précis.

La différence entre l'*algèbre* de Viète et celle induite par les définitions de Descartes n'est donc pas que cette dernière est, à la différence de la première, une *algèbre* assertive. Elle fonctionne plutôt comme un code pour reformuler de manière compacte des systèmes de proportions. Pour ne donner qu'un simple exemple, qui n'est pas de Descartes, l'égalité

$$ab^2 = \sqrt[3]{c} \tag{1.15}$$

[67] Sur l'extension du domaine des nombres après Euclide, cf. Sesiano (1999).

[68] Il est de surcroît facile de démontrer que cette dernière limitation n'est pas en fait essentielle pour ce qui est de la multiplication et de la division, car quatre quantités proportionnelles peuvent être de la même espèce seulement deux à deux. Pour se limiter au cas de la multiplication, de là s'ensuit que deux quantités d'espèces différentes, disons a et A, peuvent être multipliées entre elles, le résultat étant alors une quantité b de la même espèce que l'une de ces quantités, disons a. Ceci revient à supposer la proportion $b : a = A : U$, U étant une unité de la même espèce que A. Conformément à la définition de la division (pourvu qu'on se donne la liberté d'inverser, dans le *definiens* de (1.13) a et u, cette même quantité b peut pourtant être conçue comme étant égale au quotient de deux quantités de la même espèce, disons α et β, d'une espèce différente que b. Ceci revient à supposer la proportion $\alpha : \beta = b : u$, u étant une unité de la même espèce que b. On aura alors $aA = b = \frac{\alpha}{\beta}$ et donc $\beta\,(aA) = \alpha$, et de là, grâce à l'associativité de la multiplication, $(\beta a)\,A = \alpha$. Comme à son tour le produit βa peut être pris comme une quantité c de la même espèce que a, mais d'une espèce autre que β, il s'ensuit l'égalité $cA = \alpha$, où les quantités c, A et α sont toutes d'espèces différentes. Les Algèbres induites par les définitions de Descartes peuvent donc se combiner entre elles pour produire des égalités telles que celle-ci, auxquelles il sera donc facile de donner un sens précis en se réclamant d'un système convenable de proportions. L'*algèbre* qui en résulte n'est donc à la rigueur limitée par la condition de ne traiter qu'avec des quantités de la même espèce que pour ce qui est de l'addition et de la soustraction. Cela était déjà le cas de l'*algèbre* de Viète (les ordres fonctionnant dans ce cas comme des espèces). Il reste cependant que dans l'*algèbre* de Descartes la multiplication et la division ne conduisent pas nécessairement d'une espèce à une autre, quelle que soit la nature des quantités qui y interviennent, et, si elles le font, elles peuvent conduire de toute espèce de quantités à toute autre espèce de quantités.

code le système de proportions

$$\begin{cases} B : b = b : u & \left[b^2 = B\right] \\ C : a = B : u & [aB = C] \\ A : C = C : u & \left[C^2 = A\right] \\ u : C = A : c & [\sqrt[3]{c} = C] \end{cases} \tag{1.16}$$

c'est-à-dire qu'elle en fournit une reformulation compacte. Elle ne nous dit donc quelque chose des quantités a, b et c qu'à condition que ce même système de proportion nous dise quelque chose de ces quantités, et cela n'a lieu que si les symboles "a", "b" et "c" réfèrent à des quantités d'une nature particulière, ce qui fait de cette écriture une écriture Algébrique et non *algébrique*. De même que celle de Viète, l'*algèbre* induite par les définitions de Descartes n'est donc qu'une théorie de certaines opérations sur des quantités, gouvernant des transformations symboliques qui n'expriment que des propriétés de ces opérations.

Ceci n'est pourtant pas le cas des Algèbres particulières dont cette *algèbre* est la structure commune, car une proportion, lorsqu'elle est référée à des quantités d'une espèce particulière, dit quelque chose de ces quantités. En particulier elle nous dit qu'elles satisfont certaines conditions définies en termes de l'opération d'addition, de la relation d'égalité, et de la relation d'ordre qui sont nécessairement définies explicitement sur ces grandeurs. Tout Algèbre particulière qui satisfait les définitions de Descartes est donc assertive.

Ceci ne signifie pourtant pas que dans ces Algèbres on sache toujours déterminer (c'est-à-dire construire, calculer ou même seulement identifier) les résultats de toute opération portant sur des quantités connues. Pour ne donner qu'un exemple, il est possible d'imaginer que tout en sachant parfaitement ce que signifie qu'une certaine quantité c est le produit des quantités a et b, on ne sache pas déterminer c lorsque a et b sont données. Je dirai qu'une Algèbre où cette détermination est toujours possible est non seulement assertive, mais aussi déterminative. Or il suffit d'observer que Descartes, comme Euclide, ne dispose d'aucun critère général propre à établir si quatre quantités d'une espèce déterminée mais quelconque sont ou non en proportion pour conclure que les Algèbres particulières satisfaisant les définitions précédentes ne sont pas, en général, déterminatives.

Néanmoins, ceci n'est justement que le cas général. Deux exceptions déterminent deux classes privilégiées de quantités : les nombres et les segments[69]. Pour ce qui est des nombres, ceci est trivial, car les lois connues de l'arithmétique enseignent à calculer, au moins avec une approximation quelconque (si on suppose qu'un nombre est déterminé seulement lorsque on en connaît l'expression décimale exacte) le résultat de toute opération Algébrique portant sur des nombres connus. Pour ce qui est des segments, qui sont d'ailleurs, comme je l'ai observé ci-dessus, les seuls grandeurs auxquels Descartes se réfère explicitement, la question est de loin plus complexe. Il est donc nécessaire de la considérer en détail.

Pour démontrer que l'Algèbre des segments induite par les définitions précédentes est déterminative, il faut indiquer des procédures qui permettent de construire un et un seul

[69]Comme on l'a déjà noté, le terme "nombre" ne peut pas conserver dans ce contexte la même signification qu'il avait chez Euclide. Cela ne signifie pas pourtant qu'on doive l'entendre comme se référant aux nombres réels, dans notre sens. Il renvoie plutôt au résultat de l'application de n'importe quelle série (finie) d'opérations arithmétiques aux nombres euclidiens (c'est-à-dire aux nombres entiers positifs), pourvu que cette série ne prévoie jamais la soustraction d'un nombre plus grand d'un autre plus petit : au sens moderne, un nombre n'est donc ici qu'un nombre (réel) algébrique positif.

segment qui résulte respectivement de la multiplication de deux segments donnés, de la division d'un segment donné par un autre, et de l'extraction d'une racine d'un ordre quelconque d'un segment donné. Ceci est justement ce que Descartes fait dans la *Géométrie*, tout de suite après avoir donné les définitions précédentes[70], pour la multiplication, la division et l'extraction des racines d'un ordre différent de 2^n (où n est un nombre entier positif quelconque). Si on reste à ces cas, cette preuve est en effet fort aisée.

Pour ce qui est de la multiplication et de la division, il suffit de se réclamer de la proposition VI.2 des *Éléments* (le théorème de Thalès, comme l'on dit aujourd'hui). En effet si trois segments a, b et u sont donnés, le dernier ayant été choisi comme l'unité, et que u est superposé à a de sorte qu'une extrémité de u coïncide avec une extrémité de a (fig. 1), et que b est placé par rapport à a, de sorte que cette même extrémité de a coïncide aussi avec une extrémité de b, les deux segments a et b formant entre eux un angle non nul quelconque, ce théorème nous assure qu'il suffit de joindre les deux extrémités libres de u et de b et de tirer de l'extrémité libre de a une parallèle au segment ainsi construit jusqu'à rencontrer soit b soit sa prolongation, pour obtenir un segment c, allant de l'extrémité commune de a, b et u jusqu'à l'intersection ainsi déterminée, segment qui est le quatrième proportionnel entre u, a et b et satisfait ainsi la condition $ab = c$. En revanche, si, étant donnée la même configuration des segments a, b et u (fig. 2), on joint d'abord les extrémités libres de a et b et on tire ensuite une parallèle au segment ainsi construit de l'extrémité libre de u, jusqu'à rencontrer soit b soit sa prolongation, on obtient, toujours par le même théorème, un segment c, allant, comme ci-dessus, de l'extrémité commune de a, b et u jusqu'à l'intersection ainsi déterminée, segment qui est le quatrième proportionnel entre b, a et u et qui satisfait ainsi la condition $\frac{a}{b} = c$.

Pour ce qui est de la racine carrée, la situation n'est en rien plus compliquée, car il suffit de se réclamer alors de la proposition VI.13. des *Éléments* (ou théorème d'Euclide, comme l'on dit aujourd'hui). Si deux segments a et u sont donnés, le deuxième ayant été choisi comme l'unité, et que u est ajouté à a, formant un nouveau segment $b = a + u$ (fig. 3), et qu'il est tracé un demi-cercle dont b est le diamètre, ce théorème nous assure que le segment c, perpendiculaire à b, allant de l'extrémité commune de a et u jusqu'à ce demi-cercle, est moyenne proportionnelle entre u et a et satisfait alors la condition $\sqrt{a} = c$. En ayant construit de cette manière la racine carrée d'un segment a, il est ensuite aisé de construire, toujours de cette manière, la racine carrée de cette racine carrée, ce qui revient évidemment à construire la racine quatrième de a. En réitérant ce procédé, il est facile de construire toutes les racines d'ordre 2^n $(n = 1, 2, 3, ...)$ de n'importe quel segment a.

Il reste le cas plus difficile, celui des racines d'un ordre différent de 2^n. Au lieu d'aborder ce cas explicitement, Descartes rassure son lecteur par un appel à la suite du traité[71] :

> Ie ne dis rien icy de la racine cubique ny des autres, a cause que i'en parleray plus commodement cy aprés.

De cette manière, il cache pourtant le point essentiel : les racines d'un segment quelconque d'un ordre différent de 2^n ne sont pas constructibles avec les moyens d'Euclide, c'est-à-dire, comme on le dit aujourd'hui, à la suite du même Descartes, à la règle et au compas. Il s'ensuit que, dans les limites étroites de cette géométrie l'Algèbre des segments de Descartes n'est pas déterminative, ou si l'on veut qu'elle ne l'est que partiellement. C'est justement

[70] Cf. Descartes (1637), 298.
[71] Cf. Descartes (1637), 298.

pour dépasser cette limitation que Descartes propose d'élargir les moyens constructifs admis par la géométrie d'Euclide.

Cet élargissement, dont les conséquences seront fondamentales pour le développement du projet de Descartes, ne tient ni à la simple jonction de quelques postulats nouveaux, ni à la négation du principe essentiel sur lequel était fondée la limitation euclidienne. En acceptant l'idée que seules les constructions se réduisant aux actes de tracer un segment entre deux points donnés (premier postulat d'Euclide), de prolonger un segment donné (deuxième postulat d'Euclide), de tracer un cercle sur un rayon donné (troisième postulat d'Euclide) sont acceptables, Descartes ajoute que ces moyens doivent pouvoir être conçus comme des bases pour des constructions récursivement réglées, c'est-à-dire que les objets géométriques euclidiens doivent pouvoir être combinés de manière à construire des systèmes mobiles qui engendrent de nouveaux objets, et que ces nouveaux objets peuvent à leur tour être combinés entre eux, ou avec les objets euclidiens, de manière à constituer d'autres systèmes mobiles qui engendrent d'autres objets.

Pour comprendre l'idée de Descartes, considérons le troisième postulat d'Euclide : celui-ci nous garantit la constructivité d'une courbe (le cercle) qui peut être pensée comme la trajectoire d'un point fixé sur un segment qui est à son tour censé tourner autour d'un point fixe. Le système constitué par le segment tournant, par le point fixe sur ce segment et par le centre de rotation peut être pensé comme un outil idéal qui peut être soumis à différentes régulations (le point fixe peut être placé où l'on veut sur le segment, par rapport au centre de rotation), mais qui, une fois réglé d'une certaine manière, décrit par son mouvement une courbe qui est toujours la même quelles que soient les caractéristiques cinématiques de ce mouvement : la rotation peut être rapide ou lente, uniforme ou accélérée, continue ou saccadée, le cercle qui en résultera sera toujours le même. Cela dépend du fait que le système mobile qui décrit ce cercle n'a qu'un seul degré de liberté. Or, si, suivant les clauses constructives d'Euclide, c'est-à-dire à la règle et au compas, on peut parvenir à construire d'autres systèmes semblables[72], c'est-à-dire des systèmes mobiles constitués par des segments et de cercles placés les uns par rapport aux autres d'une certaine manière, soumis dans leur ensemble à un seul degré de liberté, et que le mouvement de ce système engendre des courbes, ainsi que la rotation d'un compas autour d'un point fixe engendre un cercle, alors ces courbes sont constructibles au même droit que le cercle l'est. En étant constructibles, ces courbes doivent pouvoir à leur intervenir d'autres constructions, au même droit que les droites et les cercles, et ceci de deux manières distinctes : d'abord, elles peuvent être prises comme des donnés et employées pour déterminer des points par des intersections convenables avec des droites, des cercles ou d'autres courbes constructibles ; ensuite, elles peuvent constituer des éléments de nouveaux systèmes mobiles soumis à un seul degré de liberté dont le mouvement engendre des nouvelles courbes.

En général, cette idée semble claire, mais il est fort difficile de la traduire dans une clause récursive énoncée de manière à ne pas laisser d'espace pour des mésententes possibles. Descartes ne l'énonce d'ailleurs qu'implicitement en se limitant à déclarer qu' "il n'est besoin de rien supposer, pour tracer toutes les lignes courbes que ie pretens icy d'introduire, sinon que deux ou plusieurs lignes puissent estre meués l'vne par l'autre, & que leurs intersections en marquent d'autres", et que "on n'en [la géométrie] doit pas plutost exclure les lignes les plus composées que les plus simples, pourvu qu'on les puisse imaginer estre des-

[72]Cf. Grosholz (1980), 160.

crites par vn mouuement continu, ou par plusieurs qui s'entresuiuent & dont les derniers soient entièrement réglés par ce qui les precedent"[73], et à avancer des exemples. Ces sont justement ces exemples qui suggèrent l'interprétation précédente. Cette interprétation est d'ailleurs confirmée par la terminologie choisie par Descartes qui appelle "géométriques" les courbes qu'il considère comme légitimement constructibles, et "mécaniques" celles qui ne peuvent pas être construites conformément à son critère, en soulignant ainsi implicitement que la construction de ces courbes demanderait l'intervention de mouvements dont la nature mécanique particulière (en particulier la vitesse) influe sur la nature de la courbe. Un exemple parlant est celui de la spirale : si l'on considère celle-ci comme la trace d'un point qui avance sur un segment tournant, alors la nature de cette courbe dépend de la relation entre les vitesses rectilignes et angulaires respectivement d'avancement de ce point et de rotation de ce segment [Note A] ; cette courbe est donc, à la lettre, une courbe mécanique.

Bien qu'il soit loin d'être clair en général, ce critère de constructibilité — qu'on pourra qualifier de "critère de constructibilité par règle, compas et réitération" — permet de décider dans de nombreux cas particuliers si une certaine courbe, est ou n'est pas une courbe géométrique.

Le cas qui intéresse la construction des racines d'un ordre différent de 2^n est parmi ceux-ci. Descartes[74] imagine une nouvelle sorte de compas constitué par deux droites XZ et XY (fig. 4) avec une extrémité commune qui se renferment l'une sur l'autre, sur lesquelles on prend deux successions de points, A_0, A_1, A_2, ...et B_0, B_1, B_2,... tels que : $\mathsf{XA}_0 = \mathsf{XB}_0 = u$; les points A_i sont les pieds des perpendiculaires à la droite XY tirées des points B_{i-1} ; les points B_i sont les pieds des perpendiculaires à la droite XZ tirées des points A_i $(i = 1, 2, ...)$. Le compas étant complètement fermé sur XZ, tous ces points coïncident avec A_0. Lorsqu'il s'ouvre, les points B_i $(i = 1, 2, ...)$ tracent des courbes $\mathcal{C}_i$ dont la construction satisfait clairement le critère de constructibilité par règle, compas et réitération. Ces courbes sont donc des courbes géométriques.

Or, comme les triangles $\mathsf{XB}_{i-1}\mathsf{A}_i$ et $\mathsf{XB}_i\mathsf{A}_i$ $(i = 1, 2, ...)$ sont tous rectangles et semblables entre eux, il s'ensuit selon les définitions (1.10) et (1.13) que si l'on pose $\mathsf{XA}_1 = x$, on tire successivement : $\mathsf{XB}_i = x^{2i}$ et $\mathsf{XA}_i = x^{2i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Ainsi, si l'on veut construire une racine impaire $\sqrt[2i-1]{a}$ d'un segment a $(i = 2, 3, \ldots)$, il suffit de prendre un segment $\mathsf{OB} = a$ (fig.5), de reporter sur ce segment un autre segment $\mathsf{OA} = u$, de tracer de A la courbe $\mathcal{C}_i$, et de B le segment BC perpendiculaire à OB et coupant cette courbe en C, de joindre les points C et O par le segment CO, de déterminer sur ce segment le point D, où ce segment coupe le cercle de rayon u et de centre O, et finalement de baisser de D la perpendiculaire DH à OC. Si on pose $\mathsf{OH} = x$, on aura en effet $\mathsf{OB} = a = x^{2i-1}$ et donc $x = \sqrt[2i-1]{a}$.

De cette manière on construit toutes les racines d'ordre impair de tout segment a, et donc *a fortiori* toutes les racines de tout segment a dont l'ordre est donné par un nombre premier différent de 2. Comme l'on sait déjà construire la racine carrée de tout segment a, il suffit, quel que soit le nombre entier positif m, de le décomposer en facteurs premiers et d'appliquer successivement les procédés pour construire les racines dont l'ordre est donné par ces facteurs pour construire la racine m-ième de tout segment a.

Il suffit donc d'accepter que les courbes $\mathcal{C}_i$ soient constructibles pour en conclure que toute racine d'un segment donné est à son tour constructible. Il s'ensuite que dans la

[73] Cf. Descartes (1637), 316.
[74] Cf. Descartes (1637), 317-319.

géométrie de Descartes, dont les limites sont fixées par le critère de constructiblité par règle, compas et réitération, l'Algèbre des segments induite par les définitions (1.10), (1.11) et (1.12) de Descartes est déterminative. C'est justement ce qu'il s'agissait de démontrer.

* * *

Avant d'en venir à l'usage que Descartes fait de son Algèbre des segments, pour promouvoir une réforme de la géométrie euclidienne, il convient de comparer cette Algèbre avec l' "interprétation géométrique" des opérations arithmétiques[75] donnée par Bombelli dans le quatrième livre de l'*Algebra.* Ceci nous permettra de mieux comprendre mieux la nouveauté essentielle de l'approche de Descartes.

Dans son édition du traité de Bombelli, E. Bortolotti[76] présente ces interprétations, avec d'autres constructions de Bombelli, sous le titre d' "*Algebra linearia*"[77]. En réalité, plus que d'une Algèbre, à mon sens, il s'agit d'un ensemble de préceptes indiquant des procédures possibles pour parvenir à une modélisation géométrique des résultats de l'Algèbre arithmétique. Parmi ceux-ci, les trois premiers, concernant respectivement l'addition, la soustraction et la multiplication de segments[78], n'ont rien d'original, mis à part le fait que Bombelli prévoit la possibilité de soustraire un segment plus grand d'un segment plus petit, et d'obtenir ainsi un segment négatif. En particulier, la multiplication de deux segments est identifiée avec (ou interprétée comme) la construction du rectangle dont ces segments sont les côtés. La situation change pour ce qui est de la division et de l'extraction des racines carrée et cubique (les seules dont traite Bombelli), car, sans se préoccuper de casser de ce fait le lien qui lie dans l'Algèbre numérique ces opérations avec la multiplication, Bombelli présente des constructions qui identifient le quotient de deux segments et les racines carrée et cubique d'un segment avec d'autres segments. Cela est rendu possible, comme chez Descartes, par l'introduction d'un segment unitaire[79]. Cependant, loin de fonctionner comme élément neutre d'une structure multiplicative, ce segment ne fonctionne ici que comme une mesure commune de deux ou plusieurs segments. Il vaut la peine, je crois — pour faire ressortir, par opposition, la nature de l'Algèbre des segments de Descartes — d'expliciter cette différence, en discutant l'interprétation géométrique de la division que Bombelli présente. Le cas de l'extraction de racine est parfaitement analogue, et on peut éviter ici de le prendre en compte.

D'après Bombelli[80], la division de deux segments n'est possible qu'à condition que ces segments aient une "mesure commune". Si h est cette mesure commune, et qu'on doit diviser le segment a par le segment b, alors il suffit, nous dit Bombelli, de former un angle quelconque entre ces segments (fig. 6), d'ajouter à b le segment h, de tirer un segment qui joint les extrémités non coïncidentes de a et b, de tracer ensuite une droite parallèle à ce segment de l'extrémité de h, et de prolonger a jusqu'à rencontrer cette parallèle. Le segment c ainsi trouvé est le quotient cherché.

[75]Cf. Giusti (1992), 305 ; cf. aussi Freguglia (1991), 205 qui parle plutôt de "construction ou représentation géométrique" de ces opérations.
[76]Cf. la note 25, ci-dessus.
[77]Cf. Bombelli (AB IV,V), 55, et 68, pour l'expression de Bombelli.
[78]Cf. Bombelli (AB IV,V), 65-66.
[79]Cf. Bombelli (AB IV, V), 66, note 3 et, pour une discussion des constructions de Bombelli, Giusti (1992), 305-308 et 312 et Freguglia (1989), 85-87 et (1991), 205-207.
[80]Cf. Bombelli (AB IV, V), 66-68.

Pour comprendre cette construction, il suffit d'observer que, d'après le théorème de Thalès, on a la proportion $a : b = a + c : b + h$ et donc $a : b = c : h$; si on suppose que $a = nh$ et $b = mh$, il s'ensuit que $a : b = n : m = c : h$. Le quotient c de a et b est donc le segment qui a avec h le même rapport que a a avec b. Après avoir donné sa construction, Bombelli l'applique à la solution d'un problème simple. Il imagine que a et h sont les deux côtés d'un rectangle donné, et qu'on veut construire un rectangle égal à celui-ci sur le segment b donné. Il suffira, nous dit Bombelli, de déterminer c comme ci-dessus, pour avoir le deuxième côté de ce rectangle. Le quotient c de a et b est donc le côté du rectangle construit sur b qui est égal au rectangle construit sur a et la mesure commune h. Si on pose, en suivant l'interprétation de la multiplication proposée par Bombelli, $R(a, h) = ah$ et $R(b, c) = bc$, on aura $ah = bc$ et donc $c = \frac{a}{b}h$. S'il est possible de poser $h = 1$, on aura $a = n$ et $b = m$ et il s'ensuit que c s'identifie avec un nombre q, tel que $q = \frac{n}{m}$. On comprend alors que la condition qui demande que h soit la mesure commune de a et b — qui n'est nullement nécessaire pour donner sens à la proportion qui définit c — sert à permettre d'identifier les segments a, b et h avec trois nombres entiers, dont le troisième est 1. Bombelli n'explicite pas cette position qui semble pourtant largement implicite dans son argument[81]. Il est néanmoins clair que si h fonctionnait comme un élément neutre, la condition qui demande que h soit la mesure commune de a et b n'aurait aucune fonction dans cet argument. C'est donc la logique interne de ce dernier qui nous révèle ce que Bombelli cherche : une construction fournissant un modèle géométrique d'une relation numérique telle que $q = \frac{n}{m}$. Le segment h n'est qu'un segment qui participe à ce modèle et qu'on a le droit de prendre comme une représentation du seul élément neutre dont il est ici question, le nombre 1, c'est-à-dire l'élément neutre de la multiplication entre nombres. On comprend alors que ce qui est essentiellement nouveau chez Descartes est l'introduction d'un autre élément neutre, celui de la multiplication entre segments, qui est absent de l'argument de Bombelli, et qui est autre chose qu'un segment qu'on prend comme une représentation du nombre 1, lors de la construction d'un modèle géométrique pour un système de relations numériques, ou *viceversa*, d'un modèle numérique pour un système de relations géométriques.

* * *

On revient maintenant à l'Algèbre des segments de Descartes. On peut résumer la situation en disant que Descartes dispose de deux Algèbres assertives et déterminatives isomorphes, celle numérique et celle des segments, et d'une *algèbre* non assertive (et *a fortiori*

[81] L'identification explicite d'un segment avec le nombre 1, au cours d'une représentation géométrique d'une relation numérique, ou *viceversa* d'une représentation numérique d'une relation géométrique, est courante dans l'*Algebra*. Un exemple est donné par le problème : "Trovare una linea che sia in proportione alla *.c.* come è la *.a.* alla *.b.*", ou bien, trouver un segment x tel que $c : x = a : b$, a, b, c étant des segments donnés [cf. Bombelli (AB IV,V), 151-152]. Ayant donné la construction de ce segment, qui se réclame évidemment du théorème de Thalès, Bombelli donne un exemple numérique, en posant : $a = 1$, $b = 6$ et $c = 8$, ce qui donne évidemment $x = 48$. Il pourrait sembler que Bombelli, en contredisant sa première interprétation de la multiplication entre segments, définisse ici la multiplication de deux segments comme le fera Descartes, par l'introduction d'un segment unitaire. Si on pensait cela, on ne pourrait pourtant que rester étonné face à la réplique du même problème, que Bombelli ajoute immédiatement aprés : "Trovare una linea, che sia in proportione alla *.d.* come è la *.b.* alla *.c.*", [cf. Bombelli (AB IV,V), 151-152]. Ici l'exemplification numérique utilise les positions $c = 2$, $b = 4$ et $d = 10$, qui donnent évidemment $x = 5$. On comprend alors que la position $a = 1$ n'est qu'une identification numérique comme une autre et qu'elle ne peut pas être confondue avec l'introduction d'un segment unité fonctionnant, comme chez Descartes, comme l'élément neutre d'une structure multiplicative.

non déterminative) qui relève de la structure commune de ces Algèbres. Mais on peut dire aussi qu'il dispose d'une *algèbre* non assertive dont on connaît deux interprétations donnant lieu à autant d'Algèbres assertive et déterminatives, l'Algèbre numérique et l'Algèbre des segments.

1.4.2 Entre courbes et équations

À coté de ces Algèbres assertives et déterminatives, Descartes dispose implicitement d'autres Algèbres assertives mais non déterminatives, une pour toute espèce de grandeurs qu'il considère. Pourtant, n'étant pas déterminatives, ces Algèbres auraient pu lui servir tout au plus pour exprimer des systèmes de relations géométriques déjà déterminés, mais nullement pour décrire, en termes compactes, des constructions à réaliser. Imaginons par exemple qu'on sache déjà qu'un polygone donné B est quatrième proportionnel relativement aux polygones a, b et A. On pourrait alors exprimer ceci dans le langage de l'Algèbre des polygones en écrivant l'égalité $aB = bA$. En revanche si le polygone B est inconnu, cette égalité nous dit, certes, que B est quatrième proportionnel relativement aux polygones a, b et A, mais elle ne nous fournit aucune indication pour construire B à partir de la donnée de a, b et A. Il s'ensuit que ces Algèbres assertives, mais non déterminatives, ne peuvent jouer aucun rôle actif dans une preuve géométrique et donc dans la solution d'un problème géométrique. Il est de même pour l'Algèbre numérique, bien que cette Algèbre soit déterminative. La raison est claire : même si on suppose pouvoir assigner un nombre à toute grandeur connue concernée par un certain problème, de telle sorte que les relations entre ces nombres correspondent aux relations connues entre ces grandeurs, et que cela nous permette de calculer le nombre qui est alors censé être assigné à une grandeur inconnue, ceci ne nous fournit pas encore une indication pour construire, ou déterminer de quelque manière que ce soit, cette dernière grandeur. Pour dépasser cette difficulté, il faut disposer, comme nous, d'une théorie de la mesure, propre à associer un nombre réel à toute grandeur de n'importe quelle espèce (et non pas seulement à quelque grandeur connue) et, *viceversa*, à tout nombre réel une grandeur de cette même espèce. Et Descartes ne disposait certes pas de ceci.

Si les grandeurs en question n'étaient que des segments, Descartes aurait certes pu exploiter l'isomorphisme de l'Algèbre numérique et de l'Algèbre des segments pour parvenir à construire un segment auquel est censé être associé un certain nombre, pourvu que ce nombre puisse être conçu comme le résultat d'une opération Algébrique portant sur des nombres associés à des segments connus. Il lui aurait suffit pour cela d'interpréter cette opération numérique comme une opération sur les segments et de construire le segment résultat. On comprend pourtant qu'en opérant de cette manière on ne fait qu'employer l'Algèbre numérique comme un *alias* essentiellement inutile de l'Algèbre des segments. Ce n'est que cette dernière Algèbre qui est effectivement appliquée dans la solution du problème géométrique dont il est question. C'est exactement cette application de l'Algèbre des segments à la solution des problèmes géométriques portant sur des segments qui constitue le cœur de la nouvelle géométrie cartésienne.

Or, il est clair que cette application est rendue possible par deux circonstances essentiellement distinctes. Le caractère déterminatif de l'Algèbre des segments permet d'interpréter toute expression Algébrique propre à cette Algèbre comme l'expression raccourcie d'une construction. Toute expression Algébrique propre à cette Algèbre exprime donc un segment à construire en indiquant de manière compacte la construction qui permet d'obtenir ce segment. En revanche, rien ne nous autorise à supposer en général qu'un segment inconnu, dont on sait qu'il est lié à d'autres segments donnés par une certaine relation, puisse être exprimé par une expression Algébrique propre à l'Algèbre des segments. Il est possible, en effet, que cette relation ne puisse pas être exprimée par les moyens de cette Algèbre. Cette dernière ne peut donc être appliquée qu'à la solution d'un nombre restreint de problèmes géométriques concernant des segments. Pour pouvoir maintenir que tout problème géométrique peut être résolu à l'aide de sa nouvelle Algèbre des segments, Descartes doit donc limiter l'extension des problèmes géométriques. Pour que cette limitation ne ressemble pas à une mutilation inacceptable, il doit pourtant trouver les moyens pour réduire le plus grand nombre de problèmes géométriques à des problèmes concernant des segments[82], dont la relation se laisse exprimer dans le formalisme de l'Algèbre des segments.

La clef de cette réduction est l'introduction des coordonnées rectilignes, dites depuis "cartésiennes". Celles-ci ne fonctionnent pourtant que comme un outil qui ne peut pas agir tout seul. Ce qui permet à cet outil de jouer le rôle central qu'il joue dans la géométrie de Descartes c'est la conception d'une forme géométrique, en particulier d'une courbe, comme un lieu, c'est-à-dire comme un système de points respectant une certaine condition.

Prises en tant que telles, ces deux idées — celle de référer une courbe à un repère constitué par un axe, un point sur cet axe et un angle fixe, et celle de penser une courbe comme un lieu géométrique — étaient là bien avant que Descartes décide de s'en servir. Déjà Apollonius avait eu recours à la possibilité d'indiquer les propriétés d'une conique par le biais d'une proportion qui exprimait une condition satisfaite par tout point de cette conique, par rapport à un repère fonctionnant comme un système de coordonnées cartésiennes. Il avait par exemple montré[83] que dans une parabole quelconque, toute corde b, parallèle à la tangente au sommet, découpe sur le diamètre un segment a tel que

$$a : b = b : k \tag{1.17}$$

[82]Dans son *Cartesian Method and the Problem of Reduction*, E. Grosholz a observé une différence entre le point de départ des *Éléments* et celui de la *Géométrie* [cf. Grosholz (1991), 19] : "Euclid choses as his starting-point the kinds of things which his geometry treats and gives an exposition of them before he moves on to anything else [...]. By contrast, Descartes [...] stipulates that geometry begins with one kind of thing, straight line segments." Évidemment Descartes n'a pas besoin de définir ce qu'Euclide a défini pour lui. Sa géométrie s'enracine dans la géométrie d'Euclide et y choisit ses points de départ. Après s'être étonné de cette différence, Grosholz [cf. Grosholz (1991), 19] se demande pourquoi Descartes aurait choisit les segments, et non pas les points, les surfaces, ou les angles, comme son point de départ, et elle répond ainsi [cf. Grosholz (1991), 21-21] : "Since his algebra is the algebra of arithmetic, and his treatment of proportion derives from the medieval tradition which treats terms and ratios as numbers, he needs geometric items which can stand as proxies for numbers, and line segments are the likeliest candidates. Points do not have the requisite variability [*sic*], surfaces extend in too many directions [*sic*], angles are curiously incomplete [*sic*] and curves are too difficult to mesure because they cannot measure themselves. [...] Descartes thus gives a startlingly minimal account of his starting-points. His method say, start with what is simple and easy to understand, that is, what intuition can and must assent to." Voici un exemple qui montre comment on peut passer à côté des choses mathématiquement les plus évidentes lorsqu'on est guidé par la volonté de prouver des thèses philosophiques d'ordre général. Les segments ne sont pas le point de départ de la géométrie de Descartes, ce sont les grandeurs qui permettent de définir toute autre grandeur. Et si c'est ainsi ce n'est pas parce qu'il sont "simples et aisés à comprendre" ou qu'ils sont "ce que l'intuition peut et doit accepter". C'est plutôt parce que l'Algèbre des segments est déterminative, à la différence de celles hypothétiques des polygones ou des angles (et je n'ose pas penser à une Algèbre des points ou des courbes).

[83]Cf. *Coniques*, I, 11 : Apollonius (CH), I, 36-42.

k étant un segment constant, et il s'était ensuite appuyé sur cette propriété d'une parabole pour en déterminer d'autres. Quant à la conception d'une courbe comme un lieu géométrique, Descartes ne fit que l'emprunter à la tradition de l'analyse.

Ce serait pourtant une source d'erreur de ne pas voir la nouveauté essentielle renfermée dans la proposition de Descartes. D'abord, si la géométrie classique, et la pratique de l'analyse qui l'accompagnait, soit explicitement soit implicitement, avaient enseigné, depuis Euclide, et même avant lui, à traiter des objets dont on savait tout simplement qu'il satisfaisaient à une certaine condition, comme s'ils eussent été donnés, ceci ne visait qu'à déterminer les conditions propre à rendre possible la solution d'un problème particulier : l'analyse n'était qu'une manière de se préparer à la synthèse. Ainsi, lorsque une courbe était définie comme un lieu, même lorsque ce lieu était exprimé par un système de proportions et non seulement indiqué discursivement, cette définition et donc ce système n'était conçus que comme des outils pour la solution d'un problème particulier, comme des expressions provisoires de cette courbe, dont le rôle ne dépassait pas les limites du problème. Quant à l'usage chez Apollonius d'un repère fonctionnant comme un système de coordonnées cartésiennes, il faut observer que pour ce dernier la courbe est donnée avant le choix de ce repère, dont les éléments sont d'ailleurs constitués par des éléments constitutifs de cette même courbe.

En combinant ces idées anciennes, Descartes semble dépasser l'une et l'autre de ces limites. On ne doit certes pas confondre, au sein de la géométrie de Descartes, la donation d'une condition exprimant une courbe avec la donation de la courbe même, mais ce serait aussi un erreur de ne pas voir que l'usage des coordonnées cartésiennes, et la conception d'une courbe comme un lieu référé à ces coordonnées amène Descartes à définir une courbe en général, et non pas simplement comme solution d'un problème particulier. S'il ne récuse pas la pratique consistant à construire un système de coordonnées à partir d'une courbe déjà donnée, il réfère, en effet, à un tel système aussi des courbes dont il ne fait que supposer qu'elles soient données[84]. C'est le formalisme de la nouvelle Algèbre des segments, qui le pousse à cela, car ce formalisme permet d'exprimer cette condition par des équations interprétées dans une telle Algèbre et de traiter ces équations comme des définitions souples et universelles d'une courbe. Il s'agit, comme on le sait, d'équations dans lesquelles interviennent deux symboles[85] exprimant des segments indéterminés, dont toute détermination possible doit répondre à la contrainte de satisfaire l'équation. De cette manière, Descartes marque un tournant dans l'histoire de la géométrie : les conditions définissant en général un objet géométrique, avant qu'il soit donné comme tel (ce qu'on pourrait penser comme le concept de cet objet) se trouvent pouvoir être, elles-mêmes, exprimées par des objets d'une nouvelle théorie ; aux objets de la géométrie, les courbes, sont associés des objets Algébriques, les équations interprétées dans l'Algèbre des segments, qui, par le fait même qu'elles sont, pour la géométrie, des objets conditionnels, deviennent des objets propres de cette Algèbre. Ce n'est pas seulement la naissance d'une nouvelle mathématique, mais aussi la naissance d'une manière nouvelle de faire des mathématiques, fondée sur la distinction entre deux niveaux d'objets mathématiques, nettement séparés et en même temps strictement reliés.

Il est pourtant clair qu'il n'est pas possible d'associer une condition exprimable par une

[84]Pour l'une et l'autre de ces pratiques, cf. le traitement par Descartes du problème des tangentes [cf. Descartes (1637), 341-352], sur lequel on va revenir dans la section 3.1.1.

[85]Descartes ne traite en fait que des formes bidimensionnelles, ou des courbes planes, comme l'on dirait aujourd'hui.

équation Algébrique à toute courbe qu'on peut s'amuser à dessiner sur un support plan, et pas même à toute courbe qu'on peut caractériser d'une manière suffisamment précise, ou apte, de toute façon, à en rendre possible la reproduction dans n'importe quelle occasion (et à n'importe quelle échelle). Pour pouvoir soutenir que cette modalité d'expression (indirecte) des formes (planes) est généralisable à toute la géométrie, Descartes doit limiter l'horizon de la géométrie (plane) aux formes qu'on peut exprimer ainsi. Cette limitation — qui fut en même temps une extension considérable des limites de la géométrie classique[86], car à côté de quelques courbes connues, qu'on peut caractériser de différentes manières, qu'on ne pouvait pas exprimer par le biais d'une équation Algébrique, il y en avait une infinité auxquelles l'on n'avait jamais songé, qui devenaient du coup des objets de la géométrie[87] — aurait pu se justifier tout naturellement, en observant que des formes différentes ne peuvent pas être exprimées (par l'intermédiaire des conditions qu'elles satisfont) par des équations interprétables dans l'Algèbre des segments. Pourtant, cette justification aurait paru extrinsèque, et elle l'aurait été en effet, du point de vue de la géométrie elle-même[88].

C'est pourquoi Descartes ne semble pas pouvoir avouer, autant à son public de lecteurs qu'à lui-même, que les limites de la géométrie doivent être fixées de cette manière, en fonction des limites expressives de l'Algèbre. C'est à ce point qu'intervient à nouveau, en jouant cette fois un rôle bien plus général que celui qu'on a lui a assigné ci-dessus, le critère de constructibilité par règle, compas et réitération : une courbe, nous dit Descartes, est recevable en géométrie, c'est-à-dire que son étude fait partie des tâches de la géométrie, si et seulement si elle satisfait ce critère [note B]. Néanmoins, ce critère est fort imprécis[89], comme on l'a observé ci-dessus, et il n'aurait jamais pu servir de critère de démarcation fixant, non seulement, comme tout-à-l'heure, les raisons qui rendent recevable une certaine famille de courbes particulières, mais les frontières mêmes de la géométrie dans son ensemble, s'il n'avait pas pu être associé à un autre critère, bien plus clair et précis, qu'il ne sert, au fond, qu'à justifier. C'est justement le critère de l'exprimabilité par une équation Algébrique. Descartes ne démontre pas, bien sur, qu'une courbe est constructible par règle, compas et réitération si et seulement si elle peut être exprimée par une équation Algébrique, mais il semble implicitement le postuler et faire de cette postulation la pierre de touche de sa géométrie. Certes, si l'on prétendait assigner un rôle effectif au critère de constructibilité par règle, compas et réitération, pris comme tel et conçu comme un critère global de démarcation fixant les limites de la géométrie, aucune postulation de cette sorte ne pourrait être justifiée, car son contenu devrait faire plutôt l'objet d'un théorème qu'on devrait à tout prix chercher à démontrer. Mais comment démontrer ce théorème, sans donner un contenu plus précis au critère de constructibilité par règle, compas et réitération ? Évidemment cela n'est pas possible. Néanmoins, cette impossibilité, loin d'être une faiblesse de la géométrie de Descartes,

[86]Cf. Grosholz (1980), 164.

[87]Cf. Serfati (1993), 202.

[88]Cf. Bos (1981), 305. Descartes n'aurait d'ailleurs pas pu, tout simplement, définir une courbe géométrique comme un lieu géométrique exprimé par une équation algébrique, car il aurait alors dû en conclure que le lieu géométrique ,"vide" dans $\mathbb{R}$, exprimé par des équations telles que $x^2 + y^2 = 0$, est une courbe géométrique. Une courbe est donc nécessairement pour Descartes une donnée pré-Algébrique, que l'Algèbre des segments peut, tout au plus, permettre de décrire. Identifier d'emblée les courbes géométriques avec les courbes exprimables par une équation Algébrique aurait donc été la même chose que d'identifier les limites de la géométrie avec les limites de cette possibilité de description, ce que Descartes n'aurait sans doute pas pu accepter.

[89]Pour une large discussion critique du critère (ou des critères) de Descartes, cf. Bos (1981), 308-322.

en est la force, car elle permet de reléguer le critère de construction par règle, compas et réitération, conçu comme critère global de démarcation, au rang, finalement marginal, de justification "métaphysique" du véritable postulat qui, *de facto*, fonde cette géométrie en la délimitant : une courbe n'est recevable en géométrie que si elle peut être exprimée, par rapport à un système de coordonnées linéaires, par une équation Algébrique[90].

Il ne faut pas penser cependant que cette marginalisation *de facto* du rôle du critère de constructibilité par règle, compas et réitération, conçu comme critère global de démarcation, entraîne une perte d'importance des constructions géométriques, en faisant de la géométrie de Descartes une pure théorie des équations. Marginalisé en tant que critère global de démarcation, ce critère reste en effet au centre de cette géométrie comme critère local, fixant les modalités de donation d'un objet propre : donner une courbe comme telle ce n'est pas pour Descartes l'exprimer par le biais d'une équation, c'est bel et bien la construire par règle, compas et réitération. L'imprécision du critère n'a pas d'effets majeurs, lorsque ce critère est employé de cette manière, car, conformément à ce critère, une courbe ne se donne jamais, comme objet propre, qu'individuellement, comme une "courbe nommée", et donc "spécifique", particulière[91]. Et ce n'est donc que cas par cas qu'il faut juger si une certaine construction satisfait ou non le critère, et si la courbe dont il est question est ou non une courbe recevable en géométrie ; si le verdict est positif, cette courbe a été donnée comme telle et non seulement exprimée, décrite, évoquée, ou définie. La distinction nette entre deux niveaux, celui de la donation des courbes et celui de leur expression ou définition reste donc intacte[92] : au premier niveau interviennent directement les courbes, objets propres de la géométrie, construites par règle, compas et réitération, et exhibées donc en tant que traces de mouvements particuliers explicitement déterminés ; au deuxième niveau interviennent les équations, objets conditionnels de la géométrie, fonctionnant comme définitions, modes de description ou d'expression, mais non pas d'exhibition, des courbes, et c'est à ce deuxième niveau, et seulement à celui-ci, que l'Algèbre des segments intervient, par le biais de l'introduction des coordonnées linéaires, comme un outil essentiel de la géométrie[93].

[90] Cf. Bos (1996), 193-194. La possibilité d'exprimer la condition qu'une courbe doit respecter par le biais d'une équation Algébrique indique, d'ailleurs, que cette condition porte sur une relation entre segments qui possède une signification géométrique explicite, en termes de constructions par règles, compas et réitération faisant intervenir des segments connus ou inconnus. En revanche une équation faisant intervenir des angles, ou, encore plus clairement, une équation faisant intervenir celles que nous reconnaissons aujourd'hui comme des fonctions transcendantes — qu'on peut employer pour exprimer des courbes qui, pour Descartes ne sont pas, *ipso facto*, géométriques — n'a pas de signification géométrique précise [cf. Giusti (1987), 421].

[91] Cf. Giusti (1987), 424.

[92] Ma distinction entre donation et expression ou définition d'une courbe, chez Descartes, rejoint la distinction faite par Molland [cf. Molland (1976), 23 et 38] entre "spécification [d'une courbe] par genèse" et "spécification [toujours d'une courbe] par propriété". En parlant, dans le premier cas de donation, j'ajoute à cette distinction un jugement : pour Descartes donner une courbe (l'exhiber) signifie la "spécifier par genèse", au moyen d'une construction [cf. aussi Israel (1997), 20-21].

[93] Si ma reconstruction est correcte, l'opposition entre un Descartes, pour ainsi dire "constructiviste", qui ne penserait les courbes autrement que comme des constructions [cf., par exemple, Lenoir (1979), qui arrive a soutenir (p. 358) que la constructibilité géométrique est pour Descartes un critère de sélection des équations "admissibles en géométrie"], et un Descartes, pour ainsi dire "algébriste" qui ne les penserait autrement que comme (corrélats d') équations [cf., par exemple, Mahoney (1980), qui arrive a soutenir (p. 145) que la *Géométrie* est "en grande partie un traité d'algèbre"], qui a caractérisé tant de discussions historiographiques, serait largement injustifiée, la géométrie de Descartes étant en même temps, et essentiellement, une théorie des courbes construites, et une théorie des équations définissant des courbes à

Si l'introduction du deuxième niveau est la grande nouveauté de la géométrie cartésienne par rapport à la géométrie classique, elle ne l'est pas seulement parce qu'elle permet d'employer le formalisme de l'Algèbre pour traiter des courbes (géométriques) avant que ces courbes ne soient données (ce qui revient à faire de l'analyse d'une manière essentiellement nouvelle), mais surtout parce qu'elle permet de traiter des courbes (géométriques) en général, comme des éléments indéterminés d'une classe d'objets qu'on peut décrire (même si on ne peut certainement pas exhiber) dans son ensemble. Une courbe (géométrique) devient donc, du coup, un membre d'une famille et cela permet non seulement de parler, de plein droit, d'une courbe (géométrique) quelconque, mais surtout d'assigner à cette expression une signification toute nouvelle. Une courbe (géométrique) quelconque n'est plus seulement soit l'une soit l'autre parmi des courbes particulières connues, elle est justement un membre générique[94] d'une famille qu'on peut définir de manière standard, en ayant recours à un formalisme dont le pouvoir expressif est intrinsèquement illimité. C'est justement cette possibilité d'une définition standard qui permet à Descartes de se poser un problème qui, dans le cadre de la géométrie classique, n'aurait pas eu de sens, au moins comme problème général : le problème de la classification des courbes (géométriques). Et c'est aussi cette possibilité qui permet de résoudre ce problème : pour classer les courbes (géométriques), il suffit de classer les équations Algébriques qui, en les définissant, les expriment.

Naturellement que cela soit ainsi ne va pas de soi. Rien ne nous assure *a priori* que le changement du système de coordonnées auxquels on réfère une même courbe, en comportant, évidemment, un changement de l'équation Algébrique qui exprime cette courbe, ne conduise pas, quel que soit le critère de classification choisi, à modifier la position de cette même courbe à l'intérieur de la classification établie ; si c'était ainsi, on classifierait les équations Algébriques et non pas les courbes. Rien ne nous assure non plus, *a priori*, que la classification établie à partir des équations Algébriques, encore qu'invariante par rapport au changement de coordonnées, soit géométriquement saillante, c'est-à-dire qu'elle classifie les courbes de telle sorte que celles qui se trouvent, par effet de cette classification, appartenir à la même classe partagent entre elles quelques propriétés géométriques significatives ; si ce n'était pas ainsi, on aurait une classification extrinsèque des courbes. Finalement, rien ne nous assure *a priori* qu'un éventuel changement du segment unité, ne produisant aucune modification d'une équation Algébrique dans laquelle il n'apparaît pas explicitement, ne change pas la nature géométrique, ou du moins la figure, de la courbe qu'elle exprime ; si c'était ainsi, la saillance géométrique de la classification pourrait ne pas être générale et dépendre, en revanche, de l'unité choisie.

Commençons par le troisième problème. Il pourrait sembler d'abord que comme le rap-

---

construire [cf. Jullien (1996), 66-67]. H. Bos a décrit cette duplicité intrinsèque de la géométrie cartésienne comme une irrémédiable contradiction [cf. Bos (1981), 298] : "[...] it was impossible for Descartes to keep strictly to his earlier programme which was based on the use of instruments. But it was also impossible for him to work out a fully algebraic programme. If he had kept to his earlier plans, he would have lost the advantages of algebra ; if he had adopted a fully algebraic approach, he could no longer have claimed that he was doing geometry. The contradictions in the *Géométrie* were indeed unavoidable". Il me semble, pour ma part, que cette duplicité ne fait pas seulement la richesse de la géométrie de Descartes, mais en marque aussi la contribution principale aux développements des mathématiques. E. Giusti a souligné cette duplicité en soutenant que les objets de la Géométrie de Descartes sont des ''courbes-équations" [cf. Giusti (1999), 35-42]. Il semble pourtant, de cette manière, vouloir indiquer que ces objets sont des équations pensées comme des expressions d'une courbe. Je dirais plutôt que ces objets sont des courbes exprimées par des équations Algébriques.

[94] Cf. Giusti (1987), 425.

port entre une courbe et une équation passe par l'intermédiation d'un système de coordonnées linéaires, il suffise, pour éliminer le doute, de s'assurer que les différents segments qui résultent, selon les différents choix d'une unité, à partir de certains segments donnés, par la réalisation des constructions associées à n'importe quelle opération Algébrique, correspondent entre eux par un isomorphisme de l'ensemble des segments sur lui-même qui conserve les relations d'ordre. Il est pourtant aisé de voir que cette condition, qui est sans doute respectée dans l'Algèbre des segments de Descartes, n'est en fait ni suffisante ni nécessaire pour garantir qu'un changement de l'unité ne produise pas un changement dans la figure de la courbe associée à une certaine équation propre cette Algèbre.

Considérons, pour comprendre la situation, le cas simple de l'équation $y = ax^2$, et supposons que cette équation est référée, dans l'Algèbre des segments de Descartes, à un système de coordonnées cartésiennes, disons orthogonales, fixé au préalable.

Si le symbole "a" indique ici un segment qui varie avec l'unité, par exemple le quatrième proportionnel entre deux quantités fixes et l'unité, et que les valeurs qu'on assigne au segment variable x sont aussi conçues comme des segments qui, de même que a, varient avec l'unité, alors il n'est nullement nécessaire de se réclamer de l'isomorphisme indiqué pour garantir qu'un changement de l'unité ne produit pas un changement dans la figure de la courbe associée à une certaine équation Algébrique. Si le segment a respecte, par exemple, la condition $\alpha : \beta = u : a$, α et β étant des quantités fixes quelconques, déterminées indépendamment du choix de l'unité u[95], et qu'on suppose que x respecte la condition $\theta : X = u : x$, θ et X étant, de même que α et β, des quantités déterminées indépendamment du choix de l'unité u, dont une, disons θ, est fixe, l'autre étant censée varier, alors les définitions (1.13) et (1.10) nous disent que le segment y respecte la condition suivante :

$$\begin{cases} x : X = u : \theta \\ z : x = x : u \\ a : \beta = u : \alpha \\ u : a = z : y \end{cases} \tag{1.18}$$

ou bien

$$\begin{cases} \theta : x = X : z \\ z : \beta = \alpha : y \end{cases} \tag{1.19}$$

Il est donc clair, vue l'absence de u de ce système de proportions, que la relation entre les segments y et x, et donc la figure de la courbe exprimée par l'équation $y = ax^2$, est invariante sous le changement de l'unité u et que, dans l'interprétation de cette équation que nous avons choisie, ceci n'est nullement garantit par l'isomorphisme qu'on vient d'évoquer. Ce qui garantit qu'il en est ainsi est plutôt le fait que dans cette équation apparaissent deux variables, c'est-à-dire le fait que cette équation exprime une dépendance (entre segments) qu'on dirait aujourd'hui fonctionnelle, et non pas une opération (sur les segments) dont on doit chercher à déterminer le résultat.

Néanmoins, il est aisé de voir que cette interprétation de l'équation en question revient, *mutatis mutandis*, à considérer a et x, et donc y, comme des nombres réels (de sorte que le changement de l'unité ne revient à rien d'autre qu'à un changement d'échelle dans le dessin

[95] Il devrait être clair que le symbole "u" est ici employé comme le nom propre d'un segment déterminé.

de la courbe) ; si elle est pour nous fort naturelle, elle ne l'est pas autant pour Descartes[96]. Il me semble que pour ce dernier, il aurait été bien plus naturel d'interpréter le symboles "a" et "x" comme étant les noms propres de certains segments, déterminés indépendamment du choix de l'unité u, dont l'un est fixe et l'autre variable. Le segment y devrait alors satisfaire la condition suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} u : x = x : z \\ u : z = a : y \end{array} \right. \tag{1.20}$$

Pour fixer les idées, supposons (fig. 7.a et 7.b) que le symbole "a" indique le segment HK et que le segment unité u soit donnée, soit par le segment RS (fig. 7.a), soit par le segment TU (fig. 7.b). Assignons au segment x une valeur déterminée, par exemple le segment AB. Dans le premier cas, c'est-à-dire lorsque le segment RS est choisi comme unité, le segment y n'est rien d'autre que segment AN ;dans le deuxième cas, c'est-à-dire lorsque le segment TU est choisi comme unité, le segment y est le segment AQ. On voit bien (fig. 7.c) que les deux paraboles qui résultent dans les deux cas sont différentes entre elles. Dans cette interprétation de l'équation $y = ax^2$, l'isomorphisme qu'on a évoqué ci-dessus n'est en rien une condition suffisante pour garantir que la courbe exprimée par l'équation $y = ax^2$ soit invariante sous le changement de l'unité u. Si l'on n'en reste qu'au formalisme de la théorie des proportions, ceci est évidemment une conséquence de l'impossibilité de composer les deux proportions qui forment le système (1.20) de façon à éliminer tant le segment u que le segment intermédiaire z.

Imaginons maintenant qu'à l'équation $y = ax^2$ on substitue l'autre équation $b^2y = ax^2$ qu'on interprète de la même manière, le symbole "b" étant conçu comme le nom propre d'un certain segment. Le segment y devrait alors satisfaire la condition suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u : x = x : z \\ u : z = a : t \\ u : b = b : v \\ u : v = y : t \end{array} \right. \tag{1.21}$$

En raisonnant comme tout à l'heure, on peut vérifier aisément que dans les deux cas distingués ci-dessus, t s'identifie respectivement aux segments AN et AQ (encore fig. 7.a et 7.b). Ces segments sont pourtant maintenant égaux au produit de b^2 et y, c'est-à-dire que pour obtenir y, il faut diviser ces segments par b^2. En exécutant cette opération dans les deux cas, on trouve que le segment y s'identifie respectivement avec le segment AG (fig. 8.a) et avec le segment AW (fig. 8.b), et il est facile de vérifier que ces segments sont égaux. En gardant le formalisme de la théorie des proportions, cela dépend du fait qu'en éliminant t du système de proportions qui résulte en composant entre elles respectivement les deux premières et les deux dernières proportions qui apparaissent dans le système (1.21), on élimine aussi u. Il s'ensuit que, bien qu'interprétée de la seconde manière, l'équation $b^2y = ax^2$ exprime toujours la même parabole, quel que soit le choix de l'unité u. Et dans ce cas aussi, cela

[96]L'idée de Descartes me semble en effet tout à fait autre que celle que Mahoney a résumé ainsi [cf. Mahoney (1994), 44] : "The mark of Descartes' genius lies in his bold assertion that, if the unit is not given by the problem, it may be chosen arbitrarily, provided only that all other magnitudes are then referred to it". Il me semble, au contraire, que pour Descartes la géométrie n'est nullement une théorie de mesure des grandeurs, mais une théorie des grandeurs elles-mêmes. Le changement du segment unité ne comporte aucun changement dans les autres segments, qui, suite à ce changement, se trouvent simplement être connectés entre eux par des relations multiplicatives différentes.

ne dépend guère de l'isomorphisme qu'on a évoqué ci-dessus, mais plutôt de la nature de l'équation considérée.

La différence entre les équations $y = ax^2$ et $b^2y = ax^2$ tient au fait que, lorsqu'on considère ces équations comme des équations portant sur des segments et qu'on suppose que tous les symboles élémentaires qui y interviennent indiquent des segments, la première de ces équations est une équation homogène, la seconde non. Et il est facile de vérifier que c'est exactement l'homogénéité de cette équation qui conduit à la possibilité d'éliminer en même temps t et u du système de proportions qui correspond à cette équation. La raison en est claire : dans le système de proportions qui correspond à une équation homogène dans l'Algèbre des segments de Descartes, l'unité u n'intervient que comme un paramètre et non pas comme un facteur d'homogénéisation, comme c'est en revanche le cas pour une équation non homogène dans cette Algèbre. On comprend alors la raison qui conduit Descartes à ne considérer dans les deux premiers livres de sa *Géométrie* (où les équations sont justement considérées comme des expressions de courbes)[97] que des équations homogènes[98]. Cela n'est pas tout simplement un reste de la tradition euclidienne, c'est une exigence interne à l'Algèbre employée par Descartes, car c'est exactement cela, et seulement cela, qui garantit que la courbe exprimée par une équation Algébrique par rapport à un système de coordonnées linéaires fixé est invariante sous tout changement d'unité. Descartes le dit d'ailleurs lui-même fort clairement dès le premier livre de la *Géométrie*[99] :

> Il est aussi a remarquer que toutes les parties d'vne mesme ligne se doiuent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'vne que l'autre, lorsque l'vnité n'est point determinée en la question [...] ; mais que ce n'est pas de mesme lorsque l'vnité est determiné, a cause qu'elle peut estre sousentendue partout où il y a trop ou trop peu de dimensions [...].

* * *

[97]Dans le troisième livre de la *Géométrie* (qui a été souvent considéré comme le "livre algébrique" de la *Géométrie*), Descartes considère bien sûr des équations non homogènes (souvent à coefficients numériques). Mais, loin d'être des équations exprimant des courbes, les équations considérées dans ce livre sont prises, ou bien, en tant que telles, comme des objets *algébriques* (ou même des objets de l'Algèbre numérique), ou bien comme des formes possibles (des schémas) d'équations exprimant des courbes. Ce dernier cas est par exemple celui de l'équation du sixième degré

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + v = 0$$

(dont les coefficients ne doivent que respecter la condition $q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$, que, symptomatiquement, Descartes exprime en demandant que "la quantité nommée q soit plus grande que le quarré de la moitié de celle qui est nommée p" [cf. Descartes (1637), 403]), que Descartes construit par intersection d'un cercle et d'une parabole cartésienne (une cubique qu'il avait introduit plus tôt dans la *Géométrie* [cf. Descartes (1637), 322]). Pour passer de ces formes (ou schémas) à des équations exprimant des courbes, il faut spécifier correctement la nature des coefficients, en ayant soin alors que l'équation en question soit homogène.

[98]Cf. Jullien (1996), 76.

[99]Cf. Descartes (1637), 299. Lachterman n'est qu'un des nombreux commentateurs qui ont pris ce passage comme une manière "d'apaiser les anxiétés des traditionalistes" [cf. Lactherman (1989), 166]. Si c'était le cas, on ne comprendrait pas bien pourquoi Descartes fait une distinction entre le cas où l'unité est fixée est celui où elle ne l'est pas : si l'unité de Descartes n'était qu'un paramètre de mesure qui fait varier avec soi la valeur de tout autre segment, de sorte que les équations homogènes n'aient aucun avantage mathématique sur les équations non homogènes, alors il n'y aurait aucune nécessité de la fixer pour pouvoir la supposer comme implicitement présente dans une équation.

Ce point crucial ayant été éclairci, avant de venir au premier des trois problèmes qu'on a soulevé ci-dessus, il est nécessaire d'introduire une clarification qui sera, essentielle pour l'ensemble de ma dissertation. Jusqu'ici j'ai parlé génériquement d'équations Algébriques exprimant une courbe, en spécifiant tout simplement que ces équations expriment des relations entre deux coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire deux segments variables. Conformément à la convention introduite ci-dessus, ces équations sont, à la rigueur, des équations où n'apparaissent que des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions et des extractions de racines, portant sur deux variables, disons x et y, indiquant ces coordonnées, et éventuellement sur des constants, indiquant soit d'autres segments soit des nombres. Si on ne reste qu'à cette définition, les trois équations

$$\begin{gathered} 2x^3 + 3axy + by^2 = 0 \\ y = 3a^3x^{\frac{1}{3}} + 2b^{\frac{5}{3}}x^{\frac{3}{5}} \\ 2ay^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{15}}yx^{\frac{1}{5}} + 3c^{\frac{1}{12}}xy^{\frac{1}{4}} = 0 \end{gathered} \tag{1.22}$$

sont, par exemple, toutes des équations Algébriques (homogènes) de cette sorte.

Descartes ne considère pourtant comme des expressions des courbes géométriques que des équations telles que la première des équations (1.22), c'est-à-dire des équations Algébriques entières.

Nous savons aujourd'hui que toute équation telle que la deuxième de ces équations, c'est-à-dire toute équation de la forme $y = f(x)$, où $f(x)$ est une expression Algébrique (dans le sens fixé ci-dessus) peut en ligne de principe être réduite à une équation entière. Ceci est la conséquence immédiate d'un des théorèmes fondamentaux de l'algèbre moderne : les éléments k d'une extension K d'un corps F qui sont algébriques sur F — c'est-à-dire qui sont tels qu'il y a des éléments $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de F, dont un au moins n'est pas nul, tels que $a_0^n + a_1^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ — forment un corps[100]. Ce théorème ne pouvait pourtant pas être énoncé, et *a fortiori* prouvé par Descartes. Sa preuve moderne ne fait d'ailleurs aucune référence à une procédure effective qui puisse être employée pour réduire toute équation de cette forme à une équation entière. Si une équation telle que la deuxième des équations (1.22) est donnée, nous ne pouvons donc pas être sûrs de savoir effectivement la réduire à une équation entière, et *de facto*, dans la plus grande partie des cas, nous ne savons pas le faire.

Pour ce qui est des équations telles que la troisième des équations (1.22), c'est-à-dire des équations de la forme $F(x, y) = 0$, où $F(x, y)$ est une expression Algébrique (dans le sens fixé ci-dessus), nous savons aujourd'hui qu'elles sont en général non réductibles à des équations Algébriques entières.

De plus nous savons qu'une équation Algébrique entière n'a pas nécessairement de racines Algébriques, c'est-à-dire qu'il est possible qu'une variable y qui intervient dans une équation entière $F(x, y) = 0$ (de degré supérieur au quatrième, dans cette même variable) ne puisse pas être exprimée par une expression Algébrique. C'est une conséquence d'un théorème bien connu.

Ces trois circonstances montrent bien la différence entre la notion moderne d'algèbre, qui identifie des corps constitués par des ensembles de racines d'équations entières, tels que le

[100]Cf. entre autres Herstein (1964), ch. 167-174.

corps des nombres, des courbes, ou de fonctions algébriques, et la notion d'Algèbre, et plus généralement celle d'*algèbre*, que j'ai introduit ci-dessus. Or, si j'ai introduit ces notions c'est qu'il me semble qu'elles correspondent à la manière de penser de Descartes, qui sera plus tard aussi celle de Newton. Autant pour l'un que pour l'autre la distinction essentielle n'est pas celle entre nombres, courbes, ou fonctions algébriques (dans notre sens) et nombres, courbes ou fonctions non algébriques (ou transcendant), mais, plus sobrement, celle entre des expressions ou des équations faisant intervenir les opérations d'addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racines et des expressions ou des équations faisant intervenir d'autres opérations, ou exprimant, de quelque manière que ce soit, des relations entre des quantités différentes de celles qui tiennent à l'exécution de ces opérations.

Dans ce contexte, la décision de Descartes de se limiter à considérer des équations entières, en tant qu'expressions des courbes géométriques, prend une signification toute différente de celle qu'elle pourrait avoir pour nous. Il semble tout simplement que Descartes était convaincu de pouvoir réduire toute équation *algébrique*, et donc toute équation Algébrique, à une équation entière, et de pouvoir aussi exprimer toute racine d'une équation entière par des expressions *algébriques* ou Algébriques. Si on considère des équations assez simples de la forme $y = f(x)$, où $f(x)$ est une expression Algébrique, cette réduction peut en effet être réalisée, ou bien par des moyens élémentaires, lorsque $f(x)$ est une expression rationnelle ou ne contient qu'une seule racine, ou bien en employant la méthode des coefficients indéterminés[101], dans d'autres cas [Note C]. On peut donc imaginer que Descartes, et plus tard Newton, aient été convaincus que des procédures de réduction semblables auraient pu être appliquées à toute sorte d'équation *algébrique* non entière[102]. La limitation à des équations entières ne semble alors, de ce point de vue, qu'être dictée par des raisons de commodité et de généralité : la forme entière d'une équation est conçue comme la forme la plus simple et générale sous laquelle toute équation Algébrique peut se présenter. Lorsque Newton comprendra que dans certains cas (par exemple lorsque on cherche à carrer une courbe), il est plus aisé de supposer que cette courbe est exprimée par une équation de la forme $y = f(x)$, il restera probablement toujours convaincu qu'une équation de la sorte, où $f(x)$ est une expression Algébrique, n'est que l'expression d'une racine d'une équation entière (et qu'elle exprime donc toujours une branche d'une courbe qui peut être, dans son ensemble, exprimée par une équation entière).

Pour m'adapter à cette manière de penser, j'emploierai dans la suite de ma dissertation le terme "équation Algébrique (ou *algébrique*)" pour me référer à une équation qui est déjà donnée en forme entière ou qui est supposée pouvoir être mise sous cette forme. Je ne parlerai en revanche d'équations entières ou d'équations Algébriques (ou *algébriques*) entières ou non entières que pour souligner que les équations dont il est question se présentent respectivement soit sous leur forme entière soit sous une forme non entière.

* * *

On est maintenant dans les conditions d'aborder le premier, des trois problèmes qu'on soulève ci-dessus : comment peut-on être sûr que le changement du système de coordonnées auquel on réfère une courbe ne conduise pas à modifier la position de cette courbe

[101] Cf. ci-dessous, p. 114

[102] Newton le dira explicitement dans le *De methodis* :"Siquando fractiones complexævel surdæquantitates in æquationes propositâ vel post in operatione occurrant, tolli debent per methodos Analystis satis notas" [cf. Newton (MP), III, **1**, 2, § 2, 48].

à l'intérieur de la classification établie ? Une fois qu'on a supposé que toute équation Algébrique peut être écrite en forme entière et que parmi les équations Algébriques entières, seulement celles qui sont homogènes expriment la même courbe, quel que soit le segment unité auquel on se rapporte — pourvu naturellement qu'elles soient référées au même système de coordonnées cartésiennes — il est naturel d'associer à toute courbe géométrique référée à un certain système de coordonnées cartésiennes (c'est-à-dire à toute courbe qui peut être exprimée, par rapport à ce système de coordonnées, par une équation Algébrique) une et une seule équation entière homogène. Le problème posé est alors résolu d'emblée par un choix convenable du critère de classification[103] : les courbes (géométriques) se classifient sur la base du degré de l'équation Algébrique entière (et homogène) que les exprime par rapport à n'importe quel système de coordonnées cartésiennes. Le passage d'un système de coordonnées à un autre ne comporte en effet que des transformations linéaires dans l'équation de la courbe. Le degré de celle-ci reste donc invariant sous ce passage.

Ceci étant posé, Descartes propose d'assigner au premier "genre" les courbes exprimées par des équations du premier[104] ou deuxième degré, au deuxième les courbes exprimées par des équations du troisième ou quatrième degré, au troisième les courbes exprimées par des équations du cinquième ou sixième degré[105], et ainsi de suite.

Il ne reste alors que le deuxième problème : comment peut-on être sûr que la classification ainsi établie soit géométriquement saillante ?

Descartes résout ce problème en montrant que la classification précédente conduit à classifier les courbes (géométriques) sur la base de la nature particulière du problème de Pappus dont elles sont une solution[106]. Avec le terme "problème de Pappus" je me réfère, suivant une terminologie établie depuis Descartes, à un problème bien déterminé exposé par Pappus dans les livre VII de la *Collection mathématique*[107], et que Descartes considère à plusieurs reprises dans la *Géométrie*, en l'interprétant ainsi : n droites étant données par position ($n = 3, 4, ...$), déterminer le lieu géométrique des points dont les distances[108] $d_1, d_2, ..., d_n$

[103]Cf. Descartes (1637), 323.

[104]Pour Descartes, le terme "courbe" ne réfère, à la rigueur, qu'à des courbes autres que la droite. Pour parler en général de courbes (dans son sens) et de droites, celui-ci emploie le terme "ligne". Pour des raisons de simplicité, on a utilisé et on utilise ici le premier de ces termes, dans son sens moderne, pour dénoter ce que Descartes dénote par le second.

[105]Descartes conçoit d'emblée une équation qu'on peut factoriser comme un système de plusieurs équations. Ainsi, pour ne faire qu'un exemple, l'équation du deuxième degré

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a) = 0$$

doit être conçue comme un système de deux équations du premier degré,

$$\begin{cases} x + a = 0 \\ x - a = 0 \end{cases}$$

dont chacune exprime une droite. Pour être précis, on devrait donc parler d'équations irréductibles par factorisation. La raison pour laquelle Descartes procède en regroupant les ordres des équations deux à deux ne peut pas, en revanche, être expliquée ici : pour des opinions différentes sur la question, cf. Bos (1981), 305-306 et Grosholz (1991), 43-50.

[106]Cf. Descartes (1637), 323-324.

[107]Cf. Pappus (CH), II, 676-680 et Pappus (CVE),506-510.

[108]Le terme "distance" réfère évidemment ici à un segment et non pas à une mesure, quelle qu'elle soit.

aux droites données, prises sous des angles fixes quelconques, satisfont la condition :

$$\prod_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} d_{2i-1} = k_n \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d_{2i} \tag{1.23}$$

où k_n est un segment quelconque qui n'intervient dans l'équation précédente que si le nombre n est impair (en termes modernes, on pourrait dire que $k_n = 1$, si n est pair, et $k_n = k$, si n est impair, k étant un segment quelconque)[109], et, si q est un nombre rationnel positif, alors $\lfloor q \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à q. Descartes démontre d'ailleurs, fort aisément, en se servant de la référence à un système de coordonnées linéaires convenable, que[110] : les courbes solutions du problème de Pappus pour $n = 3, 4$ ne peuvent qu'être du premier genre ; les courbes solution du problème de Pappus pour $n = 5, 6, 7, 8$ ne peuvent qu'être du premier ou du deuxième genre ; les courbes solution du problème de Pappus pour $n = 9, 10, 11, 12$ ne peuvent qu'être du premier, du deuxième ou du troisième genre[111] ; etc. Ensuite, il ne démontre pas, mais il affirme, que toute courbe géométrique peut être solution du problème de Pappus pour un nombre convenable de droites[112].

1.4.3 Entre problèmes et théorèmes

Arrivés à ce point, on est finalement dans les conditions de donner un jugement d'ensemble sur la géométrie de Descartes.

H. Bos a souvent soutenu[113] que pour Descartes, la géométrie n'était qu'un "art pour résoudre des problèmes" et non pas une théorie axiomatique, comme chez Euclide. Il est certes difficile de nier les différences entre le style des *Éléments* et celui de la *Géométrie.* Néanmoins, il me semble que le contenu de ce dernier petit traité ne laisse pas de doutes sur une chose : Descartes visait une réforme d'envergure de la géométrie d'Euclide ; il voulait l'asseoir sur des bases nouvelles, lui assigner une nouvelle structure ; il ne voulait pas

[109]Il ne faut pas confondre la position moderne $k_n = 1$, lorsque n est pair, avec la condition $k_n = u$. En effet l'absence ou la présence du segment k_n tient au souci de sauvegarder l'homogénéité de l'équation, qui serait en revanche cassée si on posait $k_n = u$, lorsque n est pair. On note que si $n = 3$, il est habituel, mais non pas obligatoire, de prendre $k_n = k_3 = d_2$.

[110]Cf. Descartes (1637), 323-324.

[111]La preuve de Descartes est immédiate : après avoir introduit un système de coordonnées convenable, il montre que toutes les distances d_i, $(i = 1, 2, \cdots n)$ peuvent être exprimées par des expressions Algébriques du premier degré. Le fait que, d'après Descartes, les courbes solutions du problème de Pappus pour $4m - 3, 4m-2, 4m-1, 4m$ droites peuvent être d'un genre inférieur ou égal à l'm-ième dépend alors de la possibilité que l'équation qui dérive de l'équation (1.23), en substituant ces expressions aux distances d_i soit réductible soit par factorisation [cf. la note (105) ci-dessus], soit par simplification.

[112]Cf. Descartes (1637), 324. Évidemment, même si on suppose qu'une courbe est géométrique si et seulement si elle est exprimée par une équation Algébrique, il ne s'ensuit pas que toute équation Algébrique exprime une courbe géométrique. Il faut encore que cette équation soit satisfaite, par rapport au système de coordonnées cartésiennes choisi, par un ensemble de points (x, y) qui puisse être conçu comme une courbe. Descartes ne clarifie pas ce point, car pour lui c'est la notion de courbe et non pas celle d'équation ou de polynôme qui est primitive. Même si on explicite cette condition, on peut pourtant encore prouver qu'il y a des polynômes $F(x, y)$ tels que l'équation $F(x, y) = 0$ exprime une courbe (réelle) par rapport à un système de coordonnées cartésiennes qui n'est pas une solution du problème de Pappus, quelle que soit la forme prise par ce problème. Ceci a été prouvé en 1981 par Bos [cf. Bos (1981), 332-338], qui a montré que c'est notamment le cas si le degré de ce polynôme est plus grand que 21.

[113]Cf., par exemple : Bos (1981), 327 ; (1984), 338 ; (1990), 352-353 ; (1996), 192.

tout simplement se donner les moyens pour résoudre des problèmes restés jusqu'alors sans solution. La question ne tient pas seulement à une appréciation générale, sans beaucoup de conséquences sur la lecture et la compréhension, pour ainsi dire concrètes, du texte de Descartes. Et cela pour deux raisons. D'abord, si on accepte dès le début le point de vue de Bos, on est amené à penser que la question cruciale de l'extension par Descartes des moyens de construction géométrique propres à la géométrie d'Euclide ne concerne que les moyens de construction des points ou des lieux qui fournissent la solution des problèmes abordés. Les courbes géométriques, en particulier celles autres que la droite et le cercle, sont vues ainsi[114] essentiellement comme des moyens de construction de points (par leurs intersections) ou comme des solutions de problèmes, et non pas comme les véritables nouveaux objets de la géométrie[115]. Ensuite, et c'est, je crois, l'enjeu fondamental de la question, l'attribution à Descartes d'une conception qui privilégie la solution de problèmes à la démonstration de théorèmes[116] risque de cacher l'aspect innovateur essentiel de la géométrie cartésienne.

La distinction classique entre problèmes et théorèmes, dans la géométrie grecque, et en particulier dans les *Éléments*[117], tenait non pas à une forme d'exposition, ou à une conception de l'organisation d'une théorie, mais à une modalité de relation aux objets géométriques. Dans un problème, on demandait d'exhiber un objet qui n'était pas encore donné, dont rien n'assurait *a priori* l'existence, et qu'on définissait comme ce qui satisfait une certaine condition. Dans un théorème, on affirmait quelque chose d'objets déjà donnés, dont l'existence était assurée par une exhibition précédente, relevant de la solution d'un problème. Il est bien clair que, si on n'en reste à la forme expressive, tout théorème peut se transformer en un problème et *viceversa*. En revanche, si on regarde la substance, portant justement sur la relation aux objets, cette réciprocité disparaît. Un problème, transformé en un théorème s'énonce ainsi : l'objet qui satisfait la condition φ s'exhibe ainsi et ainsi. Un théorème, transformé en un problème s'énonce ainsi : quelles sont les propriétés d'un objet qui s'exhibe ainsi et ainsi ? ou : parmi les objets donnés, quel est celui qui satisfait la condition φ ? Il est clair que ces transformations formelles ne modifient pas les modalités de relation aux objets propres des propositions de départ. De ce point de vue, un problème reste un problème, même s'il est mis sous la forme d'un théorème, et un théorème reste un théorème, même s'il est mis sous la forme d'un problème : énoncer un problème signifie poser une question d'existence ; énoncer un théorème signifie poser une question de description ou de classification. Or, ce qui est essentiel dans la géométrie de Descartes est, il me semble, que ce dernier vise à reporter les questions d'existence, typiquement résolues par une synthèse, à l'intérieur du domaine de l'analyse conduite par le biais d'une Algèbre, et à résoudre ces questions d'un coup et en général, en prouvant qu'une courbe géométrique existe par la simple exhibition de son équation. Lautman aurait dit qu'il réduit l'existence à l'essence[118]. Les questions d'existence étant résolues d'emblée, ne restent dans la géométrie de Descartes que des questions de description ou de classification. Quelle que soit leur forme d'exposition, les propositions de cette géométrie sont toutes des théorèmes et en particulier des théorèmes de classification : les courbes géométriques se classifient ainsi et ainsi ; les points ou les

[114]Cf. Jullien (1996), 57-58.
[115]Cf., par exemple, Grosholz (1980), 160 et 163, et Bos (1988) et (1990), 361. Pour une opinion opposée, cf. Giusti (1987), 419.
[116]Cf. aussi Lachterman (1989), 149-161.
[117]Pour d'autres considérations sur cette distinction cf., entre autres, Gardies (1997), chap. III, 77-99.
[118]Cf. Lautman (1977), pp. 81-82 et 87.

lieux qui satisfont telle ou telle condition sont ceux-ci ou ceux-là ; la courbe exprimée par l'équation $F(x, y) = 0$ a telle ou telle propriété[119].

C'est justement la possibilité de démontrer des théorèmes de cette dernière sorte qui fait la richesse de la géométrie de Descartes, car, bien que la possibilité de fournir une classification des courbes géométriques et celle de penser ces courbes comme éléments d'une famille illimitée soient des avantages indiscutables de cette théorie, ils se réduiraient à bien peu de chose si la définition ou expression d'une courbe géométrique par le biais d'une équation Algébrique ne permettait pas, en même temps, d'étudier cette courbe et d'en déterminer des propriétés géométriquement saillantes (autre que celle d'être une solution possible du problème de Pappus pour un certain nombre de droites), avant de l'exhiber par construction [Note D]. Le grand défi de la géométrie cartésienne est justement celui-ci : être à même de déterminer des procédures employant l'Algèbre des segments pour lire sur l'équation Algébrique exprimant une certaine courbe, sinon les modes de construction de cette courbe, au moins certaines de ses propriétés géométriques fondamentales. La méthode que Descartes propose, vers la fin du livre II de la *Géométrie*[120], pour déterminer la normale (et donc la tangente) de toute courbe géométrique exprimée par une équation Algébrique connue, sans qu'on sache rien d'autre de cette courbe, sinon qu'elle est exprimée par cette équation, est un exemple de ces procédures ; un exemple d'ailleurs non quelconque, car, nous dit Descartes, ce problème est "le plus vtile & le plus general, non seulement que ie sçache, mais aussi que i'aye iamais desiré de sçauoir en Geometrie"[121]. Ce sera justement parce que l'on parviendra plus tard— en large partie grâce aux acquis de Newton — à mettre en place des méthodes propres à déterminer, non seulement la tangente et la normale, mais aussi l'aire, la longueur, le centre de courbure, les développées, les points d'inflexions, les éventuelles asymptotes, etc. d'une courbe dont on ne sait rien d'autre sinon qu'elle est exprimée par une certaine équation, que l'exigence de construction par règle, compas et réitération viendra progressivement à disparaître entre la fin du XVII^ème^ et le milieu du XVIII^ème^ siècle. La donnée d'une équation exprimant une courbe apparaissait en fait, à la lumière de ces méthodes, comme une information suffisante pour connaître toutes les propriétés figurales de la courbe que sa construction aurait pu exhiber.

Je reviendrai sur la méthode des normales de Descartes dans la section 3.1. Ici, je voudrais souligner la modalité particulière dans laquelle les équations Algébriques propres à

[119]Si Descartes n'avait pensé vraiment la géométrie que comme un "art pour résoudre des problèmes", alors il n'aurait pas exclu de celle-ci la considération des courbes mécaniques et des problèmes infinitaires. L'intérêt de Descartes pour les courbes mécaniques, et sa capacité à résoudre un grand nombre de problèmes concernant ces courbes, de même que de nombreux problèmes de nature infinitaire, sont attestés par une grande partie de sa correspondance et par quelques notes que celui-ci avait laissées inédites [J. Vuillemin a attiré l'attention sur l'intérêt de Descartes pour les courbes mécaniques (et sur les liens entre cet intérêt et la *Géométrie*) dès 1960 : cf. Vuillemin (1960), première partie, 7-73 ; à propos de la considération et de la solution des problèmes infinitaires, cf. Costabel (1985) et Jullien (1999)]. Si Descartes a exclu ces problèmes de sa géométrie, c'est qu'il ne visait pas seulement à résoudre des problèmes ; il visait plutôt à fonder et à organiser cette science d'une nouvelle manière, et il ne vit pas la manière d'intégrer à son nouvel édifice sa solution — encore que correcte, dans un sens — de ces problèmes. Une nouvelle réforme de la géométrie cartésienne, propre à rendre possible son extension aux courbes mécaniques sera le résultat d'un long processus, qui commencera avec les recherches de Newton dont on traitera dans les chapitres suivants et ne sera accompli que par Euler, avec la publication, en 1748, des deux tomes de l'*Introduction in analysin infinitorum* [cf. Euler (1748)].

[120]Cf. Descartes (1637), 341-352.

[121]Cf. Descartes (1637), 342.

l'Algèbre des segments interviennent dans la solution donnée par Descartes au problème de la classification des courbes. Elles y interviennent, bien sûr, en tant qu'écritures Algébriques, caractérisées comme telles par la nature des quantités auxquelles elles réfèrent, mais elles ne fournissent la solution de ce problème que grâce à leurs propriétés purement *algébriques*, qui sont, comme telles, tout à fait indépendantes de la nature de ces quantités. Cela est aussi le cas lorsque Descartes et ses successeurs classifiaient les problèmes où il s'agissait de déterminer un segment, suivant le degré de l'équation Algébrique dont une ou plusieurs racines expriment le segment cherché. De plus, en résolvant en général, comme on vient de le dire, les questions d'existence, en supposant que toute courbe exprimée par une équation Algébrique est constructible par règle, compas et réitération, ou en montrant comment à partir des propriétés de deux équations, on peut conclure si les courbes qu'elles expriment se coupent ou pas, et, encore, en indiquant comment lire sur des équations les propriétés des courbes correspondantes, Descartes assigne à la considération des seules équations un rôle à l'intérieur de la géométrie qui va bien au delà du rôle qui était traditionnellement assigné à l'analyse. Le troisième livre de la *Géométrie* en est un exemple parlant[122]. Cette circonstance fait des équations des antécédents proches de ce que je conçois comme un objet *analytique*. Le moment est donc venu d'éclairer ma notion d'objet *analytique*.

1.5 *Analyse*

Tant l'*algèbre* de Viète que celle de Descartes paient leur généralité au prix d'une perte de tout pouvoir de référer à des quantités. Loin d'être des théories de quantités de certaines sortes, elles ne portent que sur les propriétés formelles des opérations possibles sur des quantités, et ne sont au fond que les théories d'une certaine famille de structures symboliques, ne faisant que régler (ou pour dire mieux établir) les transformations possibles de ces structures, les unes dans les autres. Ces structures n'ont un sens chez Viète qu'en tant qu'elles se présentent comme un stade possible d'une procédure de transformation symbolique ; elles apparaissent comme des objets purement syntaxiques[123] qui ne reçoivent un contenu qu'en dehors de l'*algèbre*, comme de purs schémas[124] pour des énoncés possibles portant sur certaines quantités particulières. Chez Descartes, elles renvoient, de plus, à des systèmes de proportions. En tant que ces équations participent à une *algèbre*, les proportions correspondantes ne sont pourtant, elles aussi, que des schémas d'énoncés possibles sur des quantités, bien que ces quantités soient désormais quelconques. La raison de cette situation est claire : tant pour Viète que pour Descartes, de même que pour Euclide et pour tous les mathématiciens de la tradition euclidienne, il ne fait de sens que de parler de quantités particulières (qui opèrent les unes sur les autres de manière spécifiquement propre), la généralité de l'*algèbre* n'étant justement que la généralité d'une forme susceptible de recevoir différents contenus distincts. Ces *algèbres* ne sont donc que des théories des formes d'énoncés possibles sur des quantités : elles ne sont pas assertives. Il s'ensuit qu'elles ne peuvent participer qu'à l'analyse et jamais à la synthèse, même si, au moins chez Descartes, l'analyse a désormais pris une place qu'elle n'avait jamais occupée auparavant.

Pour parler d'objets *analytiques* et donc d'*analyse,* dans mon sens, on a besoin d'autre

[122] Cf. Lacheterman (1989), 169.
[123] Cf. Klein (1934-1936), 176 et Mahoney (1994), 39.
[124] Cf. Freguglia (1988), 67.

chose. On a besoin de structures symboliques, dans lesquelles interviennent des symboles référant à des quantités quelconques, mais qui ne fonctionnent pas comme de simples schémas d'énoncés possibles sur des quantités, étant déjà, en elles-mêmes des énoncés référant à des quantités. Ces structures doivent être de surcroît, en raison, justement, de leur contenu référentiel, les objets propres d'une théorie. Elles seront ainsi des objets *analytiques* et cette théorie sera une *analyse*.

Naturellement, pensés de cette manière, des objets *analytiques* ne peuvent être conçus qu'à partir d'une conception de la quantité essentiellement différente de celle de Viète et Descartes qui est, au fond, la même qu'on retrouve dans les mathématiques euclidiennes. On doit pouvoir donner sens à l'idée d'une quantité qui peut être exhibée et traitée comme telle sans être pour autant une quantité particulière, un nombre, un segment, ou un angle. On doit pouvoir parler des quantités dont la nature spécifique est indéterminée, non seulement parce qu'on n'a pas encore clarifié s'il s'agit de nombres, de segments ou de quelques autres quantités de natures particulières, mais parce qu'il s'agit, pour ainsi dire, de quantités abstraites, dont la spécificité réside justement dans le fait de ne pas être des quantités particulières. La théorie des fonctions d'Euler et Lagrange est, si je ne me trompe pas, une théorie de quantités de cette sorte, une fonction, au sens d'Euler et Lagrange, étant justement une quantité abstraite. J'ai essayé ailleurs[125] d'illustrer et de défendre cette thèse, ici je voudrais comprendre comment cette nouvelle conception de la quantité a pu naître, à partir des recherches mathématiques du jeune Newton, entre 1664 et 1666.

1.6 Notes supplémentaires

1.6.1 Note A

En 1650, Huygens proposa de construire une spirale d'Archimède avec un mécanisme qui, en employant une corde qui s'enroule sur un disque auquel on a fixé rigidement une barre de longueur variable, fait dépendre le mouvement rétrograde de la droite tournante de son mouvement de rotation[126]. Cela semblerait une construction de la spirale d'Archimède qui ne demande de prendre en compte qu'un seul mouvement générateur. Descartes n'évoque pas explicitement de telles constructions, mais observe[127] qu'il y a bien des constructions employant des ficelles qu'il faut rejeter comme des constructions de courbes géométriques, car ces ficelles "deuienent tantost droites & tantost courbes". À première vue, on pourrait voir dans cet argument une raison *ad hoc* pour rejeter des courbes telles que la spirale d'Archimède, lorsqu'elle est construite par la méthode de Huygens. Si on regarde les choses plus en profondeur, on se rend compte pourtant que derrière l'argument de Descartes il se cache une condition qui concerne le rôle (et non pas simplement la forme) des ficelles dans la construction d'une courbe. Considérons pour cela les constructions de l'ellipse et de l'hyperbole faites par l'usage d'une ficelle, exposées par Descartes dans la *Dioptrique*[128]. Si, comme dans le cas de la construction de Huygens, l'usage d'une ficelle permet de connecter le mouvement de rotation d'une règle à un mouvement d'un point sur cet règle, la condition

[125] Panza (1992*a*).
[126] Cf. Huygens (OC), vol. 11, p. 216 et Bos (1981), 320-321.
[127] Cf. Descartes (1637), 340-341.
[128] Cf. Descartes (1637), 90 et 100.

que ce dernier mouvement doit respecter, et que, *de facto*, les ficelles le contraignent à respecter, est une condition qui porte sur l'addition et la différence de deux segments. Il s'ensuit que, dans les deux cas, la ficelle pourrait, localement, c'est-à-dire dans tout point de ces courbes, être remplacée par deux règles. Selon Descartes[129], "on ne se sert de chordes, en ces constructions, que pour déterminer des lignes droites dont on connaist parfaitement la longueur." Ceci n'est pourtant vrai que partiellement. Car c'est seulement l'usage de ficelles qui permet (lorsque la courbe n'est pas donnée à l'avance) d'établir la longueur de ces lignes. L'usage de la ficelle, plutôt que de deux règles, a justement comme fonction de rendre automatique le respect de la condition qui caractérise la courbe en question, lorsqu'on fait tourner la règle. Ceci n'est pas le cas de la construction de la spirale proposée par Huygens, car seule une partie de la ficelle pourrait, dans ce cas, être localement remplacée par une règle, l'autre devant l'être par un arc de cercle. Ainsi les constructions de l'ellipse et de l'hyperbole employant des ficelles sont des constructions réalisées par une machine qui peut, dans tous ses points, être décrite comme une configuration de droites, dont une est censée être soumise à une rotation autour d'un centre fixe. Les droites interviennent dans cette machine comme des courbes géométriques déjà reçues, dont on considère des portions qui, pour tout point de la courbe à construire, sont déterminées par intersection, pourvu que ce point soit donné. En revanche, la construction de la spirale de Huygens emploie une machine qui ne peut pas être décrite de cette manière, car, quel que soit le point qu'on prend sur la spirale, la configuration de courbes qui le détermine selon cette machine fait intervenir une portion de cercle qui ne peut pas être déterminée par intersection de courbes déjà reçues, un fois que ce point est considéré comme étant donné. On peut penser que celle-ci n'est qu'une autre manière d'exposer la contrainte que Bos a exprimée en parlant d'un "axiome d'incommensurabilité entre le droit et le courbé"[130]. Néanmoins, lorsqu'elle est exprimée de cette manière, cette contrainte montre ses liens avec le critère général de constructibilité géométrique d'une courbe : la spirale n'est pas une courbe géométrique, car sa construction, même celle conçue par Huygens, ne satisfait pas ce critère. On pourrait dire alors, en général, que les constructions avec des ficelles ne sont acceptables que lorsque les ficelles peuvent, pour tout point de la courbe à construire, être remplacées par des portions de courbes géométriques déjà reçues (construites), déterminées par intersection de ces mêmes courbes ou d'autres courbes déjà reçues, pourvu que ce point soit donné.

1.6.2 Note B

Descartes n'affirme explicitement qu'une de ces deux implications : toute courbe constructible par règle, compas et réitération peut être exprimée par une équation Algébrique [cf. Descartes (1637), 319]. Bien qu'il ne démontre pas cela, ce ne serait certes pas difficile de le faire, pourvu qu'on spécifie suffisamment et raisonnablement le critère de constructibilité par règle, compas et réitération. Il suffirait pour cela de considérer l'une après l'autre toutes les courbes autres qu'une droite ou un cercle qui entrent dans cette construction, et de les exprimer récursivement par des équations qu'on pourrait déterminer, en partant de la considération des segments et des cercles qui sont à l'origine de leur construc-

[129]cf. Descartes (1637), 341.

[130]Cf. Bos (1981), 322. Mancosu [cf. Mancosu (1996), 77] a mis en doute que ce critère ait joué un rôle important, en observant que personne ne le mit plus tard en doute, en se réclamant des rectifications des courbes géométriques trouvées par des moyens Algébriques, par exemple par van Heuraet [cf. la section 3.5].

tion. Pour tous les exemples de construction par règle, compas et réitération que Descartes donne dans la *Géométrie*, cela est d'ailleurs assez facile à faire. Pour ce qui est de l'implication inverse, il faut reconnaître que Descartes ne l'affirme jamais explicitement dans la *Géométrie*, bien qu'il semble le faire implicitement [cf. Bos (1981), 324], en affirmant [cf. la note D, ci-dessous] : *i*) qu'il est possible de construire, par règle, compas et réitération, n'importe quel point de toute courbe exprimée par une équation Algébrique ; *ii*) que toute courbe dont n'importe quel point peut être construit par règle, compas et réitération peut aussi "estre descrites par vn mouuement régulier & continu" [cf. Descartes (1637), 340]. Pourtant, ni l'une ni l'autre de ces affirmations n'est prouvée par Descartes. Et il est surtout difficile de voir comment la deuxième pourrait l'être [cf. Bos (1981), 324]. En 1876, A. B. Kempe [cf. Kempe (1876)] a prouvé un théorème qu'on pourrait formuler ainsi : si $F(x, y) = 0$ est une équation algébrique qui exprime, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales donné, une courbe réelle, et si on sait déterminer les coordonnées d'un point, appartenant à une branche de cette courbe, alors il est en principe possible de déterminer un "système articulé [*linkwork*]" (c'est-à-dire un système de barres rectilignes, ou "liens [*links*]", de longueur constante, se connectant les unes avec les autres en des points fixes, et formant des angles qui varient tous ensemble, sous un mouvement déterminé d'un point d'une de ces barres), dont un point explicitement déterminé trace la branche de la courbe d'équation $F(x, y) = 0$ à laquelle appartient le point qu'on sait construire, lorsque le point qui engendre le mouvement du système trace une droite parallèle à l'axe des abscisses. Comme il est clair qu'une courbe ainsi construite soit construite conformément au critère de construction par règle, compas et réitération, et que toute transformation d'un système de coordonnées cartésiennes en un autre ne comporte que des transformations linéaires banales, il s'ensuit que si on sait déterminer les coordonnées d'un point appartenant au lieu qui respecte la condition exprimée par une équation propre à l'Algèbre des segments de Descartes, relativement à un système de coordonnées cartésiennes donné, alors on peut aussi déterminer une procédure qui conduit à une construction par règle, compas et réitération d'une branche de la courbe exprimée par cette équation. Autant dire que toute courbe exprimée par une équation Algébrique, dont un point est constructible par règle, compas et réitération, est elle même constructible (au moins partiellement) par règle, compas et réitération. C'est en même temps une clarification et une confirmation de deux conjectures de Descartes : d'une part celle relative à la constructibilité par règle, compas et réitération de toute courbe exprimée par une équation Algébrique ; de l'autre celle relative à la possibilité de décrire "par vn mouuement régulier & continu" toute courbe dont n'importe quel point peut être construit par règle, compas et réitération.

1.6.3 Note C

Pour avoir un exemple de cette procédure, supposons donnée l'équation :

$$y = ax^{\frac{1}{m}} + bx^{\frac{1}{n}} \tag{1.24}$$

où m et n sont des nombres entiers strictement positifs, premiers entre eux, et cherchons à la réduire en une équation entière.

Si M est le plus petit commun multiple de m et n, on aura

$$M = hm = kn \tag{1.25}$$

h et k étant deux nombres entiers premiers entre eux et tels que

$$\begin{array}{c} 1 \le h \le n \\ 1 \le k \le m \end{array} \tag{1.26}$$

De la position

$$t = x^{\frac{1}{M}} \tag{1.27}$$

il s'ensuit alors le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} t^h = x^{\frac{h}{M}} = x^{\frac{1}{m}} \\ t^k = x^{\frac{k}{M}} = x^{\frac{1}{n}} \\ y = at^h + bt^k \end{array} \right. \tag{1.28}$$

Il s'agit alors de déterminer les M coefficients A_j $(j = 0, 2, \ldots, M-1)$ d'un polynôme

$$P_M(y) = \sum_{j=0}^{M} A_j y^j \tag{1.29}$$

où on aura posé $A_M = 1$, tel que des conditions précédentes il s'ensuive

$$P_M(y) = 0 \tag{1.30}$$

quel que soit y. Si ces coefficients sont à leur tout des polynômes en x, alors on aura ainsi trouvé l'équation entière cherchée. En substituant on obtient

$$\begin{array}{rl} \sum_{j=0}^{M} A_j \left(at^h + bt^k\right)^j & = \\ \sum_{j=0}^{M} A_j \left[\sum_{i=0}^{j} \left(\begin{array}{c} j \\ i \end{array} \right) \left(at^h\right)^{j-i} \left(bt^k\right)^i \right] & = \\ \sum_{j=0}^{M} A_j \left[\sum_{i=0}^{j} \left(\begin{array}{c} j \\ i \end{array} \right) a^{j-i} b^i t^{h(j-i)+ik} \right] & = \quad 0 \end{array} \tag{1.31}$$

Le polynôme $P_M(y)$ contiendra alors

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (M+1) = \frac{(M+1)(M+2)}{2} = N \tag{1.32}$$

monômes, tous de la forme Kt^λ où K est une constante et λ un exposant entier positif, dont certains pourront être semblables. Or, comme tout nombre entier peut être écrit modulo M, on aura pour tout λ

$$t^\lambda = t^{\theta u + \mu} = x^\theta t^\mu \tag{1.33}$$

où θ et μ sont des nombres entiers positifs et $\mu < u$. Parmi les monômes qui interviennent dans le polynôme $P_M(y)$, tous ceux dont l'exposant de t est plus grand ou égal à M peuvent ainsi être écrits comme des produits d'une puissance entière positive de x et d'une puissance t^μ où $\mu < u$. Après avoir opéré ces réécritures, on aura alors une équation entière en t

dont les coefficients sont des polynômes en x et des fonctions linéaires des coefficients A_j $(j = 0, 1, ..., M-1)$. Cette équation pourra être écrite ainsi :

$$\sum_{j=0}^{M-1} B_j t^j = 0 \tag{1.34}$$

Or, si $0 \leq j \leq u-1$, on a

$$t^j = x^{\frac{j}{M}} \tag{1.35}$$

où les exposants $\frac{j}{M}$ sont tous différents entre eux et sont aussi plus petits que 1 et plus grands ou égaux à 0. Les puissances t^j $(0 \leq j \leq M-1)$ peuvent ainsi être traitées comme une base d'un espace vectoriel et il est donc possible d'appliquer la méthode des coefficients indéterminés, ce qui fournit M équations linéaires dans les inconnues A_j $(j = 0, 1, \ldots u-1)$:

$$\{B_j = 0\}_{j=0}^{j=u-1}$$

Pour trouver l'équation entière cherchée, il faut ainsi résoudre ce système, et obtenir ainsi les coefficients A_j $(j = 0, 1, \ldots u-1)$ sous la forme de fonctions rationnelles de x. Même si ces fonctions n'étaient pas toutes entières, il serait de toute façon aisé de transformer l'équation obtenue de l'équation (1.30) en substituant ces fonctions aux coefficients A_j $(j = 0, 1, \ldots u-1)$ en une équation entière, que serait alors équivalente à l'équation (1.24) qui avait été donnée. Comme on sait *a priori* que la réduction qu'on cherche à réaliser est possible, on peut aussi être sur que ce système est déterminé. Ceci ne peut pourtant pas être prouvé directement. On ne peut pas non plus être sûr qu'on sache effectivement résoudre ce système, qui devient rapidement très complexe lorsque les nombres M augmentent. Le cas considéré n'est d'ailleurs qu'un des plus simples qu'on puisse imaginer, de sorte que dans d'autres cas, la procédure à suivre pour obtenir l'équation entière cherchée pourrait être encore plus complexe.

1.6.4 Note D

Si une courbe géométrique est exprimée par une équation Algébrique qu'on sait mettre sous la forme $y = f(x)$, où $f(x)$ est une expression Algébrique, alors du fait que l'Algèbre des segments de Descartes est déterminative, il s'ensuit qu'on sait construire, par règle, compas et réitération, n'importe quel point de cette courbe. Si l'équation est du deuxième degré, cette construction est d'ailleurs une simple construction par règle et compas[131]. Descartes semble penser de surcroît qu'il est possible de parvenir à construire par règle, compas et réitération n'importe quel point d'une courbe géométrique, même si on ne sait pas mettre l'équation qui exprime cette courbe sous la forme $y = f(x)$. L'équation Algébrique $F(x, y) = 0$ étant donnée, il est en effet aisé de transformer cette équation en une équation à une seule variable, $G(y) = F(a, y) = 0$ en assignant à une de ses variables (disons x) une valeur déterminée (disons a). Ceci étant fait, on peut ensuite chercher deux équations à deux variables $\Phi(z, y) = 0$ et $\Psi(z, y) = 0$, dont chacune exprime une courbe qu'on sait déjà construire par règle, compas et réitération, telles que toute racine de l'équation $G(y) = 0$

[131]Cf. Descartes (1637), 302-303.

soit aussi une racine de l'équation $R_{\Phi,\Psi}(y) = 0$, qui résulte du système

$$\begin{cases} \Phi(z, y) = 0 \\ \Psi(z, y) = 0 \end{cases}$$

en éliminant z, c'est-à-dire que :

$$R_{\Phi,\Psi}(y) = P(y)\,[G(y)]$$

où $P(y)$ est un polynôme en y. Il est clair alors que toutes les racines réelles de l'équation $G(y) = 0$, et donc tous les points de la courbe d'équation $F(x, y) = 0$ d'abscisse $x = a$, correspondront à des intersections des deux courbes d'équation $\Phi(z, y) = 0$ et $\Psi(z, y) = 0$; si $P(y) = 0$ n'a pas de racines réelles, toutes les intersections de ces courbes donneront un point d'abscisse $x = a$ de la courbe d'équation $F(x, y) = 0$. Cette méthode est illustrée par Descartes dans le troisième livre de la *Géométrie*, où elle est appliquée à la construction des racines d'une équation quelconque (l'équation choisie par Descartes n'est pas exactement quelconque, car elle doit respecter une condition relative à la relation de deux de ses coefficients, mais il est facile de la rendre quelconque par une translation convenable[132] de sixième degré, à une variable[133]. Et Descartes affirme en clôturant la *Géométrie*[134], sans en donner pourtant aucune preuve, que cette même méthode — qui deviendra ensuite une technique habituelle de la théorie de la "construction des équations"[135] — peut être appliquée à la construction (par règle, compas et réitération) des racines de n'importe quelle équation Algébrique à une variable. Il s'ensuit que Descartes pense pouvoir construire par règle, compas et réitération n'importe quel point d'une courbe exprimée par n'importe quelle équation Algébrique.

Cela ne signifie pourtant pas encore que la donnée d'une équation Algébrique, qu'on choisit de référer à un certain système de coordonnées cartésiennes soit équivalente à la donnée d'une construction par règle, compas et réitération de la courbe que cette équation est censée exprimer, car la construction par règle, compas et réitération de n'importe quel point de la courbe n'est nullement une construction par règle, compas et réitération de la courbe elle-même.

Descartes distingue d'ailleurs entre construction, par règle, compas et réitération, de n'importe quel point d'une courbe et construction, par règle, compas et réitération d'une infinité de points particuliers d'une courbe. Clavius avait présenté, dans son commentaire aux *Éléments*, en particulier au livre VI[136], une construction, par règle et compas, de tout point d'une quadratrice dont la projection horizontale sur le côté du carré générateur est un des points qui partagent ce même côté en 2^i $(i = 1, 2, ...)$ parties égales. Descartes[137] observe que par des constructions comme celle-ci "on ne trouve pas indifferement tous les poins de la ligne qu'on cherche, mais seulement ceux qui peuuent estre determinés par quelque mesure plus simple que celle qui est requise pour la composer"[138].

---

[132]Cf. Bos (1981), 306, note 11.
[133]Cf. la note (97), ci-dessus.
[134]Cf. Descartes (1637), 412-413.
[135]Bos (1984), en particulier 342-344 et (1986)
[136]Cf. Clavius (1611-1612), I, 296-304
[137]Cf. Descartes (1637), 339-340.
[138]Sur la question, cf. entre autres, Vuillemin (1960), 86 ; Bos (1981), 302 ; et Mancosu (1996), 74-76.

Or, Bos a soutenu[139] que Descartes considère que la constructibilité par règle, compas et réitération de n'importe quel point d'une courbe est une condition suffisante pour la donation de la courbe, lorsque celle-ci est conçue comme un lieu qui fournit la solution finale d'un problème, tandis qu'il demande plus (à savoir que la courbe elle même soit constructible par règle, compas et réitération), lorsque cette courbe est censée entrer dans une autre construction. Pour justifier la première partie de son appréciation, Bos se réclame de différents passages dans la *Géométrie*. D'abord, il considère[140] la solution, que Descartes fournit pour le problème de Pappus pour trois ou quatre droites[141], où aucune méthode explicite de construction par règle, compas et réitération n'est exhibée, sans que cette solution soit par ailleurs considérée comme étant incomplète. Il faut pourtant observer (comme d'ailleurs Bos le reconnaît lui aussi[142]) que dans le cas d'une conique, la construction des sommets, des axes et des foyers (ou de quelques autres paramètres dont cette connaissance découle), que Descartes ne manque pas de donner, est une condition suffisante pour déterminer aisément une procédure de construction par règle, compas et réitération de la courbe elle-même. On peut donc penser que, dans le cas de sa solution du problème de Pappus pour trois ou quatre droites, Descartes ne fait que laisser implicite ce qui est facile d'expliciter à partir des données qu'il fournit. Ensuite, Bos se réclame de la solution du problème de Pappus pour cinq droites, dont quatre parallèles et la cinquième perpendiculaire à celles-ci, les distances $d_1, d_2, ..., d_5$ étant prises sous des angles droits[143]. Si la distance à cette dernière droite est placée dans le membre de droite de (1.23), alors la courbe solution du problème est un lieu que Descartes montre comment construire ; si cette distance est placée dans le membre de gauche, alors la courbe solution est un lieu, dont Descartes dit seulement comment il est possible d'en construire n'importe quel point. Rien ne nous laisse penser pourtant qu'une telle description de cette courbe soit conçue par Descartes comme une exhibition de la solution du problème. Il semble plutôt que celui-ci ne soit ici en train que d'indiquer rapidement quelques caractéristiques qu'une telle solution devrait satisfaire. Ceci semble plutôt se confirmer lorsqu'on passe au troisième passage considéré par Bos[144] : "[...] ayant expliqué — dit Descartes[145] — la façon de trouver vne infinité de poins par où elles [des courbes solutions du problème de Pappus en d'autres cas] passent, ie pense auoir assés donné le moyen de les descrire". Mais il ajoute, peu après[146] : "Et pource que cete façon de trouuer une ligne courbe, en trouuant indifferement plusieurs de ses poins, ne s'estend qu'à celles qui peuuent aussy estre descrites par vn mouuement regulier & continu, on ne la doit pas entierement reietter de la Geometrie". Comme Bos l'observe, Descartes ne fournit pas de démonstration pour cette affirmation, mais il n'avance pas de doutes à son égard.

Il semble alors que la constructibilité, par règle, compas et réitération, de n'importe quel point d'une courbe ne soit une raison pour recevoir cette courbe en géométrie que parce que cette constructibilité est censée impliquer la contructibilité, par règle, compas et

[139] Cf. Bos (1981), 302-303 et 315-319.
[140] Cf. Bos (1981), 302-303.
[141] Cf. Descartes (1637), 324-334.
[142] Cf. Bos (1981), 315.
[143] Cf. Descartes (1637), 335-339.
[144] Cf. Bos (1981), 317-318.
[145] Cf. Descartes (1637), 339.
[146] Cf. Descartes (1637), 340.

réitération, de la courbe elle-même[147]. La possibilité de réaliser la première construction est ainsi conçue par Descartes comme un symptôme de la possibilité de réaliser la deuxième : une construction d'une courbe par points est une construction légitime en géométrie si et seulement si elle est une reconstruction d'une autre construction par règle, compas et réitération. Si l'on savait construire n'importe quel angle dont on connaît le rapport avec l'angle droit (c'est-à-dire la valeur), alors on saurait aussi construire par points autant la spirale que la quadratrice. Il suffirait d'établir les relations entre les vitesses des deux mouvements qui interviennent dans l'engendrement de ces courbes et de les exprimer par une équation convenable faisant intervenir la valeur d'un angle. Cette construction de la quadratrice serait, à la différence de celle conçue par Clavius, non pas une construction d'une infinité de points particuliers de cette courbe, mais une construction de n'importe quel point de la courbe. Mais elle se servirait d'une équation comme moyen non pas d'exprimer une condition, mais de la fixer. En tant qu'elle est fixée par une équation, cette condition porte sur une valeur (la valeur d'un angle) qu'on sait exprimer, mais à laquelle on ne sait associer aucune construction véritablement géométrique[148]. La géométrie à elle seule, c'est-à-dire la procédure de construction par règle, compas et réitération, ne sait pas caractériser la courbe. Et c'est pour cette raison que cette courbe n'est pas géométrique. C'est seulement la possibilité de caractériser une courbe par la seule géométrie (c'est-à–dire, par son identification à une procédure de construction par règle, compas et réitération) qui fait de cette courbe une courbe géométrique. Une construction par points fondée sur la considération de l'équation exprimant une courbe géométrique ne peut, tout au plus, que permettre de retrouver ce que la procédure de construction par règle, compas et réitération doit savoir déterminer à elle seule[149]. Et ce n'est, il me semble, que l'exhibition de cette construction qui est censée valoir comme une donation d'une telle courbe[150].

[147] Sur les liens entre les deux critères, cf. Bos (1981), 317-318, 324 and 326.
[148] Cf. la note (90), ci-dessus.
[149] Cf. Lachterman (1989), 173-174.
[150] Sur la relation entre construction d'une courbe par règle, compas et réitération et construction d'une courbe par points, s'appuyant sur l'équation de la courbe, cf. Serfati (1993), 217-218 et 225-228.

Deuxième partie

Les principales sources de Newton

Ce fut probablement en 1664 que Newton — à l'époque étudiant à Cambridge — commença à étudier les mathématiques[151]. Il lut : les *Éléments* d'Euclide[152] ; la *Clavis mathematicæ* de W. Oughtred[153] ; l'*Opera Mathematica* de Viète, édité par F. van Schooten[154] ; la *Dioptrique* de Descartes, en édition latine[155] ; les *Exercitationum Mathematicarum* de van Schooten, avec l'appendice contenant le *De ratiociniis in ludo aleæ*[156] ; la deuxième édition latine de la *Géométrie* de Descartes publiée par le même van Schooten, avec les commentaires et les ajouts de van Schooten et des mathématiciens de son école[157] ; l'*Operum matematicorum pars altera* de Wallis[158], en particulier l'*Arithmetica infinitorum*[159]. Parmi ces lectures relativement restreintes, celles de l'*Arithmetica Infinitorum* et de la deuxième édition latine de la *Géométrie*, en particulier les parties concernant la méthode des tangentes et des normales, jouèrent un rôle absolument fondamental dans la formation des idées de Newton. À tel point qu'on ne comprendrait pas l'évolution de ces idées sans les comparer avec les résultats et les approches de Wallis et de Descartes eux-mêmes. Avant d'en venir à Newton, il est donc nécessaire d'analyser, dans leur lignes essentielles, autant la méthode de quadrature exposée par Wallis dans l'*Arithmetica infinitorum*, que la méthode des tangentes des Descartes. C'est l'objet des deux prochains chapitres.

[151] Pour une biographie de Newton cf. entre autres Westfall (1980) et (1994) et Hall (1992). À propos de ses premières études et de ses premières lectures concernant la nouvelle philosophie naturelle et les mathématiques — deux intérêts complémentaires que Newton cultiva en dehors de ses études universitaires, qu'il abandonna bien tôt — cf., outre les nombreuses informations apportées par Whiteside dans ses introductions, notes et commentaires au premier volume des *Mathematical Papers*, aussi Westfall (1980), 111-138 et Hall (1992), 14-29.

[152] Newton consulta probablement d'abord l'édition bilingue (en grec et latin) de Paris de 1573, qui ne contient que les énoncés des propositions [cf. Euclide (GLP, 1573)] et passa ensuite à l'édition de Barrow [cf. Euclide (B, 1655)], qui contient aussi une traduction des *Données* du même Euclide.

[153] Cf. Oughtred (1631). Newton lut la troisième édition de 1652.

[154] Cf. Viète (OPvS).

[155] La première édition latine de la *Dioptrique* est Descartes (DM, 1650).

[156] Cf. van Schooten (1657), l'appendice occupe les pages 517-534.

[157] Cf. Descartes (GvS, II).

[158] Cf. Wallis (1656*a*)

[159] Cf. Wallis (1656*d*). Bien que la page de garde porte la date de 1656, le livre de Wallis a été imprimé de l'été 1655 [cf. Scriba (1976), 148a]. La date de la page de garde se réfère probablement à la mise en circulation de l'ouvrage, après l'addition des trois propositions finales [cf. Wallis (1656*a*), prop. CXCII-CXCIV, 193-194], d'un scholium [*ibid.* 193-198] et d'un *post-scriptum* à la *Dedicatio* [*ibid.*, [13]-[14]] : cf. Newton (MP), I, 100, continuation de la note 23.

Chapitre 2

L'*Arithmetica infinitorum* de John Wallis

L'*Arithmetica infinitorum* peut être divisée en deux parties[1]. La première partie est consacrée à la recherche d'un algorithme propre à fournir la quadrature d'une certaine classe de courbes géométriques simples, constituée par généralisation des conditions qui caractérisent une parabole ou une hyperbole[2] ; la deuxième partie vise une extension de cet algorithme propre à fournir la quadrature du cercle. Les termes "algorithme de quadrature" et "quadrature du cercle" ne doivent pourtant pas être entendus ici selon leur signification moderne. Une exposition du parcours de Wallis expliquera la signification qu'il faut leur assigner.

2.1 La quadrature des paraboles et des hyperboles généralisées

La plupart des interprètes ont traduit le résultat auquel Wallis parvient dans la première partie de son traité par l'égalité suivante :

$$\int_0^\xi ax^r dx = \frac{1}{r+1}a\xi^{r+1} \qquad [r \neq -1] \tag{2.1}$$

où r est un nombre réel algébrique quelconque. Même si on résistait à la tentation d'employer la notation intégrale pour énoncer un résultat obtenu dans un contexte mathématique dont autant la notion d'intégrale que le formalisme du calcul intégral étaient absents, encore on

[1] Cf. respectivement Wallis (1656*d*), 1-84 and 84-198. Pour une analyse détaillée du texte de Wallis, cf. Scott (1938) et Panza (1995), 163-211 (dont le présent chapitre peut être considéré comme une version mise à jour). Cf. aussi : Cantor (1880-1908), II, 822-827 ; Prag (1931), 387-391 ; Whiteside (1960-1962), 236-243 ; Baron (1969), 208-211.

[2] Wallis montre aussi comment son algorithme pourrait s'appliquer à la recherche de certaines cubatures et à la détermination des rapports entre certains segments de spirale. Il est possible d'éviter ici de prendre en compte ces applications.

ne serait pas fidèle au texte de Wallis si l'on acceptait de présenter ce résultat comme la détermination de l'aire du trapézoïde délimité par toute courbe d'équation $y = ax^r$.

D'abord, pour Wallis il n'y a rien de similaire à une classe de courbes d'équation $y = ax^r$: non seulement Wallis ne suit pas Descartes en énonçant que chaque courbe géométrique peut être exprimée par une équation Algébrique (référée à un système de coordonnées cartésiennes fixé), mais il ne semble pas non plus le suivre en définissant une opération de multiplication sur les segments, de sorte à donner sens à l'écriture x^r, r étant un exposant rationnel ou, *a fortiori*, un nombre réel algébrique quelconque.

Ensuite, Wallis ne conçoit guère le problème de la quadrature d'une courbe comme le problème de la détermination d'une écriture Algébrique exprimant l'aire du trapézoïde délimité par cette courbe, évalué entre l'origine et une abscisse quelconque $x = \xi$, et *a fortiori*, il est loin de le concevoir comme le problème de la détermination d'une fonction d'une limite d'intégration, exprimant l'aire d'une courbe exprimée, à son tour, par une autre fonction. Une courbe étant donnée, le problème de sa quadrature consiste plutôt, pour lui, dans la détermination du rapport entre le trapézoïde délimitée par cette courbe et un parallélogramme donné en même temps que la courbe elle-même. Si on note respectivement par "$\mathcal{T}$" et "$\mathcal{P}$" ce trapézoïde et ce parallélogramme, alors ceci revient à déterminer la quatrième proportionnelle ξ dans la proportion

$$\mathcal{T} : \mathcal{P} = 1 : \xi \tag{2.2}$$

S'il est vrai que Wallis interprète désormais une proportion comme une identité entre deux rapports[3], et que la détermination du quatrième proportionnel ξ revient, de ce point de vue, à la détermination d'un nombre $\frac{1}{\xi}$ exprimant le rapport $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{P}}$ entre le trapézoïde $\mathcal{T}$ délimité par la courbe et le parallélogramme de référence $\mathcal{P}$, il reste qu'il ne cherche pas à exprimer des aires par des expressions Algébriques. Il vise la détermination d'un rapport qui indique la procédure à suivre pour construire un carré égal au trapézoïde délimité par la courbe donnée. Non seulement Wallis n'a donc pas encore franchi le pas qui sera franchi quelques années plus tard par Newton, et qui conduit justement à penser les problèmes de quadrature comme des problèmes visant la détermination de l'expression d'une aire, mais il n'a pas non plus adopté le point de vue de Descartes et il ne se sert pas de l'Algèbre des segments de ce dernier.

Pour comprendre le résultat auquel Wallis parvient et l'interpréter à la lumière de son point de vue, il vaut mieux, au lieu de chercher à exprimer ce résultat d'emblée, par une formule générale, suivre son parcours.

Wallis cherche d'abord[4] un nombre entier positif m qui puisse fournir le quatrième proportionnel dans la proportion

$$\mathsf{AOT} : \mathsf{ADOT} = 1 : m \tag{2.3}$$

où ADOT (fig.1) est un parallélogramme et la courbe AO délimitant le trapézoïde AOT — qui se réduit dans ce cas à un triangle curviligne — est telle que pour tout choix des points

[3]Wallis ne rendra explicite ce point de vue que quelques années plus tard, dans son *Algèbre* [cf Wallis (1685), ch. XIX, 78-79 et Wallis (1693), 85-93]. Ce point de vue est pourtant déjà clairement présent implicitement dans l'*Arithmetica infinitorum*. Pour une discussion de la conception des proportions de Wallis, cf. Gardies (1988), 129-135.

[4]Cf. Wallis (1656*d*), prop. I-L, 1-41.

T_1 et T_2, les segments $\mathsf{T}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{T}_2\mathsf{O}_2$, parallèles au côté AD de ce parallélogramme, sont entre eux en une raison n-uple de la raison qu'ont entre eux les segments $\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2$, parallèles à l'autre côté AT de ce même parallélogramme. Wallis aborde ce problème par étapes, d'abord pour $n = 1$, ensuite pour $n = 2$, *etc.* C'est seulement la constatation de l'invariance de forme qui lie entre elles les solutions obtenues pour des petites valeurs de n qui conduit Wallis à une généralisation.

Si $n = 1$[5], la courbe AO se réduit à une droite, de sorte que AOT n'est rien qu'un triangle rectiligne. Les segments $\mathsf{T}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{T}_2\mathsf{O}_2$ seront alors entre eux comme les segments $\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2$. Dans ce cas le problème a évidemment une solution banale : $m = 2$. Ce qui est intéressant n'est pourtant pas cette solution, mais la manière par laquelle Wallis la justifie. Car une telle justification est aisément généralisable. Wallis observe que les rapports

$$\frac{0+1}{1+1} \quad ; \quad \frac{0+1+2}{2+2+2} \quad ; \frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} \quad ; \frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4} \quad ; \dots \tag{2.4}$$

sont tous égaux à $\frac{1}{2}$, ou bien, pour le dire d'une manière générale (qui n'est pas à la disposition de Wallis, faute d'une notation convenable) que, quel que soit le nombre entier strictement positif h[6],

$$\frac{\sum_{i=0}^{h} i}{\sum_{i=0}^{h} h} = \frac{\sum_{i=0}^{h} i}{h(h+1)} = \frac{1}{2} \tag{2.5}$$

Il n'est pas difficile de voir comment cette égalité peut être démontrée en toute généralité et il n'y a pas de doute que Wallis aurait parfaitement pu en fournir une preuve. Il se limite pourtant à la justifier inductivement, sans doute pour adopter, dès le premier exemple, la méthode qu'il emploiera par la suite.

Or, continue Wallis, le triangle AOT et le parallélogramme ADOT peuvent être conçus respectivement, d'après la méthode des indivisibles de Cavalieri[7], comme composés par une infinité de droites parallèles se comportant les unes relativement aux autres comme les termes des sommes $\sum_{i=0}^{h} i$ et $\sum_{i=0}^{h} h$ prolongées jusqu'à l'infini. Mais, le rapport de ces deux séries est égal à $\frac{1}{2}$, quel que soit h. Il doit donc, nous dit Wallis, rester égal à $\frac{1}{2}$ aussi lorsque ces sommes sont prolongées jusqu'à l'infini. Il s'ensuit que le rapport entre le triangle AOT et le parallélogramme ADOT est, lui aussi, égal à $\frac{1}{2}$.

De quelque manière qu'on envisage de le justifier, l'argument de Wallis ne porte pas sur la somme des éléments indivisibles considérés, mais sur la relation entre la modalité de variation des cordes successives d'un triangle et la modalité de variation des cordes successives d'un parallélogramme. Dans ce sens, le fait que les sommes $\sum_{i=0}^{h} i$ et $\sum_{i=0}^{h} h$, prolongées jusqu'à l'infini, se transforment dans des séries divergentes ne comporte aucune difficulté.

[5]Cf. Wallis (1656*d*), prop. I-III, 1-3.

[6]Pour simplifier, j'emploierai dans la suite le symbole "$\sum_{i=0}^{h} H$" où H est une constante (par rapport à i) pour me référer à la somme $\sum_{i=0}^{h} a_i$, où on pose $a_i = H$ pour tout i entre 0 et h.

[7]Cf. Cavalieri (1653). À propos de la méthode de Cavalieri, cf., entre autres, Giusti (1980).

Car ce dont il est question n'est pas la valeur de ces séries, mais leur rapport. On pourrait arriver à soutenir que Wallis raisonne ici, implicitement, en termes fonctionnels. C'est en fait toute la puissance de son argument. C'est cela d'ailleurs qui rend cet argument aisément généralisable, non seulement à des triangles dont deux des trois côtés sont donnés par des courbes, dont les cordes croissent en progression arithmétique, comme dans un triangle rectiligne[8], mais aussi à des triangles curvilignes délimités par deux cotés rectilignes et par une parabole généralisée de n'importe quel ordre.

Si l'on suppose que la courbe AO est une branche d'une parabole dont le point A est le sommet, alors il suffit de supposer aussi que le côté AD du parallélogramme ADOT coïncide avec le diamètre de cette parabole pour en tirer que les segments $\mathsf{T}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{T}_2\mathsf{O}_2$ sont entre eux en une raison double de la raison qu'ont entre eux les segments $\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2$. C'est la formule choisie par Wallis pour caractériser la "demi-parabole" AO : "TO, TO, &c. [sunt] in ratione duplicata ipsarum DO, DO, &c."[9].

Dans le langage de la théorie des proportions, ceci signifie que les segments $\mathsf{T}_1\mathsf{O}_1$, $\mathsf{T}_2\mathsf{O}_2$, $\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2$ satisfont le système de proportions

$$\begin{array}{l} \mathsf{T}_1\mathsf{O}_1 : \mathsf{T}_2\mathsf{O}_2 = \alpha : \beta \\ \mathsf{D}_1\mathsf{O}_1 : \mathsf{D}_2\mathsf{O}_2 = \alpha : \gamma = \gamma : \beta \end{array} \tag{2.6}$$

où α, β et γ sont des quantités quelconques, homogènes entre elles, dont une (par exemple α) est fixée arbitrairement et les deux autres sont déterminées à partir de celle ci, en tant que des quatrièmes proportionnelles convenables. Si on suppose que la première de ces quantités est le segment unité, ou même, plus simplement, si on transforme les proportions précédentes en égalités entre produits, et si on pose, pour simplicité, $\mathsf{D}_i\mathsf{O}_i = x_i$ et $\mathsf{T}_i\mathsf{O}_i = y_i$ $(i = 1, 2)$, on en tire que

$$y_1 : y_2 = ax_1^2 : ax_1^2 \tag{2.7}$$

où a est un coefficient constant quelconque. Il suffit d'observer que les points T_1 et T_2 sont quelconques et que, la courbe étant donnée, le choix de ces points détermine le choix des points D_1 et D_2, pour passer de là à l'équation

$$y = ax^2 \tag{2.8}$$

qui, dans l'Algèbre des segments de Descartes, exprime bien la parabole AO par rapport à l'axe AT, tangente à la parabole à son sommet A, pris comme origine, et à l'angle $\mathsf{T\hat{A}D}$ que cet axe forme avec le diamètre de la parabole.

Bien que Wallis ne suive pas Descartes dans cette simplification de l'expression de la loi qui caractérise une parabole quelconque, il comprend qu'une parabole se caractérise, par rapport à toute autre courbe, par une relation intime avec la puissance 2 (et seulement avec une raison double). Pour déterminer la valeur de m lorsque la courbe AO est une parabole,

[8] Cf. Wallis (1656*d*), prop. III, 2-3.

[9] Cf. Wallis (1656*d*), prop. XXIII, 18. L'introduction des indices est évidemment de mon fait, et ne correspond pas à la notation de Wallis, qui utilise les mêmes lettres "T", "D" et "O" pour indiquer plusieurs points.

il se réclame en effet des sommes $\sum_{i=0}^{h} i^2$ et $\sum_{i=0}^{h} h^2$. Il observe que[10], quel que soit h,

$$\frac{\sum_{i=0}^{h} i^2}{\sum_{i=0}^{h} h^2} = \frac{\sum_{i=0}^{h} i^2}{h^2(h+1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6h} \tag{2.9}$$

Si les sommes $\sum_{i=0}^{h} i^2$ et $\sum_{i=0}^{h} h^2$ sont donc prolongées à l'infini, leur rapport devient égal à $\frac{1}{3}$. En symboles, cela peut s'écrire ainsi

$$\left[\frac{\sum_{i=0}^{h} i^2}{\sum_{i=0}^{h} h^2}\right]_{h=\omega} = \left[\frac{\sum_{i=0}^{h} i^2}{h^2(h+1)}\right]_{h=\omega} = \frac{1}{3} \tag{2.10}$$

où ω est un nombre infini[11]. De là Wallis tire que si la courbe AO est une branche de parabole, alors le rapport entre le triangle curviligne AOT et le parallélogramme ADOT est, lui aussi, égal à $\frac{1}{3}$. On aura alors $m = 3$.

La même procédure s'applique lorsqu'on suppose que AO est une branche de parabole généralisée dont le point A est le sommet, c'est-à-dire qu'elle possède un diamètre qui la coupe dans un sommet A et coïncide avec le côté AD du parallélogramme ADOT, dont l'autre côté AT est tangent à cette courbe dans ce même sommet, et que les segments $\mathsf{T}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{T}_2\mathsf{O}_2$ sont entre eux en une raison multiple quelconque de la raison qu'ont entre eux les segments $\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2$.

Dans le langage de la théorie des proportions ceci signifie que les segments $\mathsf{T}_1\mathsf{O}_1$, $\mathsf{T}_2\mathsf{O}_2$, $\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2$ satisfont le système de proportions

$$\begin{array}{l} \mathsf{T}_1\mathsf{O}_1 : \mathsf{T}_2\mathsf{O}_2 = \alpha : \beta \\ \mathsf{D}_1\mathsf{O}_1 : \mathsf{D}_2\mathsf{O}_2 = \alpha : \gamma_1 = \gamma_1 : \gamma_2 = \gamma_2 : \ldots : \gamma_{n-1} = \gamma_{n-1} : \beta \end{array} \tag{2.11}$$

où n est un nombre entier strictement positif et α, β, $\gamma_1, \ldots \gamma_{n-1}$ sont des quantités homogènes quelconques, dont une (par exemple α) est fixée arbitrairement et les n autres sont déterminées à partir de celle-ci, en tant que quatrièmes proportionnelles convenables. On aura alors la proportion

$$y_1 : y_2 = ax_1^n : ax_1^n \tag{2.12}$$

où a est un coefficient constant quelconque, et donc, dans le formalisme de l'Algèbre des segments de Descartes, l'équation

$$y = ax^n \tag{2.13}$$

[10] Encore une fois ce résultat est justifié inductivement. Sa preuve déductive serait bien plus complexe que celle de l'égalité (2.5). Wallis aurait d'ailleurs seulement pu l'entreprendre par la méthode d'exhaustion.

[11] Cf. Wallis (1656*d*), prop. XLIV, 35. Cette interprétation me semble plus proche de la conception de Wallis que celle se réclamant de la limite de $\frac{\sum_{i=0}^{h} i^2}{\sum_{i=0}^{h} h^2}$ pour h qui tend vers l'infini, proposée par Whiteside et Baron [cf. Whiteside (1960-1962), 319-320 et Baron (1969), 209-210].

référée à l'axe AT, à l'origine A et à l'angle $\mathsf{T\hat{A}D}$.

Encore une fois Wallis ne suit pas Descartes dans une telle simplification ; il se limite à qualifier les courbes qu'il identifie successivement avec AO de "demi-parabole cubique", "demi-parabole bicarrée", "demi-parabole supersolide", etc. et à les caractériser en termes de compositions convenables de raisons. Il reconnaît néanmoins, aussi dans ces cas, que ces paraboles généralisées se caractérisent, par rapport à toute autre courbe, par une relation intime avec la puissance n (et non seulement avec une raison n-uple). Pour déterminer la valeur de m, il considère en effet les sommes $\sum_{i=0}^{h} i^n$ et $\sum_{i=0}^{h} h^n$, il observe que

$$\left[\frac{\sum_{i=0}^{h} i^n}{\sum_{i=0}^{h} h^n}\right]_{h=\omega} = \left[\frac{\sum_{i=0}^{h} i^n}{h^n(h+1)}\right]_{h=\omega} = \frac{1}{n+1} \tag{2.14}$$

et il conclut que le rapport entre le triangle curviligne AOT délimité par la parabole d'ordre n et le parallélogramme ADOT correspondant est égal à $\frac{1}{n+1}$, ce qui donne : $m = n + 1$.

Le résultat exprimé par (2.14) peut s'exprimer aussi par le biais d'une correspondance entre les termes des deux progressions arithmétiques de raison unitaire, la première, de base 0, indiquant les valeurs successives de l'exposant n, et la deuxième, de base 1, indiquant les valeurs correspondantes de m. Si on indique par ${}_{\lambda}T^{\sigma}_{\nu}$ le ν-ième terme de la progression arithmétique de raison σ et de base λ, ce résultat peut alors s'exprimer par la correspondance

$${}_{0}T^{1}_{n+1} = n \longrightarrow {}_{1}T^{1}_{n+1} = n + 1 \tag{2.15}$$

L'égalité (2.14) exhibe donc un algorithme, valable pour tout nombre entier positif n, qui conduit de la puissance n au rapport $\frac{1}{n+1}$. Vue de cette manière, cette égalité institue une table qui fait correspondre des nombres entiers positifs à d'autres nombres entiers positifs, selon une règle qui conserve la forme d'une progression arithmétique : si les nombres qui constituent les entrées successives de cette table forment une progression arithmétique, alors les nombres qui constituent les sorties correspondantes forment, eux aussi, une progression arithmétique.

Bien qu'apparemment banale, cette constatation, est à la base de la généralisation que Wallis propose pour l'égalité (2.14) et, par conséquent, pour la méthode de quadrature que lui est associée. Celui-ci commence par observer[12] que de la connaissance de n'importe quel couple de nombres que cette table associe entre eux, il est facile de déduire le nombre que cette même table associe à n'importe quel autre nombre, sans s'appuyer pour ceci sur la loi d'association, mais en ne considérant que la condition de conservation de la forme d'une progression arithmétique. Ainsi si cette table associe le nombre θ au nombre ϑ ($\vartheta \longrightarrow \theta$) et qu'entre le nombre ϑ et un autre nombre quelconque τ il y a, mettons, $\mu - 1$ intermédiaires, alors la table devra associer à τ le nombre qui est séparée de θ par $\mu - 1$ intermédiaires. En d'autre termes :

$$\left.\begin{array}{c}\vartheta \longrightarrow \theta \\ \tau = \vartheta \pm \mu\end{array}\right\} \Rightarrow \tau \longrightarrow \theta \pm \mu \tag{2.16}$$

[12]Cf. Wallis (1656d), prop. XLVI-XLVII, 37-39.

Il est clair que, bien que la table en question n'associe entre elles que deux progressions arithmétiques de raison 1, la nature même d'une progression arithmétique fait que la règle énoncée par (2.16) vaut quelque soit la raison commune des progressions arithmétiques considérées. Observer cela revient au même que d'observer qu'il est possible d'extraire de la première table autant d'autres tables qu'on veut, qui associent entre elles deux progressions arithmétiques de raison égale, disons σ :

$$ {}_{\vartheta}T^{\pm\sigma}_{n+1} = \vartheta \pm n\sigma \longrightarrow {}_{\vartheta+1}T^{\pm\sigma}_{n+1} = \vartheta \pm n\sigma + 1 \tag{2.17} $$

Aussi banale qu'elle puisse apparaître, la constatation précédente revient à passer de la considération de la table associée à l'égalité (2.14), prise en tant que telle, à la considération de sa forme. Et, lorsque cette forme a été déterminée, il est facile de parvenir à une interpolation de cette table.

C'est ainsi que Wallis débute[13] la deuxième étape de son parcours. Si on suppose que $\pm\sigma$ est un nombre rationnel positif quelconque, disons $\frac{k}{q}$ (k et q étant des nombres entiers positifs, dont le deuxième est différent de zéro), et que l'on revient à la position $\vartheta = 0$, qui nous ramène au début de la table originale, on obtient sur le champ la règle d'association

$$ {}_{0}T^{\frac{k}{q}}_{n+1} = n\frac{k}{q} \longrightarrow {}_{1}T^{\frac{k}{q}}_{n+1} = n\frac{k}{q} + 1 \tag{2.18} $$

qui est évidemment valable pour tout nombre entier positif n et définit une nouvelle table extraite de la première par interpolation. Il suffit alors de poser $nk = p$ pour tirer de là l'égalité

$$ \left[\frac{\sum_{i=0}^{h} i^{\frac{p}{q}}}{\sum_{i=0}^{h} h^{\frac{p}{q}}}\right]_{h=\omega} = \left[\frac{\sum_{i=0}^{h} i^{\frac{p}{q}}}{h^{\frac{p}{q}}(h+1)}\right]_{h=\omega} = \frac{1}{\frac{p}{q}+1} = \frac{q}{p+q} \tag{2.19} $$

où $\frac{p}{q}$ est un nombre rationnel positif quelconque ; c'est la généralisation cherchée de (2.14).

Si on emploie le formalisme Algébrique de Descartes, il est aisé d'énoncer, en tant que conséquence immédiate d'une telle égalité, une règle de quadrature concernant une classe de courbes bien plus large que celle concernée par l'égalité (2.14) : lorsque la courbe AO délimitant le triangle curviligne AOT est telle que pour toute choix des points T_1 et T_2, on ait la proportion

$$ \mathsf{T}_1\mathsf{O}_1 : \mathsf{T}_2\mathsf{O}_2 = (\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1)^{\frac{p}{q}} : (\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2)^{\frac{p}{q}} \tag{2.20} $$

(p et q étant des nombres entiers positifs avec $q \neq 0$), c'est-à-dire que cette courbe est exprimée dans cette Algèbre par l'équation

$$ y = ax^{\frac{p}{q}} \tag{2.21} $$

référée à l'axe AT, à l'origine A et à l'angle $\mathsf{T\hat{A}D}$, alors le rapport entre le triangle curviligne AOT et le parallélogramme ADOT est égale à $\frac{q}{p+q}$.

Encore une fois pourtant Wallis n'emploie pas ce formalisme et il parle plutôt[14] de "paraboloïdes" telles que les ordonnées appliquées au diamètre (c'est-à-dire $\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2$)

[13] Cf. Wallis (1656*d*), prop. LI-LIV, 41-44 et LVIII-LIX, 46-48.

[14] Cf. Wallis (1656*d*), prop. LXI, 49-50 ; cf. la note (19), ci-dessus.

sont entre elles en raison double subtriple, double subquintuple,..., triple subquadruple, triple subquintuple,..., etc. des raisons des diamètres (c'est-à-dire $\mathsf{AD}_1 = \mathsf{T}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{AD}_2 = \mathsf{T}_2\mathsf{O}_2$). Il n'est pas difficile de comprendre quels systèmes de proportions correspondent à ces expressions assez baroques, et il n'est pas la peine ici d'insister sur ce point. Il est en revanche important de comprendre que la différence entre le langage de Descartes et celui de la théorie des proportions correspond ici à une différence plus profonde entre deux théories dans lesquelles les mêmes problèmes géométriques sont formulés et résolus.

Le formalisme de l'Algèbre de Descartes permet d'associer aux puissances fractionnaires $i^{\frac{p}{q}}$ intervenant dans la sommes $\sum_{i=0}^{h} i^{\frac{p}{q}}$ des puissances fractionnaires des segments AT_i $(i = 1, 2)$ ou, si on préfère, du segment variable x, et donc, en définitive, des équations. En revanche la théorie des proportions oblige à associer à ces puissances des progressions caractérisées par un double indice. Lorsqu'elle est considérée par rapport à ses applications, la table qui dérive de l'égalité (2.19) ne se présente pas comme une succession de correspondances entre un exposant fractionnaire $\frac{p}{q}$ et un dénominateur fractionnaire constituant un quatrième proportionnel, $m = \frac{p+q}{q}$, mais comme une matrice[15] associant le rapport $\frac{1}{m}$ à deux entiers positifs, fonctionnant comme des indices[16] :

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\quad p & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
q & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & \dots \\
1 & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \\
2 & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \dots \\
3 & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \frac{3}{7} & \dots \\
4 & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \frac{4}{7} & \frac{4}{8} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
\tag{2.22}
$$

Ceci aura de lourdes conséquences sur la suite de l'argumentation de Wallis qui ne saura jamais plus se libérer de ses matrices dont les côtés correspondent respectivement au dominateur et au dénominateur d'un rapport de nombres entiers positifs[17]. On verra dans le chapitre 4 comment la transformation opérée par Newton de la méthode de quadrature de Wallis débutera justement par l'abandon de ces matrices et l'interprétation de l'algorithme exprimé par l'égalité (2.19) comme une simple correspondance entre deux nombres fractionnaires.

Ceci étant dit, on ne peut éviter de remarquer que, coincé à l'intérieur des limites imposées par la théorie des proportions, Wallis a su associer un algorithme de quadrature

[15]Ici, et dans la suite de ma dissertation, j'utilise le terme "matrice" pour indiquer des tables à double entrée telles que la table (2.22), sans vouloir suggérer que Wallis ou quiconque ait associé à ces tables une quelque sorte d'algèbre matricielle au sens moderne.

[16]Cf. Wallis (1656*d*), prop. LIX, 47-48.

[17]On mesure ici la différence entre la géométrie de Descartes, où à chaque condition caractérisant une courbe géométrique correspond un objet Algébrique, c'est-à-dire une équation, et la théorie des proportions où, dans le plus heureux des cas, comme ce qui fait l'objet de la méthode de Wallis, à une courbe dont on suppose connaître des propriétés est associé un système de proportions [cf. ci-dessous, p. 49].

à son algorithme des rapports entre séries divergentes. Par la médiation de la méthode des indivisibles de Cavalieri, interprétée d'une nouvelle manière, la matrice (2.22) donne en effet la quadrature d'une large classe de courbes exprimées par des systèmes de proportions qu'il est relativement facile d'énoncer. La quadrature de ces courbes se réduit à la consultation de cette table, ou à l'application d'un algorithme fort simple qui en dérive.

* * *

Cet algorithme permet de trouver un nombre fractionnaire positif (ou, si on préfère, un rapport entre deux nombres entiers positifs) qui exprime le rapport entre certains triangles curvilignes et des parallélogrammes construits sur les côtés rectilignes de ces triangles. Si on indique par $\mathcal{T}$ un de ces triangles et par $\mathcal{P}$ le parallélogramme correspondant, ce résultat peut s'exprimer ainsi : $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{P}} = \frac{\mu}{\nu}$ (μ et ν étant des nombres entiers positifs). Si la courbe qui délimite le triangle curviligne est un paraboloïde pris à partir de son sommet et que les côtés rectilignes de ce triangle curviligne sont respectivement parallèles au diamètre de ce paraboloïde et à sa tangente dans ce même sommet, alors le triangle curviligne en question peut être associé à un nombre fractionnaire positif. L'algorithme associé à la méthode de Wallis, nous donne alors sur le champs le rapport $\frac{\mu}{\nu}$ cherché, et il nous dit en particulier que ce rapport est $\frac{p+q}{q}$, c'est-à-dire que $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{P}} = \frac{p+q}{q}$.

Or, si le triangle curviligne $\mathcal{T}$ est donné, alors aussi le parallélogramme $\mathcal{P}$, et donc sa base et son hauteur, sont donnés. Il est alors aisé de construire, en exploitant quelque proposition des *Éléments,* un segment $x_{\mathcal{T}}$ tel que le carré $Q(x_{\mathcal{T}})$ construit sur ce segment est égal au triangle curviligne $\mathcal{T}$[18]. L'égalité $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{P}} = \frac{\mu}{\nu}$ contient donc une prescription pour la construction d'un carré égal à $\mathcal{T}$. C'est dans ce sens qu'on peut dire que Wallis fournit la

[18]En particulier, en exploitant la proposition 13.VI des *Éléments*, on construit un segment $c_{\mathcal{P}}$ tel que

$$b_{\mathcal{P}} : c_{\mathcal{P}} = c_{\mathcal{P}} : a_{\mathcal{P}}$$

$b_{\mathcal{P}}$ et $a_{\mathcal{P}}$ étant respectivement la base et la hauteur de $\mathcal{P}$. En accord avec la proposition VI.16 des mêmes *Éléments,* le carré $Q(c_{\mathcal{P}})$ construit sur le segment $c_{\mathcal{P}}$ sera égal au rectangle construit sur $b_{\mathcal{P}}$ et $a_{\mathcal{P}}$, et donc à $\mathcal{P}$. Si $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{P}} = \frac{\mu}{\nu}$, on aura alors $\frac{Q(c_{\mathcal{P}})}{\mathcal{T}} = \frac{\nu}{\mu}$, c'est-à-dire que :

$$[\mathcal{T} = Q(x_{\mathcal{T}})] \Leftrightarrow [Q(c_{\mathcal{P}}) : Q(x_{\mathcal{T}}) = \nu : \mu]$$

Or, quel que soit $x_{\mathcal{T}}$, selon la proposition VI.1 des *Éléments*, on a aussi les proportions :

$$\begin{array}{c} Q(c_{\mathcal{P}}) : R(c_{\mathcal{P}}, x_{\mathcal{T}}) = c_{\mathcal{P}} : x_{\mathcal{T}} \\ Q(x_{\mathcal{T}}) : R(c_{\mathcal{P}}, x_{\mathcal{T}}) = x_{\mathcal{T}} : c_{\mathcal{P}} \end{array}$$

$R(c_{\mathcal{P}}, x_{\mathcal{T}})$ étant le rectangle construit sur les segments $c_{\mathcal{P}}$ et $x_{\mathcal{T}}$. En éliminant $R(c_{\mathcal{P}}, x_{\mathcal{T}})$ de ces proportions, on a alors

$$\begin{array}{c} Q(c_{\mathcal{P}}) : Q(x_{\mathcal{T}}) = \alpha : \beta \\ c_{\mathcal{P}} : x_{\mathcal{T}} = \alpha : \gamma = \gamma : \beta \end{array}$$

c'est-à-dire que si β est le quatrième proportionnel entre $Q(c_{\mathcal{P}})$, $Q(x_{\mathcal{T}})$ et une quantité α fixée, alors $c_{\mathcal{P}} : x_{\mathcal{T}} = \alpha : \gamma$, γ étant la moyenne proportionnelle entre α et β. Il s'ensuit ainsi que

$$[\mathcal{T} = Q(x_{\mathcal{T}})] \Leftrightarrow \left\{ (\nu : \mu = \alpha : \beta) \Rightarrow \left[\begin{array}{c} (\alpha : \gamma = \gamma : \beta) \Rightarrow \\ \Rightarrow (c_{\mathcal{P}} : x_{\mathcal{T}} = \alpha : \gamma) \end{array} \right] \right\}$$

Ainsi, si on fixe un segment α quelconque, la proportion $\nu : \mu = \alpha : \beta$ nous indique comment construire le segment β et de là la proportion $\alpha : \gamma = \gamma : \beta$ nous indique comment construire le segment γ. En disposant ainsi des segments $c_{\mathcal{P}}$, α et γ, il sera enfin aisé de construire le segment $x_{\mathcal{T}}$, qui ne dépendra évidemment pas du choix initial de α.

quadrature de la courbe qui délimite $\mathcal{T}$[19]. On comprend alors que Wallis n'associe pas un nombre à ce triangle curviligne, fonctionnant comme une mesure de celui-ci (une aire, au sens moderne de ce terme[20]). Il détermine un rapport de deux nombres entiers positifs qui est égal au rapport $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{P}}$ entre le triangle curviligne délimité par un de ces paraboloïdes et le parallélogramme construit sur ses côtés rectilignes, de sorte à rendre possible la construction d'un carré égal à $\mathcal{T}$. En restant fidèle à la tradition euclidienne, Wallis cherche ainsi une manière pour interpréter ce triangle curviligne comme une quantité.

Cela a une conséquence opérationnelle immédiate : bien que Wallis puisse utiliser sa méthode pour construire un carré égal à la somme de deux triangles curvilignes du genre considéré, il ne dispose de rien de semblable à un opérateur linéaire de quadrature. En d'autres termes : s'il peut parvenir à l'égalité

$$\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = Q(x_{\mathcal{T}_1}) + Q(x_{\mathcal{T}_2}) = Q(x_{\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2}) \tag{2.23}$$

où $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux triangles curvilignes délimités par un paraboloïde, et $x_{\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2}$ est évidemment l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont $x_{\mathcal{T}_1}$ et $x_{\mathcal{T}_2}$ sont les côtés, il n'énonce aucune égalité analogue à

$$Aire(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) = Aire(\mathcal{T}_1) + Aire(\mathcal{T}_1) = \frac{\mu_1}{\nu_1} Aire(\mathcal{P}_1) + \frac{\mu_2}{\nu_2} Aire(\mathcal{P}_2) \tag{2.24}$$

Je m'explique. Si $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont pris comme tels, comme des triangles curvilignes et des parallélogrammes donnés, alors les sommes de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ et de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ n'ont de sens pour Wallis qu'en tant qu'elles sont définies, en accord avec l'égalité (2.23), comme des sommes de carrés[21]. En revanche, si ces triangles ou parallélogrammes sont pris comme des agrégats de segments, alors leurs sommes peuvent aussi être conçues comme les agrégats des segments qui résultent en additionnant chaque corde de $\mathcal{T}_1$ ou de $\mathcal{P}_1$ à chaque corde de $\mathcal{T}_2$ ou de $\mathcal{P}_2$. Si la variation des cordes de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ est respectivement exprimée par la variation des termes des séries $\left[\sum_{i=0}^{h} i^{\frac{p_1}{q_1}}\right]_{h=\omega}$ et $\left[\sum_{i=0}^{h} i^{\frac{p_2}{q_2}}\right]_{h=\omega}$, et celle des cordes de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ l'est par la variation des termes des séries $\left[\sum_{i=0}^{h} h^{\frac{p_1}{q_1}}\right]_{h=\omega}$ et $\left[\sum_{i=0}^{h} h^{\frac{p_2}{q_2}}\right]_{h=\omega}$, $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$ étant deux nombres

[19]Voici, par confirmation, ce que Wallis écrit dans la proposition LXI et dans le scolie qui la suit [Wallis (1656*d*), 49-50] :

> Sed & hinc innotescit methodus quadranti non modò Parabolam sed & Paraboloidea omnia (eorúmque complementa) non modò ea quorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationis simplicis alicujus potestatis, [...] Sed & juxta rationem potestatis cujusvis ex simplicibus compositæ. Puta ; si ordinatim-applicatæ sint in diametrorum ratione dupplicatæ subtriplicata, subquintuplicata, subseptuplicata, &c. vel triplicatæ subquadruplicata subquintuplicata, &c. rationem habebunt ad Parallelogrammum circumscriptum eam quam habent 3 ad 5, 5 ad 7, 7 ad 9 &c. 4 ad 7, 5 ad 8, &c. [...].
>
> Atque hoc pacto aliæ adhuc figuræ curvilineæ [...] ad æquales rectilineas reducuntur.

[20]Plus tard on assignera à ce terme un sens différent, celui qu'il me semble avoir pour Newton [cf. ci-dessous, p. 176].

[21]Wallis peut certes imaginer de juxtaposer deux triangles curvilignes ou deux parallélogrammes l'un à côté de l'autre, mais, en général, cela ne produit aucune figure qu'on sache définir et traiter indépendamment de la considération des triangles curvilignes ou des parallélogrammes qui la composent. Dire que les résultats de ces juxtapositions sont les sommes des figures données revient donc à dire que ces sommes sont ces sommes.

rationnels positifs, alors les variations des éléments des agrégats des cordes de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ et de $\mathcal{P}_1$ et de $\mathcal{P}_2$ seront respectivement exprimées par les séries $\left[\sum_{i=0}^{h}\left(i^{\frac{p_1}{q_1}}+i^{\frac{p_2}{q_2}}\right)\right]_{h=\omega}$. Pourtant l'égalité (2.19) ne nous permet pas de calculer le rapport $\left[\frac{\sum_{i=0}^{h}\left(i^{\frac{p_1}{q_1}}+i^{\frac{p_2}{q_2}}\right)}{\sum_{i=0}^{h}\left(h^{\frac{p_1}{q_1}}+h^{\frac{p_2}{q_2}}\right)}\right]_{h=\omega}$ et ne nous permet donc pas de carrer directement la somme $\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2$, ainsi conçue.

Ainsi, même si on voulait reconnaître dans le résultat énoncé par Wallis un algorithme de quadrature pour toute courbe d'équation $y=ax^{\frac{p}{q}}$, on ne pourrait pas penser cet algorithme comme extensible par linéarité à la quadrature d'une courbe d'équation $y=ax^{\frac{p_1}{q_1}}+bx^{\frac{p_2}{q_2}}$. Les séries $\left[\sum_{i=0}^{h} i^{\frac{p}{q}}\right]_{h=\omega}$ et $\left[\sum_{i=0}^{h} h^{\frac{p}{q}}\right]_{h=\omega}$, introduites par Wallis comme des expressions du triangle curviligne $\mathcal{T}$ et du parallélogramme $\mathcal{P}$, n'expriment donc ces objets géométriques que localement, lorsqu'il n'est question que de leur rapport. Si, comme Descartes, Wallis a vu l'avantage de coupler les objets géométriques avec des expressions non géométriques de ceux-ci, il n'est donc pas parvenu à construire une théorie des quadratures consistant en une manipulation de ces expressions.

* * *

Si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux triangles curvilignes du genre considéré — dont les cordes varient respectivement comme les termes des séries $\left[\sum_{i=0}^{h} i^{\frac{p_1}{q_1}}\right]_{h=\omega}$ et $\left[\sum_{i=0}^{h} i^{\frac{p_2}{q_2}}\right]_{h=\omega}$ — l'algorithme de Wallis permet aussi de calculer leur rapport, sans passer par la prise en compte des carrés auxquels ils sont égaux[22].

Si les côtés de ces triangles sont égaux un à un (ce qui est toujours possible car, quels que soient les nombres fractionnaires positifs $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$, les courbes d'équation $y=x^{\frac{p_1}{q_1}}$ et $y=x^{\frac{p_2}{q_2}}$ se touchent dans l'origine et se coupent pour $x=1$) alors les parallélogrammes construits sur ces côtés sont égaux. En posant $\mathcal{P}_1=\mathcal{P}_2=\mathcal{P}$, on aura alors

$$\frac{\mathcal{T}_1}{\mathcal{P}}=\frac{q_1}{p_1+q_1} \quad ; \quad \frac{\mathcal{T}_2}{\mathcal{P}}=\frac{q_2}{p_2+q_2} \tag{2.25}$$

et donc

$$\frac{\mathcal{T}_1}{\mathcal{T}_2}=\frac{q_1\,(p_2+q_2)}{q_2\,(p_1+q_1)} \tag{2.26}$$

En revanche, si les côtés de ces triangles sont différents entre eux, de sorte que les parallélogrammes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ construits sur ces côtés sont entre eux en raison composée des raisons de leurs bases et de leurs hauteurs, alors $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont entre eux en une raison qui est composée des raisons de $\mathcal{T}_1$ à $\mathcal{P}_1$, de $\mathcal{T}_2$ à $\mathcal{P}_2$ et de $\mathcal{P}_1$ à $\mathcal{P}_2$[23]. Si, en appliquant l'algorithme

[22] Cf. Wallis (1656*a*), prop. LXV, 53.

[23] En effet, si b_1, b_2, a_1 et a_2 sont respectivement les bases et les hauteurs de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, et qu'on suppose que

$$b_1 : b_2 = \alpha : \beta$$
$$a_1 : a_2 = \beta : \gamma$$

précédent, on trouve les proportions

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 : \mathcal{P}_1 = \mu_1 : \nu_1 \\ \mathcal{T}_2 : \mathcal{P}_2 = \mu_2 : \nu_2 \end{aligned} \tag{2.27}$$

on aura alors, en composant,

$$\frac{\mathcal{T}_1}{\mathcal{T}_2} = \frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_2}\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\nu_2}{\nu_1} \tag{2.28}$$

et donc[24]

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 : \mathcal{P}_2 = \alpha : \gamma \\ \mu_1 : \mu_2 = \gamma : \delta \\ \nu_2 : \nu_1 = \delta : \varepsilon \\ \mathcal{T}_1 : \mathcal{T}_2 = \alpha : \varepsilon \end{aligned} \tag{2.29}$$

où α, β, γ, δ et ε sont encore des quantités homogènes quelconques, dont une est choisie arbitrairement et les autres sont déterminées en fonction de celle-ci comme des quatrièmes proportionnels.

Avant d'énoncer cette conséquence de sa méthode, Wallis sent l'exigence de rendre encore plus claire la nature purement algorithmique du résultat énoncé par l'égalité (2.19). C'est l'objet de la proposition LXIV de son traité [25]. Wallis reconnaît implicitement que le rapport qui constitue le premier membre de cette égalité est complètement déterminé lorsque l'exposant $\frac{p}{q}$ est déterminé. Ce rapport peut ainsi être conçu comme un objet d'une nature particulière, dont le caractère individuel ne dépend que de la valeur d'un exposant, que, pour l'occasion, et sans aucune justification ultérieure, Wallis reconnaît comme un nombre positif, aussi bien rationnel qu'irrationnel[26]. En choisissant une notation convenable, l'idée de Wallis peut alors s'exprimer en réécrivant l'égalité (2.19) généralisée sous la forme :

$$\frac{\sum_r}{U_r} = \frac{1}{r+1} \tag{2.30}$$

où r est un nombre algébrique[27] positif quelconque, et les symboles "$\sum_r$" et "U_r" indiquent respectivement les séries $\left[\sum_{i=0}^{h} i^r\right]_{h=\omega}$ et $\left[\sum_{i=0}^{h} h^r\right]_{h=\omega}$ [28].

---

alors

$$\mathcal{P}_1 : \mathcal{P}_2 = \alpha : \gamma$$

[24]Wallis dit en vérité que le rapport de $\mathcal{T}_1$ à $\mathcal{T}_2$ est celui de $\frac{\mu_1}{\nu_1}b_1a_1$ à $\frac{\mu_2}{\nu_2}b_2a_2$. Les écritures "$b_1a_1$" et "$b_2a_2$" (ou, dans la notation choisie par Wallis "AB" et "$\alpha\beta$") semblent pourtant indiquer non pas des produits de deux segments, exprimant les aires des parallélogrammes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, mais ces parallélogrammes eux-mêmes.

[25]Cf. Wallis (1656*a*), 52-53.

[26]Wallis observe que sa règle vaut aussi pour des nombres irrationnels, en prenant pour exemple $\sqrt{3}$. En parlant de nombres irrationnels, il ne semble penser pourtant qu'à ceux que nous qualifions aujourd'hui d'irrationnels algébriques. Comme on le verra, ce sera justement à la fin de son traité que Wallis saisira (de manière d'ailleurs encore assez confuse) la possibilité de quelque chose comme des nombres transcendants.

[27]Cf. la note (26), ci-dessus.

[28]Wallis appelle la deuxième de ces séries "série des égaux" [cf. Wallis (1656*d*), 53], en reconnaissant qu'elle est totalement déterminé lorsque la série $\left[\sum_{i=0}^{h} i^r\right]_{h=\omega}$ l'est.

Si, pour passer d'exposants fractionnaires à des exposants algébriques, il suffit d'observer que rien n'empêche de prendre dans la règle d'association (2.17) la raison σ comme un radical, la chose n'est pas aussi simple si l'on prétend interpréter le premier membre de l'égalité (2.30) comme un rapport entre un triangle curviligne et un parallélogramme. Dans ce cas, il faut en fait non seulement expliquer ce qu'est une puissance irrationnelle d'un nombre entier positif, mais aussi expliquer à quelle courbe correspond la variation des termes d'une série telle que $\left[\sum_{i=0}^{h} i^r\right]_{h=\omega}$, lorsque r n'est pas un nombre rationnel. Wallis est muet sur ce point et il ne fait aucune application géométrique de l'égalité (2.30) pour r irrationnel[29].

Ceci n'est pourtant pas un point essentiel dans l'économie de l'*Arithmetica infinitorum.* Bien plus important est le fait que Wallis tire de cette égalité l'idée de construire une sorte d'Algèbre multiplicative portant, plutôt que directement sur des quantités, sur des séries telles que $\sum_r$. Il suffit pour cela d'introduire les définitions suivantes[30] :

$$\sum\nolimits_r \cdot \sum\nolimits_s = \sum\nolimits_{r+s} \qquad ; \qquad \frac{\sum_r}{\sum_s} = \sum\nolimits_{r-s} \tag{2.31}$$

où r et s sont des nombres (algébriques) positifs quelconques. Multiplier ou diviser les séries $\sum_r$ et $\sum_s$ signifie ainsi, dans le langage de Wallis, multiplier et diviser entre eux les termes correspondants de ces séries, en formant ensuite la série des produits ou des quotients qui en résulte.

Cette sorte d'Algèbre, convenablement étendue à la considération des séries des égaux[31], ne sera employée par Wallis que dans la deuxième partie de son traité[32], lorsqu'il sera question de chercher la quadrature du cercle. Avant d'y venir, celui-ci ne peut pourtant éviter d'observer que, si aucune restriction n'est introduite, la deuxième de ces définitions pose la question des séries à indice négatif. Au lieu d'exclure ces séries de sa théorie en introduisant la restriction $r \geq s$, Wallis montre aussitôt comment ces séries peuvent être géométriquement interprétées[33].

Soit $\mathsf{Bb'bAC}$ (fig. 2.a) un triangle curviligne délimité par un paraboloïde $\mathsf{Bbb'A}$ de diamètre AL et d'ordre n (n étant un nombre entier positif plus grand que 2), inscrit dans un triangle rectiligne BCA. Quels que soient les points a et $\mathsf{a'}$, pris sur le côté AC de ce triangle, les cordes ab et $\mathsf{a'b'}$ du triangle curviligne $\mathsf{Bb'bAC}$ satisferont par définition le système de proportions

$$\begin{array}{l} \mathsf{ab} : \mathsf{a'b'} = \alpha : \beta \\ \mathsf{Aa} : \mathsf{Aa'} = \alpha : \gamma_1 = \gamma_1 : \gamma_2 = \ldots = \gamma_{n-1} : \beta \end{array} \tag{2.32}$$

où α, β, γ_1, ..., γ_{n-1} sont, comme ci-dessus, des quantités homogènes quelconques, dont une est prise de manière arbitraire et les autres sont déterminées en fonction de celle-ci comme des quatrièmes proportionnels. On suppose que les rectangles abhk et $\mathsf{a'b'h'k'}$ construits

[29]On remarque pourtant que l'argument de Wallis n'est pas sans suggérer la voie qui va permettre plus tard de généraliser la notion de puissance à des exposants quelconques, cette voie étant justement celle de l'interpolation par continuité.

[30]Cf. Wallis (1656*d*), prop. LXXIII-LXXXIV, 58-59 et LXXXI-LXXXII, 63-64.

[31]Cf. la note (28), ci-dessus.

[32]Cf. la section 2.2.

[33]Cf. Wallis (1656*d*), prop. LXXXIII-CI, 65-75. Je généralise ici l'argument de Wallis qui, sans doute pour des raisons de simplicité, mais sans aucune nécessité, se limite à considérer des paraboloïdes et des hyperboloïdes (ou hyperboles généralisées) rectangles .

respectivement sur les cordes ab et $\mathsf{a'b'}$ de ce triangle curviligne sont respectivement égaux aux carrés construits sur les cordes correspondantes ae et $\mathsf{a'e'}$ du triangle rectiligne BCA. Il s'ensuit que les côtés bh et $\mathsf{b'h'}$ de ces rectangles satisfont les proportions

$$\begin{array}{l} \mathsf{ab} : \mathsf{ae} = \mathsf{ae} : \mathsf{bh} \\ \mathsf{a'b'} : \mathsf{a'e'} = \mathsf{a'e'} : \mathsf{b'h'} \end{array} \tag{2.33}$$

Comme, de la proposition VI.2 des *Éléments* (théorème de Thalès), il suit que

$$\mathsf{Aa} : \mathsf{ae} = \mathsf{Aa'} : \mathsf{a'e'} \tag{2.34}$$

de là il s'ensuit que

$$\begin{array}{l} \mathsf{b'h'} : \mathsf{bh} = \alpha : \delta \\ \mathsf{Aa} : \mathsf{Aa'} = \alpha : \varepsilon_1 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_{n-3} : \delta \end{array} \tag{2.35}$$

où α, δ, ε_1, ..., ε_{n-3} sont encore des quantités homogènes quelconques déterminées en fonction d'une d'entre elles. Si on pose $\mathsf{bh} = \mathsf{aK}$ et $\mathsf{b'h'} = \mathsf{a'K'}$, cette proportion caractérise une courbe $\mathsf{NKK'DM}$ qui sera de ce fait un hyperboloïde équilatère d'ordre $n-2$. Il suffit de prolonger BC jusqu'à rencontrer cet hyperboloïde en D pour voir que cette courbe délimite un trapézoïde curviligne infini NDCA dont les cordes parallèles à l'asymptote AN varient comme les termes de la suite $\sum_{-n+2}$. Si de D on tire ensuite la parallèle DE à l'axe AM, on construit un parallélogramme AEDC dont les cordes se comportent entre eux comme les termes de la série des égaux U_{-n+2}. Or, si l'algorithme exprimé par (2.14) est étendu au cas d'exposants entiers négatifs, on aura

$$\frac{\sum_{-n+2}}{U_{-n+2}} = \frac{1}{-n+3} \tag{2.36}$$

et, en raisonnant comme ci-dessus, on devra en conclure que le rapport $\frac{\mathsf{NDCA}}{\mathsf{AEDC}}$ entre ce trapézoïde et ce parallélogramme est égal à $\frac{1}{-n+3}$.

En raisonnant comme on l'a fait pour des séries à exposants positifs, il est naturellement possible de généraliser l'algorithme exprimé par l'égalité (2.36) à des exposants non entiers. Il restera encore, si on veut arriver jusqu'à des exposants algébriques, et qu'on veut appliquer cet algorithme à la quadrature des trapézoïdes correspondants, à donner un sens à des puissances négatives et non rationnelles d'un nombre entier et à expliquer à quelle courbe correspond la variation des termes d'une série telle que $\left[\sum_{i=0}^{h} i^{-r}\right]_{h=\omega}$, lorsque r est un nombre positif non rationnel.

Encore une fois, Wallis n'aborde pourtant pas ce problème. Il ne peut en revanche pas éviter de prendre en compte la conclusion inévitable à laquelle nous mène l'argument précédent : si dans l'égalité (2.36) on pose $n = r + 2$, il s'ensuit que le rapport entre un trapézoïde délimité par un hyperboloïde équilatère d'ordre r et le parallélogramme inscrit est égal à $\frac{1}{1-r}$. Donc[34], si $r < 1$, cet argument nous conduit à conclure qu'un trapézoïde infini, tel que NDCA, a un rapport fini avec le parallélogramme inscrit ; si $r = 1$, cet argument nous conduit à affirmer qu'un trapézoïde délimité par une hyperbole ordinaire équilatère a un

[34] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CII-CVII, 76-83.

rapport infini avec le parallélogramme inscrit ; enfin, si $r > 1$, cet argument nous conduit à affirmer que le trapézoïde infini NDCA a un rapport négatif avec le parallélogramme inscrit. Aucune de ces conclusions ne semble étonner Wallis.

Pour justifier la première, il se réclame d'un résultat de Torricelli, qui avait déjà montré qu'un solide infini engendré par la révolution d'un hyperbole autour d'une asymptote, est égal à un cylindre fini[35].

Quant à la troisième, il considère qu'affirmer que le rapport entre le trapézoïde NDCA et le parallélogramme inscrit est négatif revient à affirmer que ce même rapport est plus qu'infini[36], une affirmation que les interprètes[37] du texte de Wallis ont généralement considérée comme absurde.

Pourtant, Wallis remarque ensuite[38] que si la courbe $\mathsf{NKK'DM}$ est construite sur le diamètre AL plutôt que sur l'axe AC, de sorte que les cordes du trapézoïde NDCA soient parallèles à cet axe (c'est le cas de la figure 2.b, où on aura posé $\mathsf{Aa}_* = \mathsf{Aa}$, $\mathsf{Aa}'_* = \mathsf{Aa}'$, $\mathsf{AC}_* = \mathsf{AC}$, $\mathsf{AE}_* = \mathsf{AE}$, et, par conséquent, $\mathsf{a}_*\mathsf{K} = \mathsf{aK}$, $\mathsf{a}'_*\mathsf{K}' = \mathsf{a}'\mathsf{K}'$, $\mathsf{C}_*\mathsf{D} = \mathsf{CD}$, et $\mathsf{E}_*\mathsf{D} = \mathsf{ED}$), alors les ordonnées tirées de ce même axe vers cette courbe, entre A et C, deviendront des cordes du trapézoïde MFCA. Or comme le trapézoïde $\mathsf{NAC}_*\mathsf{D}$ est évidemment égal au trapézoïde NDCA, il s'ensuit que si du trapézoïde MFCA on enlève la partie $\mathsf{FCE}_*\mathsf{D}$, on obtient un nouveau trapézoïde, $\mathsf{MAE}_*\mathsf{D}$ qui a avec le parallélogramme inscrit $\mathsf{AC}_*\mathsf{DE}_*$ le rapport positif $1 - \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{r}} = \frac{r}{r-1}$. En revenant à la situation initiale (c'est-à-dire à la figure 2.a), cela équivaut à affirmer que le trapézoïde CDM a avec le parallélogramme AEDC le rapport positif, $\frac{r}{r-1} - 1 = \frac{1}{r-1}$.

Je suis donc porté à penser que le langage baroque des rapports plus qu'infinis ne fait en réalité qu'évoquer une règle qui prescrit que si $r > 1$ il faut considérer non pas le trapézoïde NDCA, mais le trapézoïde CDM, et identifier le rapport entre ce trapézoïde et le parallélogramme AEDC avec le rapport positif $\frac{1}{r-1}$[39].

Il ne reste donc à considérer que la deuxième conclusion, concernant un trapézoïde délimité par une hyperbole ordinaire. Celle-ci apparaît à Wallis comme claire par elle-même, et il ne l'accompagne d'aucun commentaire[40]. Dans ce cas la symétrie de la courbe par rapport à ses deux asymptotes, c'est-à-dire à l'axe AC et au diamètre AL empêche d'ailleurs de raisonner par inversion, comme Wallis le fait dans le cas où r est plus grand que 1.

Bien que, dans la *dedicatio* de son traité, Wallis mentionne l'*Opus Geometricum* de Grégoire de Saint-Vincent[41] — où il est montré que tous segments d'hyperbole, dont la base est comprise entre deux valeurs de l'abscisse constituant deux termes successifs d'une

[35] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CVII, scolie, 83 et Torricelli (OLV), I, 191-213 ("De solido hyperbolico acuto"), en particulier 193-194.

[36] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CIV, 78-79.

[37] Cf., entre autres, Cantor (1880-1908), II, 825 et Scott (1938), 43-46.

[38] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CVII, 81-84.

[39] On comprendra qu'en termes modernes, cela équivaut à intégrer la fonction $y = x^{-r}$ non pas entre 0 et une valeur ξ positive quelconque, mais entre ξ et ∞, pour obtenir l'égalité

$$\int_{\xi}^{\infty} x^{-r} dx = \frac{1}{r-1}\xi^{1-r}$$

[40] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CIII, 77-78.

[41] Cf. Wallis (1656*d*), [8].

progression géométrique quelconque, sont égaux entre eux[42] — il ne sait tirer de sa méthode aucune suggestion pour traiter une courbe comme l'hyperbole dont on sait ajourd'hui que son aire n'est pas définie dans l'origine. Ce n'est qu'une conséquence d'une faiblesse intrinsèque de la méthode de Wallis, qui ne concerne pas des trapézoïdes quelconques délimités par des portions quelconques des paraboloïdes ou des hyperboloïdes considérées. Il est clair en effet que la méthode de Wallis ne s'applique qu'à des triangles curvilignes délimités soit par une portion d'un commençant dans le sommet de ce paraboloïde et par des axes donnés respectivement par la tangente à ce paraboloïde dans ce même sommet et par une droite parallèle à son diamètre, soit par une portion d'un hyperboloïde commençant en un point à l'infini et par des axes donnés respectivement par un des asymptotes de cet hyperboloïde et par une parallèle à l'autre asymptote.

En termes modernes, cela signifie que Wallis ne peut carrer ses courbes qu'à partir de l'origine d'un système de coordonnées construit sur ces mêmes courbes d'une manière standard, ou de l'infini[43]. Il ne peut donc opérer aucune sorte de translation ou substitution. Cette limitation décisive de la méthode de Wallis, l'empêche — autant ici que plus tard, quand il sera question de carrer le cercle — de saisir la possibilité de transformer cette méthode en une véritable opération de quadrature, propre à passer, dans certains cas, du domaine des courbes géométriques à celui des courbes mécaniques, ce qui sera un des acquis fondamentaux de Newton. Cela sera plus clair à la lumière de l'argument qui conduit Wallis à la quadrature du cercle. C'est justement à cet argument qu'il convient donc de venir[44].

2.2 La quadrature du cercle

Avant d'exposer le parcours suivi par Wallis pour parvenir à carrer le cercle, il convient de rendre explicite ce que Wallis ne peut pas faire, encore que ceci pourrait apparaître à nos yeux comme une conséquence naturelle des résultats précédents.

À cause de la non linéarité de son algorithme de quadrature, Wallis ne peut pas appliquer cet algorithme à la quadrature de courbes dont l'ordonnée est exprimée par une série de puissances ; la voie qui sera suivie quelques années plus tard par Newton[45] est donc fermée pour lui. D'autre part, à cause de la nécessité de considérer des portions de ses courbes qui débutent en un point particulier de ces mêmes courbes, il ne peut imaginer rien de semblable

[42]Cf. Grégoire de Saint Vincent (1647), prop. 109.VI, 586. En termes modernes cela signifie que, pour tout α, β et γ,

$$\int_{x^\alpha}^{x^{\alpha+\gamma}} \frac{1}{z} dz = \int_{x^\beta}^{x^{\beta+\gamma}} \frac{1}{z} dz$$

Pour trouver la fonction $f(x) = \int_1^x \frac{1}{z} dz$, il faut donc résoudre l'équation fonctionnelle

$$f(x^{\alpha+\gamma}) - f(x^\alpha) = f(x^{\beta+\gamma}) - f(x^\beta)$$

dont la solution est banalement le logarithme. La possibilité d'exprimer le trapézoïde compris entre une hyperbole et ses asymptotes au moyen du logarithme ne fut pourtant explicitée que par Sarasa, en 1649 [cf. Sarasa (1649)]. Sur la théorie des hyperboles de Grégoire, cf. Dhombres (1995).

[43]Cf. la note 39, ci-dessus.

[44]Wallis étend en vérité sa méthode pour la quadrature du cercle à la quadrature de l'ellipse (ce qui lui vaut d'être considéré comme un des précurseurs de la théorie des intégrales elliptiques [cf., entre autres, Houzel (1978), 293]). Ce développement ne semble pourtant pas avoir des influences explicites sur les réflexions de Newton, et ne sera pas considéré ici.

[45]Cf. le chapitre 4, ci-dessous.

à une méthode de quadrature par substitution, car il ne peut pas modifier les limites de quadrature. S'il veut parvenir à appliquer son algorithme à la quadrature du cercle, il doit donc nécessairement chercher à étendre cet algorithme à des rapports autres que les rapports $\frac{\sum_r}{U_r}$, et propres à exprimer le rapport d'une section de cercle à un parallélogramme construit de manière standard à partir de celle-ci.

Wallis commence par calculer les puissances entières des binômes

$$U_n - \sum\nolimits_n = \left[\sum_{i=0}^{h} (h^n - i^n)\right]_{h=\omega} \tag{2.37}$$

prises relativement à la multiplication définie par les égalités (2.31), et à calculer le rapport que ces puissances ont avec des séries des égaux convenables. Après avoir déterminé une matrice carrée fournissant les valeurs que ce rapport prend dans les différents cas possibles, il cherche à interpoler cette matrice d'une manière propre à fournir une valeur intermédiaire de ce rapport, qu'il identifie avec la valeur du rapport d'un quart de cercle au carré construit sur son rayon. C'est au long de ce parcours que Wallis retrouve l'énigme qu'il avait mise de côté — ou que plus probablement il n'avait pas saisie — dans le cas de l'hyperbole : comment exprimer des rapports différents de tout rapport entre deux nombres entiers ?

En utilisant la notion introduite ci-dessus, le premier des résultats atteints par Wallis peut s'exprimer ainsi[46] :

$$\frac{(U_n - \sum_n)^p}{U_{np}} = \prod_{i=1}^{p} \frac{in}{in+1} \tag{2.38}$$

où n et p sont des nombres entiers strictement positifs quelconques, et la puissance est prise par rapport à la multiplication définie par les égalités (2.31). Wallis justifie ce résultat inductivement ; il n'est pourtant pas difficile de voir comment il pourrait être démontré déductivement à l'aide du développement binomial restreint au cas d'exposants entiers positifs.

* * *

Ce qui est intéressant dans la preuve de Wallis n'est pourtant pas cet usage de l'induction qui, dans un cas comme celui-ci, n'est rien d'autre qu'un moyen pour exprimer, faute d'une notation convenable, un argument déductif fondé sur la considération d'un rapport générique de la forme considérée[47]. C'est plutôt la manière dont Wallis démontre l'égalité (2.38) pour des valeurs particulières de n et p qui doit retenir notre attention. Dans le cas où $n = 2$ et $p = 3$, la preuve de Wallis peut, par exemple, être reconstruite comme suit :

---

[46] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CVIII-CXXVI, 84-98.

[47] Sur cette pratique démonstrative dans les mathématiques des XVI$^{\text{ème}}$ et XVII$^{\text{ème}}$ siècles, cf. Giusti (1999), 44.

$$
\begin{aligned}
\left(U_2 - \sum\nolimits_2\right)^3 &= (U_2)^3 - 3\,(U_2)^2 \sum\nolimits_2 + 3U_2 \left(\sum\nolimits_2\right)^2 - \left(\sum\nolimits_2\right)^3 \\
&= U_6 - 3U_4 \left(\frac{1}{3}U_2\right) + 3U_2 \left(\sum\nolimits_4\right) - \sum\nolimits_6 \\
&= U_6 - U_6 + 3U_2 \left(\frac{1}{5}U_4\right) - \frac{1}{7}U_6 \\
&= \frac{16}{35}U_6 = \frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}U_6
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Cet argument emploie les deux règles suivantes :

$$
\begin{aligned}
U_\nu \cdot U_\mu &= U_{\nu+\mu} \\
\sum\nolimits_\nu &= \frac{1}{\nu+1}U_\nu
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

où ν et μ sont des nombres entiers positifs quelconques. La première de ces règles ne dérive que d'une extension aux séries des égaux de la multiplication définie sur les séries $\sum_r$, tandis que la deuxième suit de l'égalité (2.14) par une simplification croisée[48]. En exploitant ces deux règles, on aura ensuite

$$
U_\mu \cdot \sum\nolimits_\nu = \frac{1}{\nu+1}U_\mu \cdot U_\nu = \frac{1}{\nu+1}U_{\mu+\nu} \tag{2.41}
$$

qui complète la définition de la multiplication sur les séries $\sum_r$ et U_r[49].

On voit alors que, encore qu'incapable de saisir les avantages de la nouvelle géométrie de Descartes, Wallis est en condition de définir, bien qu'implicitement, un formalisme assez sophistiqué. Ce formalisme ne s'applique pourtant qu'à des situations géométriques fort particulières ; c'est sa faiblesse face au formalisme de Descartes.

* * *

Ceci dit, revenons à l'égalité (2.38) et à son application à la quadrature du cercle. Soit[50] ABC (fig. 3) un quart de cercle de rayon $\mathsf{AB} = \mathsf{BS} = r$. D'après la proposition VI.13 des *Éléments*, la demi-corde TS satisfait la proportion

$$
r - \mathsf{TB} : \mathsf{TS} = \mathsf{TS} : r + \mathsf{TB} \tag{2.42}
$$

Si on suppose que le segment TB pris sur la base AB varie comme les termes de la série $\sum_1$ (ce qui signifie, dans notre langage, que ce segment est pris comme variable principale du problème), alors, du fait que r est constant et égal au plus grand de ces segments, il

[48]On observe que cette simplification croisée intervient ici dans un contexte purement arithmétique, et n'a, en tant que telle, aucune signification géométrique particulière.

[49]On observe que suivant la deuxième des règles 2.40, on a

$$
\begin{aligned}
U_\nu \cdot U_\mu &= (\nu+1)\sum\nolimits_\nu \cdot (\mu+1)\sum\nolimits_\mu = (\nu+1)\,(\mu+1)\sum\nolimits_{\nu+\mu} \\
&= \nu\mu + (\nu+\mu+1)\sum\nolimits_{\nu+\mu} = \nu\mu + U_{\nu+\mu}
\end{aligned}
$$

et il suffit donc d'omettre le produit $\nu\mu$ face à la série divergente $U_{\nu+\mu}$ pour avoir la première règle.

[50]Cf. Wallis (1656a), prop. CXXI, 91-92.

s'ensuit que les cordes TS du quart de cercle ABC varient comme les termes d'une série qui constitue le terme intermédiaire entre les termes $U_1 - \sum_1$ et $U_1 + \sum_1$, dans une progression géométrique de séries, soumis aux égalités (2.31). En d'autres termes, les cordes TS varient comme les moyens proportionnels entre les termes $[h-i]_{h=\omega}$ et $[h+i]_{h=\omega}$ $(i = 0, 1, ...)$ des séries $U_1 - \sum_1$ et $U_1 + \sum_1$. En calculant ces moyens proportionnels (avant de passer à l'infini), et en appliquant la première des égalités (2.31), on en conclut que les cordes TS varient comme les termes de la série[51]

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=0}^{h} \sqrt{(h-i)(h+i)}\right]_{h=\omega} &= \left[\sum_{i=0}^{h} \sqrt{h^2 - i^2}\right]_{h=\omega} \\
&= \left(\left[\sum_{i=0}^{h} \left(h^2 - i^2\right)\right]_{h=\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left[\sum_{i=0}^{h} h^2 - \sum_{i=0}^{h} i^2\right]_{h=\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left[\sum_{i=0}^{h} h^2\right]_{h=\omega} - \left[\sum_{i=0}^{h} i^2\right]_{h=\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(U_2 - \sum\nolimits_2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Comme les deux quarts de cercle ABC et ABD sont égaux et symétriques, de sorte qu'à chaque corde TS du premier, correspondant au segment $\mathsf{AT} = r - \mathsf{TB}$ pris sur la base $\mathsf{AB} = r$, correspond une corde $\mathsf{T'S'}$ du deuxième, correspondant au segment $\mathsf{BT'}$, pris sur cette même base, de là il s'ensuit que :

$$\frac{\mathsf{ABC}}{\mathsf{ABCD}} = \frac{(U_2 - \sum_2)^{\frac{1}{2}}}{U_1} \tag{2.44}$$

où le deuxième membre se réduit au premier membre de l'égalité (2.38) pour $n = 2$ et $p = \frac{1}{2}$. Pour carrer le cercle, il faut aussi chercher à étendre cette dernière égalité au cas où p est un nombre fractionnaire.

* * *

[51] Wallis pose en réalité, directement "r" à la place de "h", et "ia" à la place de "i" $(i = 0, 1, ...)$, en affirmant que les cordes TS varient comme les moyens proportionnels des termes $[r - ia]$ et $[r + ia]$ des séries $\sum_{i=0}^{\infty}(r - ia)$ et $\sum_{i=0}^{\infty}(r + ia)$, c'est-à-dire comme les termes de la série $\sum_{i=0}^{\infty}\sqrt{r^2 - i^2a^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} r^2 - i^2a^2}$. En introduisant la constante a, Wallis évite de devoir travailler avec des additions et des soustractions entre le segment r et des nombres entiers positifs, ce qui enfreindrait le principe d'homogénéité. Pourtant, les écritures "r^2" et "$\sqrt{r^2 - i^2a^2}$" supposent implicitement ou bien que r n'est pas le rayon du cercle considéré, mais un nombre exprimant ce rayon — ce qui rendrait inutile l'introduction de la constante a et demanderait d'expliquer précisément comment un nombre peut exprimer un segment —, ou bien que Wallis ait défini, de même que Descartes, une multiplication sur les segments — ce qui n'est pas le cas. Évidemment, l'argument de Wallis relève de notations imprécises. Il montre pourtant comment la pratique de ce dernier a désormais dépassé les limites restreintes de sa théorie.

Avant de voir comment Wallis accomplit cette tâche, il est nécessaire de s'arrêter un instant pour considérer la nature de son argument.

Ceci n'est correct que parce qu'il porte sur un quart de cercle pris dans sa totalité, c'est-à-dire que la corde BC qui délimite le triangle curviligne à carrer est égale à la base AB de ce triangle. Il y a deux raisons à ceci. D'abord, la proportion (2.42) fait intervenir le rayon r de ce quart de cercle, qui est identifié avec la valeur maximale de la variable i qui intervient dans la série $\sum_1$, et donc avec la valeur constante des termes de la série U_1. Ensuite le passage de l'égalité (2.43) à l'égalité (2.44) s'appuie sur la symétrie entre ABC et ABD. En effet le segment TB qui est supposé varier comme les termes de la série $\sum_1$ (et fonctionne donc comme la variable principale du problème) est nul lorsque la corde TS (qui fonctionne en revanche comme la variable dépendante) est maximal et égale au rayon r, et il est maximale et égal au même rayon r lorsque cette corde est nulle ; au contraire le terme i^2 de la série $\sum_2$ est nul lorsque le terme i de la série $\sum_1$ est nul et n'est maximal — et peut donc être pris comme correspondant à r^2, c'est-à-dire au terme constant de la série U_2 — que lorsque ce même terme i est maximal — et peut donc être pris comme correspondant à r, c'est-à-dire au terme constant de la série U_1. L'argument de Wallis ne peut donc pas fournir le rapport entre n'importe quelle portion ATS de ce quart de cercle et le rectangle construit sur la base AT et la hauteur TS de cette portion. Il ne s'applique qu'à la quadrature du quart de cercle. En d'autres termes, le rapport que cet argument permet de déterminer est non seulement constant (comme c'était déjà le cas des quadratures établies par Wallis dans la première partie de son traité), mais c'aussi le rapport qu'ont entre eux deux figures qui doivent à leur tour être prises, l'une et l'autre, comme constantes, le quart d'un cercle et le carré construit sur son rayon[52].

À la différence que dans les cas des quadratures des paraboloïdes et des hyperboloïdes, aucune simplification croisée n'aurait ainsi pu transformer la quadrature du cercle donnée par Wallis en un résultat que nous pourrions aujourd'hui interpréter comme l'exhibition d'une fonction intégrale[53]. Newton saura aussi se libérer de cette limitation, en transformant la méthode de Wallis dans une méthode propre à fournir la quadrature de n'importe quelle

---

[52]La condition de symétrie entre ABC et ABD aurait pu être éliminée en modifiant l'argument précédent de manière convenable. Au lieu de se réclamer de la proportion (2.42) et supposer que les segments TB varient comme les termes de la série $\sum_1$, Wallis aurait pu se réclamer de la proportion équivalente

$$\mathsf{AT} : \mathsf{TS} = \mathsf{TS} : 2r - \mathsf{AT} \tag{2.45}$$

et supposer que les segments AT varient comme les termes de la série $\sum_1$. Dans ce cas, il aurait conclu que les cordes TS varient comme les termes d'une série qui, conformément aux égalités (2.31), constitue le terme intermédiaire entre les termes $\sum_1$ et $2U_1 - \sum_1$, dans une progression géométrique de séries, c'est-à-dire que les cordes TS varient comme les moyens proportionnels des termes i et $[2h-i]_{h=\omega}$ $(i = 0, 1, ...)$ des séries $\sum_1$ et $2U_1 - \sum_1$. De là, il aurait pu conclure que les cordes TS varient comme les termes de la série

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=0}^{h} \sqrt{i(2h-i)}\right]_{h=\omega} &= \left[\sum_{i=0}^{h} \sqrt{2hi - i^2}\right]_{h=\omega} \\
&= \left(\left[\sum_{i=0}^{h} (2hi - i^2)\right]_{h=\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left[\sum_{i=0}^{h} 2hi - \sum_{i=0}^{h} i^2\right]_{h=\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left[2h\sum_{i=0}^{h} i\right]_{h=\omega} - \left[\sum_{i=0}^{h} i^2\right]_{h=\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(2U_1 \sum\nolimits_1 - \sum\nolimits_2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(2U_1 \frac{1}{2} U_1 - \sum\nolimits_2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(U_2 - \sum\nolimits_2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

C'est la même conclusion que tout-à-l'heure, et elle est cette fois obtenue sans s'appuyer sur la symétrie entre ABC et ABD. Pourtant, à cause de la proportion (2.45), l'argument qui conduit à cette conclusion s'appuie, de même que celui de Wallis, sur la correspondance entre la valeur maximale $h = \omega$ de i et le rayon r pris dans sa totalité, et donc ne pas s'appliquer non plus à une portion quelconque du cercle.

[53]Dans les propositions CXXXIII-CLXVII de son traité [cf. Wallis (1656*a*), 106-135], Wallis explore en vérité une autre voie pour parvenir à la quadrature du cercle, se rapportant à la proportion (2.45). En identifiant la constante intervenant dans la série des égaux U_1avec diamètre du cercle, de cette proportion il s'ensuit l'égalité

$$\frac{\mathsf{ABC}}{2(\mathsf{ABCD})} = \frac{\left(U_1 \sum_1 - \sum_2\right)^{\frac{1}{2}}}{U_1}$$

Pour calculer le rapport $\frac{(U_1 \sum_1 - \sum_2)^{\frac{1}{2}}}{U_1}$, et trouver ainsi le premier, Wallis passe par un très long argument qui le conduit à déterminer des matrices qu'on pourrait résumer par les deux égalités suivantes :

$$\frac{\left(U_n \sum_m - \sum_{n+m}\right)^p}{U_{p(n+m)}} = \frac{\prod_{i=0}^{p-1} n(i+1)}{\prod_{i=0}^{p} (ni + mp + 1)}$$

portion du cercle[54].

En disant qu'en suivant son parcours, Wallis ne peut que parvenir à la détermination du rapport constant entre le quart du cercle et le carré construit sur son rayon — qui est évidemment égal au rapport entre le cercle et le carré construit sur son diamètre —, je ne veux pas dire qu'il cherche une sorte d'approximation d'un nombre irrationnel donné, le nombre que nous identifions aujourd'hui avec $\frac{\pi}{4}$. Wallis n'a en fait nullement établit *a priori* l'existence et la nature d'un tel nombre. Tout ce que l'égalité (2.44) lui dit, indépendamment de toute considération géométrique qui pouvait l'amener à cette même conclusion, est que le rapport entre un cercle de rayon r et le carré construit sur le diamètre de ce cercle ne dépend pas de ce diamètre. Comme autant ce cercle que le carré construit sur son diamètre sont des grandeurs déterminées, ceci peut tout au plus suggérer à Wallis que, quel que soit le segment r, la proportion

$$C(r) : Q(2r) = 1 : x_C \tag{2.46}$$

où $C(r)$ et $Q(2r)$ sont respectivement le cercle de rayon r et le carré de côté $2r$, admette un quatrième proportionnel déterminé qui ne dépend pas de r. Il n'est pourtant nullement acquis pour Wallis que ce rapport puisse être exprimé par un nombre, et encore moins par un nombre dont on connaît la nature.

Réduite à son *definiens*, conformément à la définition V.5 des *Éléments*, la proportion (2.46) nous assure que, quel que soient les nombres entiers positifs n et m,

$$\begin{aligned} &[nC(r) < mQ(2r)] \Rightarrow [n < mx_C] \\ &[nC(r) = mQ(2r)] \Rightarrow [n = mx_C] \\ &[nC(r) > mQ(2r)] \Rightarrow [n > mx_C] \end{aligned} \tag{2.47}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &\left[C(r) < \frac{m}{n}Q(2r)\right] \Rightarrow \left[1 < \frac{m}{n}x_C\right] \\ &\left[C(r) = \frac{m}{n}Q(2r)\right] \Rightarrow \left[1 = \frac{m}{n}x_C\right] \\ &\left[C(r) > \frac{m}{n}Q(2r)\right] \Rightarrow \left[1 > \frac{m}{n}x_C\right] \end{aligned} \tag{2.48}$$

et

$$\frac{\left(U_{\frac{\nu}{\mu}} \sum_{\frac{1}{\mu}} - \sum_{\frac{\nu+1}{\mu}}\right)^p}{U_{p(\frac{\nu+1}{\mu})}} = \frac{\prod_{i=0}^{p-1} \frac{\nu}{\mu}(i+1)}{\prod_{i=0}^{p} (\frac{\nu}{\mu}i + \frac{p}{\mu} + 1)}$$

où n, m, ν, μ et p sont des nombres entiers positifs quelconques. Comme la première de ces trois égalités n'est correcte qu'à condition qu'on fasse correspondre la constante intervenant dans la série des égaux U_1 au diamètre du cercle, il est clair que, même en suivant cette voie, on ne pourra jamais carrer une portion quelconque du cercle, et on ne parviendra qu'à déterminer le rapport entre le demi-cercle et le carré construit sur son diamètre, qu'on exprime aujourd'hui par le nombre $\frac{\pi}{8}$, et qui est évidemment la moitié du rapport entre le quart de cercle et le carré construit sur son rayon. Et c'est justement parce que le rapport qu'on peut déterminer en suivant ce parcours ne saurait être que la moitié du rapport entre le quart de cercle et le carré construit sur son rayon [cf. Wallis (1655a), prop. CLXVII 134-135] que Wallis concentre ses efforts sur la recherche du deuxième de ces rapports.

[54]Cf. la chapitre 4.

Rien ne nous assure cependant que $C(r)$ et $Q(2r)$ aient une mesure commune, c'est-à-dire qu'il existe un couple de nombres entiers positifs n' et m' tels que $C(r) = \frac{m'}{n'}Q(2r)$ et donc $x_C = \frac{n'}{m'}$.

Supposer que la proportion (2.46) admet un quatrième proportionnel déterminé revient donc à supposer que (quel que soit le segment r), les relations géométriques parmi les grandeurs $C(r)$ et $Q(2r)$ sont parfaitement reflétées par des relations arithmétiques entre l'unité numérique et un autre objet déterminé, qu'on a dénoté ici par le symbole "x_C", qu'on peut multiplier par un nombre fractionnaire positif quelconque $\frac{m}{n}$, en obtenant le produit $\frac{m}{n}x_C$ qui est censé être comparable avec l'unité numérique. Le problème de Wallis est donc celui de déterminer d'un tel objet inconnu et hypothétique et, si possible de l'exprimer par des moyens arithmétiques connus.

* * *

Ces précisions étant faites, revenons au parcours de Wallis. Tout de suite après avoir énoncé l'égalité (2.38), celui-ci observe que le membre de droite de cette égalité est parfaitement déterminé, et peut être aisément calculé, même si n n'est pas un nombre entier positif, mais plutôt une fraction quelconque (positive) de l'unité. Il reste à s'assurer que cette substitution conserve l'égalité avec le rapport exprimé par le premier membre. C'est ce que Wallis fait en se réclamant d'une nouvelle induction, qui fournit l'égalité[55] :

$$\frac{\left(U_{\frac{1}{\lambda}} - \sum_{\frac{1}{\lambda}}\right)^p}{U_{\frac{p}{\lambda}}} = \prod_{i=1}^{p} \frac{i}{i+\lambda} \tag{2.49}$$

où λ est un nombre entier positif quelconque plus grand que zéro. Cette égalité étant donnée, il est aisé d'observer qu'en faisant varier les indices entiers λ et p, à partir de 1, on obtient, comme valeurs du rapport $\frac{\left(U_{\frac{1}{\lambda}} - \sum_{\frac{1}{\lambda}}\right)^p}{U_{\frac{p}{\lambda}}}$, les inverses des nombres triangulaires plus grands que 1 de tous les ordres supérieurs à 0 : si $\lambda = 1$, les valeurs successives de p nous donnent les inverses de tous les nombres entiers plus grand que 1, qu'on peut considérer comme des nombres triangulaires d'ordre 1 ; si $\lambda = 2$, les valeurs successives de p nous donnent les inverses de tous les nombres triangulaires plans plus grands que 1 — $3, 6, 10, 15, \ldots$ —, résultant des sommes réitérées des nombres entiers positifs ; si $\lambda = 3$, les valeurs successives de p nous donnent les inverses de tous les nombres pyramidaux, ou triangulaires solides, plus grands que 1 — $4, 10, 20, 35, \ldots$ —, résultant des sommes réitérées des nombres triangulaires plans ; si $\lambda = 4$, les valeurs successives de p nous donnent les inverses de tous les nombres triangulaires plus grands que 1 d'ordre 4 — $5, 15, 35, 70, \ldots$ —, résultant des sommes réitérées des nombres triangulaires solides ; etc. Wallis reconnaît ce fait d'emblée[56]. Il qualifie les nombres triangulaire de tous les ordres de "nombres figurés", c'est-à-dire, respectivement, de "latéraux", "triangulaires", "pyramidaux", "triangupyramidaux", etc. En ajoutant à chacune des successions précédentes le terme initial 1, et à toutes ces successions la succession des nombres triangulaires d'ordre 0, ou, comme dit Wallis, la succession des nombres figurés "monadiques" — $1, 1, 1, 1, \ldots$ —, correspondant à la position $\lambda = 0$ dans le

[55]Cf. Wallis (1656*d*), prop. CXXVIII, 99-100 et CXXX-CXXXI, 102-104.
[56]Cf. Wallis (1656*d*), prop. CXXXI, scolie, 104 et CLXIX, 136-137.

deuxième membre de l'égalité (2.49), on parvient à ranger les différentes valeurs du rapport $\prod_{i=1}^{p} \frac{i+\lambda}{i}$ (auquel on peut assigner la valeur 1, pour $p = 0$) dans une matrice carrée, dans laquelle on reconnaît le triangle de Tartaglia ou de Pascal :

$$
\begin{array}{cr|ccccccc}
 & p+1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\
\lambda+1 & & & & & & & & \\
\hline
1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
2 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\
3 & & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \dots \\
4 & & 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & \dots \\
5 & & 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & \dots \\
6 & & 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
\tag{2.50}
$$

D'après l'égalité (2.49) les entrées de cette matrice donnent les réciproques des différentes valeurs du rapport $\frac{\left(U_{\frac{1}{\lambda}} - \sum_{\frac{1}{\lambda}}\right)^p}{U_{\frac{p}{\lambda}}}$ (auquel on peut assigner la valeur 1, pour $\lambda = 0$).

Bien qu'il ne cite ni Tartaglia, ni Pascal, qui avaient étudié auparavant cette matrice[57], Wallis ne manque pas de reconnaître autant sa symétrie[58], que la simple loi de formation de ses entrées[59].

Pour suivre l'argument de Wallis à partir de ce point, sans se perdre dans des trop longues descriptions, il convient de noter l'entrée de la matrice (2.50) correspondant à la ligne $\lambda + 1 = \mu$ et à la colonne $p + 1 = \nu$ par le symbole "$F_{[\mu,\nu]}$", où μ et ν sont deux nombres entiers positifs quelconques[60], de sorte à réécrire l'égalité (2.49) ainsi :

$$\frac{\left(U_{\frac{1}{\lambda}} - \sum_{\frac{1}{\lambda}}\right)^p}{U_{\frac{p}{\lambda}}} = \frac{1}{F_{[\lambda+1,p+1]}} \tag{2.51}$$

Le rapport qui apparaît dans le membre de gauche de cette égalité se réduit au rapport $\frac{(U_2 - \sum_2)^{\frac{1}{2}}}{U_1}$, que l'égalité (2.44) nous dit être égal au rapport cherché $\frac{\mathsf{ABC}}{\mathsf{ABCD}}$, pour la simple position $\lambda = p = \frac{1}{2}$:

$$\frac{\left(U_{\frac{1}{1/2}} - \sum_{\frac{1}{1/2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{U_{\frac{1/2}{1/2}}} = \frac{(U_2 - \sum_2)^{\frac{1}{2}}}{U_1} \tag{2.52}$$

[57] Cf. respectivement Tartaglia (1556), livre II, ch. XXI, 69-74 et Pascal (1665). Quant au traité de Pascal, on sait qu'il fut imprimé en 1654 (long temps après sa composition), mais qu'il ne fut publié qu'en 1665, après la mort de son auteur. Il est donc naturel de penser que Wallis n'ait pas été au courant des résultats de Pascal.

[58] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CXXXI, scolie 104.

[59] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CXXXII, 104-106.

[60] On sait que ces entrées ne sont rien d'autre que les coefficients binomiaux. Pour rester proche de la démarche de Wallis, je préfère pourtant employer ici un symbole qui évoque explicitement la notion de nombre figuré, plutôt que celle de coefficient d'un développement binomial.

Selon Wallis, celle-ci est une prémisse suffisante pour passer de l'égalité (2.51) à l'égalité :

$$\frac{\mathsf{ABC}}{\mathsf{ABCD}} = \frac{1}{F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}} \tag{2.53}$$

où le symbole "$F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}$" — qui n'est naturellement pas de Wallis — indique l'entrée correspondante à la ligne $\lambda + 1 = \frac{3}{2}$ et à la colonne $p + 1 = \frac{3}{2}$ d'une matrice qui résulte de la matrice (2.50) par une double interpolation consistant dans l'introduction d'une ligne et d'une colonne intermédiaires, respectivement entre chaque deux lignes et chaque deux colonnes successives de cette matrice[61]. En d'autres termes, Wallis nous dit que si, en exploitant les propriétés structurelles de la matrice (2.50), on parvient à remplir les places vides dans la matrice

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 2\lambda+1 \backslash 2p+1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & j=1,\ldots \\
 & & & & & & & \downarrow \\
\hline
0 & ? & ? & ? & ? & ? & \ldots & F_{[\frac{1}{2},\frac{j}{2}]} \\
1 & ? & 1 & ? & 1 & ? & \ldots & F_{[1,\frac{j}{2}]} \\
2 & ? & ? & ? & ? & ? & \ldots & F_{[\frac{3}{2},\frac{j}{2}]} \\
3 & ? & 1 & ? & 2 & ? & \ldots & F_{[2,\frac{j}{2}]} \\
4 & ? & ? & ? & ? & ? & \ldots & F_{[\frac{5}{2},\frac{j}{2}]} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
i=1,\ldots \quad \rightarrow & F_{[\frac{i}{2},\frac{1}{2}]} & F_{[\frac{i}{2},1]} & F_{[\frac{i}{2},\frac{3}{2}]} & F_{[\frac{i}{2},2]} & F_{[\frac{i}{2},\frac{5}{2}]} & \ldots & \ddots
\end{array} \tag{2.54}$$

qui est censé conserver ces mêmes propriétés structurelles, alors on trouve, au croisement de la ligne $2\lambda + 1 = 2$ et de la colonne $2p + 1 = 2$, le réciproque du rapport cherché entre le quart de cercle et le carré construit sur son rayon.

* * *

Si on considère cette conclusion comme un théorème qui justifie la suite du parcours de Wallis (ce que la proposition CLXVIII du traité de Wallis nous incite à faire[62]), alors la preuve de ce théorème suppose deux lemmes que Wallis est loin d'avoir démontré. D'abord elle suppose que les deux membres de l'égalité (2.51) — et non seulement celui de gauche — possèdent un sens lorsqu'on substitue en même temps aux deux indices $\lambda + 1$ et $p + 1$ les nombres fractionnaires $\frac{2i+1}{2}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$; en employant une terminologie aujourd'hui habituelle, cela peut se dire ainsi : cette inférence suppose qu'existent les entités dénotées par les symboles "$F_{[\frac{2i+1}{2},\frac{2j+1}{2}]}$" $(i, j = 0, 1, 2, ...)$. Ensuite cette preuve suppose que l'égalité (2.51) est conservée lorsqu'on pose $\lambda = p = \frac{1}{2}$.

[61] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CLXV-CLXIX, 128-137. Pour cette reconstruction de l'argument de Wallis, cf. Scott (1938), 532 et Whiteside (1960-1962), 238.

[62] Cf. Wallis (1656*d*), 135 : "[...] Circulus ad quadratum diametri, est ut 1 ad □, numerum nempe inter 1 & 2 interponendum in serie diagonalium $1, 2, 6, 20, 70, \&c.$ tabelle prop. 32." Le "tableau" donnée dans la prop. 32 (ou XXXII, pour être plus précis) est évidemment la matrice (2.50). Le symbole "□", qui est introduit par Wallis lors de la proposition précédente, fonctionne ici comme une lettre indiquant une inconnue dans une équation : il dénote le réciproque du rapport inconnu entre le quart du cercle et le rayon construit sur son rayon.

Si ces deux lemmes sont concédés, l'argument de Wallis conduit à réduire le problème de la détermination du rapport entre le quart de cercle et le carré construit sur son rayon au problème de l'interpolation de la matrice (2.50), c'est-à-dire au problème du remplissage des places vides de la matrice (2.54). Wallis n'est pourtant pas dans les conditions de démontrer (ni même de justifier inductivement) ni l'un ni l'autre de ces lemmes. La raison en est claire : il n'a aucune peur formuler en termes précis la condition d'existence énoncée par le premier lemme. Ce lemme nous apparaît clair aujourd'hui, car subrepticement nous le reformulons ainsi : il existe des nombres réels qu'on peut identifier avec les nombres $F_{[\frac{2i+1}{2},\frac{2j+1}{2}]}$. Et prouver ceci se réduit pour nous à prouver que l'ensemble des nombre réels est fermé par rapport aux opérations qui conduisent des entrées de la matrice (2.50) aux entrées de la matrice (2.54) complétée dans toutes ses places, c'est-à-dire que si ces opérations sont appliquées à des nombres réels, alors elles ne peuvent que produire d'autres nombres réels. C'est exactement ce que Wallis ne peut pas prouver, car, faute de toute notion analogue à notre notion de nombre réel, il ne peut pas énoncer et penser son lemme de cette manière. Tout ce que Wallis peut supposer, mais évidemment pas prouver, est que si l'objet hypothétique $F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}$ pouvait de quelques manières que ce soit être déterminé, alors il coïnciderait avec l'objet hypothétique x_C satisfaisant la proportion (2.46). Les égalités (2.44) et (2.51) étant données, celle-ci est au fond une manière d'énoncer le deuxième lemme, et c'est même la seule manière à la disposition de Wallis pour énoncer ce lemme.

On comprendra alors que — sauf si on veut faire dépendre la démarche de Wallis d'une foi métaphysique dans une existence transcendante des objets mathématiques, révélée aux hommes par des signaux que le mathématicien sait décrypter — cette démarche ne peut (en dépit de la nature assertive de la proposition CLXVIII) guère être conçue comme une preuve qui conduit d'un théorème établi à un autre théorème. C'est plutôt une démarche hypothétique, ou si on préfère analytique, que l'on pourrait résumer ainsi : d'abord Wallis avance l'hypothèse que la proportion (2.46) peut convenir pour un objet x_C dont même la nature reste inconnue ; ensuite il parvient, par des justifications positives (encore que largement fondées sur la pratique de l'induction) aux égalités (2.44) et (2.51) ; à partir de là, il suppose que l'objet hypothétique x_C coïncide avec l'objet hypothétique $F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}$; ceci lui permet de chercher à déterminer cet objet par des démarches purement arithmétiques visant une interpolation d'une matrice de nombres triangulaires (dite aujourd'hui "triangle de Pascal") ; ces dernières démarches ayant abouti sinon à l'exhibition d'un objet déjà connu qu'on peut reconnaître comme l'objet $F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}$ qui était cherché, au moins à la détermination de conditions arithmétiques plus explicites que celle fixée par la définition même de $F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}$, auxquelles un tel objet est censé satisfaire, il pourra enfin espérer de pouvoir vérifier, *a posteriori* (lors d'une sorte de synthèse affaiblie) qu'un objet qui satisfait à ces conditions satisfait aussi à la proportion (2.46). C'est l'avant dernière étape de ce parcours qu'il faut exposer maintenant.

* * *

Une première interpolation de la matrice (2.50) n'est pas difficile à obtenir. Il suffit d'exprimer le rapport entre un nombre triangulaire d'un ordre donné et son côté l en termes de l, d'opérer dans ce rapport la substitution $l \to l + \frac{1}{2}$, et de multiplier le résultat ainsi obtenu par $l + \frac{1}{2}$, ce qui équivaut à opérer directement la substitution $l \to l + \frac{1}{2}$ dans les expressions des nombres figurés en termes de leur côté l. Wallis aurait pu faire ceci d'un seul trait, en observant que pour tout nombre entier μ strictement positif et tout nombre entier ν plus grand que 1, on a

$$F_{[\mu,\nu]} = F_{[\nu,\mu]} = \prod_{i=1}^{\nu-1} \frac{\mu+i-1}{i} = \frac{\mu\,(\mu+1)\,(\mu+2)\ldots(\mu+\nu-2)}{(\nu-1)!} \tag{2.55}$$

et en opérant la substitution indiquée directement sur cette expression. Il n'exploite pourtant pas cette possibilité. Il considère plutôt, les unes après les autres, les successions des nombres triangulaires des ordres $2, 3, 4, 5$; il détermine les formes générales des termes de ces successions — $\frac{l(l+1)\ldots(l+\lambda)}{\lambda!}$ $(\lambda = 2, 3, 4, 5)$ — ; il tire de là les valeurs des nombres triangulaires intermédiaires de ces ordres ; et il généralise ensuite les résultats ainsi obtenus aux nombres triangulaires de tous les ordres. Cette démarche se poursuit au cours de plusieurs propositions[63] . Wallis parvient enfin à la conclusion suivante :

$$F_{[\nu,j+\frac{1}{2}]} = F_{[j+\frac{1}{2},\nu]} = \frac{\left(j+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{3}{2}\right)\left(j+\frac{5}{2}\right)\ldots\left(j+\nu-\frac{3}{2}\right)}{(\nu-1)!} \tag{2.56}$$

où j et ν sont deux nombres entiers positifs quelconques, dont le deuxième est plus grand que 1. De là, en observant que, quel que soit μ, $F_{[\mu,1]} = F_{[1,\mu]} = 1$ et en posant donc $F_{[1,j+\frac{1}{2}]} = F_{[j+\frac{1}{2},1]} = 1$ pour tout j, on obtient la matrice suivante :

$$\begin{array}{rr|cccccc|c}
 & {\scriptstyle 2p+1} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle \ldots} & {\scriptstyle j=1,\ldots} \\
{\scriptstyle 2\lambda+1} & & & & & & & & \downarrow \\
\hline
{\scriptstyle 0} & & ? & 1 & ? & \frac{1}{2} & ? & \ldots & F_{[\frac{1}{2},\frac{j}{2}]} \\
{\scriptstyle 1} & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & F_{[1,\frac{j}{2}]} \\
{\scriptstyle 2} & & ? & 1 & ? & \frac{3}{2} & ? & \ldots & F_{[\frac{3}{2},\frac{j}{2}]} \\
{\scriptstyle 3} & & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & \ldots & F_{[2,\frac{j}{2}]} \\
{\scriptstyle 4} & & ? & 1 & ? & \frac{5}{2} & ? & \ldots & F_{[\frac{5}{2},\frac{j}{2}]} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
{\scriptstyle i=1,\ldots} & \longrightarrow & F_{[\frac{i}{2},\frac{1}{2}]} & F_{[\frac{i}{2},1]} & F_{[\frac{i}{2},\frac{3}{2}]} & F_{[\frac{i}{2},2]} & F_{[\frac{i}{2},\frac{5}{2}]} & \ldots & \ddots
\end{array} \tag{2.57}$$

qui résulte d'un remplissage partiel des places vides dans la matrice (2.54)

Il reste à remplir les places vides de la matrice (2.57), ce qui demande une deuxième interpolation.

Quelle que soit la manière dont on les considère, les expressions des différents nombres triangulaires en termes de leurs côtés, ne peuvent pas aider pour parvenir à cette deuxième interpolation, car il n'est pas possible de substituer dans ces formules aussi bien le nombre entier qui exprime l'ordre du nombre triangulaire que celui qui en exprime le côté par des nombres fractionnaires. Donc, si Wallis ne veut pas retourner à la considération des rapports $\frac{\left(U_{\frac{1}{\lambda}}-\sum\frac{1}{\lambda}\right)^{p}}{U_{\frac{p}{\lambda}}}$ (ce qui rendrait inutile la démarche précédente), il n'a autre possibilité que de considérer des propriétés structurelles de la matrice (2.57), c'est-à-dire les relations qui lient entre eux les différents termes connus de cette matrice.

[63]Cf. Wallis (1656*d*), prop.CLXIX-CLXXXV, 136-165.

Pour ce faire, il observe d'abord[64] que la loi de formation des termes de la matrice (2.50) et la procédure qui conduit à sa première interpolation sont telles que tous les termes connus de la matrice (2.57) qui n'appartiennent ni à ses deux premières lignes, ni à ses deux premières colonnes sont liés aux termes connus appartenant à ces lignes et colonnes par la simple règle récursive suivante :

$$F_{[\frac{k+1}{2},\frac{j}{2}]} = F_{[\frac{j}{2},\frac{k+1}{2}]} = \left(\frac{j+k-3}{j-2}\right) F_{[\frac{k+1}{2},\frac{j}{2}-1]} = \left(\frac{j+k-3}{j-2}\right) F_{[\frac{j}{2}-1,\frac{k+1}{2}]} \tag{2.58}$$

où k est un nombre entier positif quelconque dénotant la ligne ou la colonne de la matrice (2.57) à laquelle appartiennent les termes $F_{[\frac{k+1}{2},\frac{j}{2}]}$ et $F_{[\frac{j}{2},\frac{k+1}{2}]}$, j est un nombre entier positif plus grand que 2 indiquant le poste de ces termes dans la ligne ou la colonne à laquelle ils appartiennent, et ces nombres sont tels que ou bien $\frac{k+1}{2}$ ou bien $\frac{j}{2}$ est un entier. Cela signifie qu'il suffit de connaître les termes des deux premières lignes ou ceux de deux premières colonnes de cette matrice pour en tirer tous les autres par la plus simple des règles récursives. Si on suppose alors que cette règle vaut pour tous les termes qui sont censés entrer dans la matrice (2.57), c'est-à-dire qu'elle vaut quels que soient les nombres entiers positifs k et j, pourvu que $j > 2$, alors il suffit de connaître un seul des termes qui remplissent les places vides d'une telle matrice, pour pouvoir en tirer tous les autres.

Ainsi, si en suivant Wallis, on pose[65] $F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]} = \square$, la règle (2.58) nous permet de remplir toute les places vides de la matrice (2.57) par des termes de la forme $\frac{n}{m}\square$, n et m étant des nombres entiers positifs[66] :

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
 & 2p+1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & j=1,\ldots \\
2\lambda+1 & & & & & & & & \downarrow \\
\hline
0 & & \frac{1}{0}\square & 1 & \frac{1}{2}\square & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\square & \cdots & F_{[\frac{1}{2},\frac{j}{2}]} \\
1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & F_{[1,\frac{j}{2}]} \\
2 & & \frac{1}{2}\square & 1 & \square & \frac{3}{2} & \frac{4}{3}\square & \cdots & F_{[\frac{3}{2},\frac{j}{2}]} \\
3 & & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & \cdots & F_{[2,\frac{j}{2}]} \\
4 & & \frac{1}{3}\square & 1 & \frac{4}{3}\square & \frac{5}{2} & \frac{8}{3}\square & \cdots & F_{[\frac{5}{2},\frac{j}{2}]} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
i=1,\ldots & \rightarrow & F_{[\frac{i}{2},\frac{1}{2}]} & F_{[\frac{i}{2},1]} & F_{[\frac{i}{2},\frac{3}{2}]} & F_{[\frac{i}{2},2]} & F_{[\frac{i}{2},\frac{5}{2}]} & \cdots & \ddots
\end{array} \tag{2.59}$$

Il s'ensuit que si la règle (2.58), prise en tant que telle, n'aide guère Wallis à déterminer le rapport cherché, elle permet au moins d'établir des relations que tous les termes de la matrice (2.59), et donc aussi $F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}$, doivent respecter. Cette règle exhibe des nouveaux objets arithmétiques qui vont devenir désormais les objets de la réflexion de Wallis ; ce sont les facteurs $\frac{j+k-3}{j-2}$ ($k = 0, 1, 2 \ldots$; $j = 3, 4, 5, \ldots$), qui lient chaque terme de cette matrice au terme qui apparaît deux places plus loin dans la même ligne ou dans la même colonne.

En particulier, Wallis cherche à comprendre[67] si parmi les lignes ou les colonnes de place paire et les lignes ou les colonnes de place impaire dans la matrice (2.59) il y a une différence

[64] Cf. Wallis (1656*d*), prop.CLXXXVII-CLXXXVII, 167-169.
[65] Cf. la note (62), ci-dessus.
[66] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CLXXXIX, 169-170.
[67] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CLXXXX, 170-178.

structurelle — c'est-à-dire une différence qui ne tient qu'aux relations qu'ont entre eux les différents termes de ces lignes ou colonnes — qui puisse expliquer pourquoi l'interpolation complète des premières est plus aisée que l'interpolation complète des deuxièmes. Pour ce faire, il considère les facteurs $\frac{j+k-3}{j-2}$ et il montre que les facteurs $\frac{j+k-3}{j-2}$ qui lient entre eux les termes de place paire dans les lignes ou colonnes de place paire ont, avec les facteurs $\frac{j+k-3}{j-2}$ qui lient entre eux les termes de place impaire dans ces mêmes lignes ou colonnes une relation que les facteurs $\frac{j+k-3}{j-2}$ qui lient entre eux les termes de place paire dans les lignes ou colonnes de place impaire n'ont pas avec les facteurs $\frac{j+k-3}{j-2}$ qui lient entre eux les termes de place impaire dans ces mêmes lignes ou colonnes.

En effet, si dans $\frac{j+k-3}{j-2}$ on pose $k = 2\kappa + 1$ $(\kappa = 0, 1, 2, \ldots)$ — ce qui indique qu'on considère des lignes ou des colonnes de place paire —, on obtient $\frac{j+2\kappa-2}{j-2}$ $(\kappa = 0, 1, 2, \ldots)$; si $\kappa > 0$, ce facteur est donc donné par le rapport de deux nombres entiers positifs plus grands que 0 (car $j > 2$), dont la différence est 2κ, c'est-à-dire qu'il résulte du produit de 2κ facteurs tels que $\frac{n+1}{n}$:

$$(k = 2\kappa + 1) \Rightarrow \left(\frac{j+k-3}{j-2} = \frac{j+2\kappa-2}{j-2} = \prod_{i=j-2}^{j+2\kappa-3} \frac{i+1}{i} \right) \tag{2.60}$$

On peut donc écrire ce facteur comme le produit de deux autres produits dont chacun a κ facteurs, respectivement de la forme $\frac{2n}{2n-1}$ et $\frac{2n+1}{2n}$:

$$(k = 2\kappa + 1) \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \dfrac{j+k-3}{j-2} & = \dfrac{j+2\kappa-2}{j-2} \\ & = \left(\displaystyle\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{j+2i-1}{j+2i-2} \right) \left(\displaystyle\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{j+2i}{j+2i-1} \right) \end{array} \right] \tag{2.61}$$

Comme la substitution $j \to j+1$ transforme $\frac{j+2i-1}{j+2i-2}$ en $\frac{j+2i}{j+2i-1}$, il s'ensuit que, quel que soit j $(j = 3, 4, 5, \ldots)$, le facteur $\frac{j+k-3}{j-2}$ peut être exprimé comme un produit de deux facteurs tels que $\left(\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{j-1+2i}{j-2+2i} \right)$ et $\left(\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{j+2i}{j-1+2i} \right)$, dont le deuxième est aussi un facteur de $\frac{j+k-3}{j-2}$ pour la valeur successive de j.

Ceci n'a pas lieu pour les lignes ou les colonnes de place impaire. Si dans $\frac{j+k-3}{j-2}$ on pose $k = 2\kappa$ $(\kappa = 0, 1, 2, \ldots)$, ce facteur devient égal à $\frac{j+2\kappa-3}{j-2}$ $(\kappa = 0, 1, 2, \ldots)$, de sorte que si $\kappa > 0$, il est donné par le rapport de deux nombres entiers positifs plus grands que 0, dont la différence est $2\kappa - 1$. Ce facteur résulte ainsi du produit de $2\kappa - 1$ facteurs, tels que $\frac{n+1}{n}$, et ces facteurs, étant en nombre impair, ne peuvent pas être partagés en deux classes dont chacune a le même nombre d'éléments.

Imaginons maintenant de considérer les troisièmes termes des lignes ou colonnes de place paire à partir de la quatrième, $F_{\kappa+1,\frac{3}{2}} = F_{\frac{3}{2},\kappa+1}$ $(\kappa = 1, 2, 3, \ldots)$. D'après l'égalité (2.58), ces termes dérivent des premiers termes de ces lignes ou colonnes selon la formule :

$$F_{\kappa+1,\frac{3}{2}} = F_{\frac{3}{2},\kappa+1} = (2\kappa+1)\, F_{\kappa+1,\frac{1}{2}} = (2\kappa+1)\, F_{\frac{1}{2},\kappa+1} \tag{2.62}$$

Comme dans cette formule le facteur $2\kappa+1$ n'est rien que la valeur du facteur $\frac{j+k-3}{j-2}$ pour les positions $k = 2\kappa + 1$ et $j = 3$, l'égalité (2.61) nous suggère d'exprimer ce facteur comme un produit de deux facteurs dont chacun est à son tour un produit de κ facteurs respectivement de la forme $\frac{2n}{2n-1}$ et $\frac{2n+1}{2n}$:

$$2\kappa + 1 = \left(\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{2+2i}{1+2i}\right)\left(\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{3+2i}{2+2i}\right) \tag{2.63}$$

Or, comme on l'a vu en général, le deuxième de ces facteurs, $\left(\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{3+2i}{2+2i}\right)$, entre aussi dans l'expression analogue du facteur $\frac{j+k-3}{j-2}$ pour $j = 4$. Considérons en revanche le premier de ces facteurs. Il est facile de vérifier qu'en divisant par ce facteur les deuxièmes termes de chaque ligne ou colonne (qui sont donnés toujours par le nombre 1), on obtient les premiers termes de ces lignes ou colonnes :

$$F_{\kappa+1,\frac{1}{2}} = \frac{1}{\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{2+2i}{1+2i}} = \prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{1+2i}{2+2i} \tag{2.64}$$

De là, en appliquant l'égalité (2.57), il est ensuite facile de retrouver tous les termes (autant de place paire qu'impaire) des lignes ou colonnes de place paires.

Or, il est clair que l'égalité (2.64) n'est rien qu'une reformulation de l'égalité (2.56), car

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}{\kappa!} &= \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 2\kappa - 1}{(1 \times 2)(2 \times 2)(3 \times 2)\ldots(\kappa \times 2)} \\ &= \prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{1+2i}{2+2i} \end{aligned} \tag{2.65}$$

Ce qui semble importer à Wallis est pourtant que l'égalité (2.64) est désormais dérivée non pas de la règle de formation des nombres triangulaires des différents ordres, mais de la considération des propriétés structurelles de la matrice (2.50). Cette matrice manifeste donc, d'elle-même, une structure qui conduit à sa première interpolation. Dit en d'autres termes : en conjonction avec l'égalité (2.57), l'égalité (2.56) fournit une règle, qui est en tant que telle indépendante de la loi de formation des nombres triangulaires, qui permet de conduire à la première interpolation de cette matrice. Prises ensemble, ces égalités expriment en fait toutes les entrées des lignes et colonnes de place paire connues matrice (2.59) en termes des entrées de la matrice (2.50).

Le fait que l'argument qui nous a conduit à l'égalité (2.64) ne peut pas être répété pour les lignes ou colonnes de place impaire dans la matrice (2.59) suggère à Wallis que les termes de place impaire dans ces lignes ou colonnes ne sont pas liés aux termes de place paire par un lien Algébrique. Voici ce que Wallis écrit :

> Et quidem proclivis sum ut credam (quod et ab initio suspicatus sum,) rationem illam quam quærimus talem esse quæ non poterit numeris exprimi juxta ullum adhuc receptum notationis modum, ne quidem per latera surda ; [...] ut necesse videatur alium ejusmodi rationem explicandi modum introducere, quam vel per numeros veros, vel etiam per latera surda[68].

[68]Cf. Wallis (1656d),prop. XLXXX, scolie, 174.

S'il n'a certes pas fourni la preuve que le rapport entre le cercle et le carré construit sur son diamètre ne peut pas être exprimé par un nombre algébrique, et s'il est même loin d'affirmer que le nombre π est transcendant — car il ne dispose d'aucune notion analogue à celle du nombre réel π, et encore moins d'une notion analogue à celle de nombre transcendant —, Wallis semble ainsi persuadé que sa démarche lui donne le droit d'avancer une conjecture : le rapport entre le cercle et le rayon construit sur son diamètre ne peut pas être obtenu en composant les nombres entiers positifs selon les opérations Algébriques connues.

Cela n'est pas encore une raison pour conclure que la proportion (2.46) n'admet pas un quatrième proportionnel. Si la matrice (2.59), avec ses propriétés structurelles que Wallis a su dévoiler, n'exhibe en fait aucun nombre déterminé dans lequel il soit possible de reconnaître ce quatrième proportionnel, elle ne fournit, aux yeux de ce dernier, que des informations pouvant justifier une conclusion négative ; d'autres informations semblent au contraire rendre viable une conjecture positive, dont l'importance justifie qu'elle figure à la fin d'un traité aussi sophistiqué et novateur que l'*Arithmetica infinitorum* : s'il ne peut être exprimé ni par un nombre fractionnaire, ni par un radical, le rapport entre un cercle et le carré construit sur son rayon peut être être exprimée par le biais d'une nouvelle opération arithmétique, qu'il ne s'agit que de définir :

> Quoties autem hoc contingint, cum illud veris numeris designari non possit (& ne quidem solis radicibus surdis) quærendus erit modus aliquis id ipsum utcunque exprimendi. Si igitur ut $\surd : 3 \times 6$: significat *terminum medium inter* 3 *et* 6 *in progressione Geometrica æquabili* $3, 6, 12, \&c.$ (continue multiplicando $3 \times 2 \times 2\&c.$) ita $\mathcal{M} : 1 \mid \frac{3}{2}$: significet *terminum medium inter* 1 *&* $\frac{3}{2}$ *progressione Geometrica decrescente* $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \&c.$ (continue multiplicando $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4}\&c.$) erit $\square = \mathcal{M} : 1 \mid \frac{3}{2}$: *Et propterea circulus est ad quadratum diametri, ut* 1 *ad* $\mathcal{M} : 1 \mid \frac{3}{2}$. Quæ quidem erit vera circuli quadratura in numeris, quatenus ipsa numerorum patitur, explicata[69].

Cela pourrait sembler un artifice, et ça l'est en partie. En effet le symbole "$\surd : 3 \times 6$" renvoie à un problème dont on sait exprimer la solution autrement que par ce même symbole : la raison de la progression géométrique $\{3, 6, 12, \ldots\}$ est 2 et si sa base est 3, alors son terme générique est 3×2^i, donc le terme intermédiaire entre 3 et 6 est $3 \times 2^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{2}$. Dans cette manière on a réduit le problème posé à un autre problème qu'on peut chercher à formuler et à résoudre de manière indépendante : le problème de déterminer un "nombre" x tel que $x^2 = 2$. Dans ce sens, le problème posé par le symbole "$\surd : 3 \times 6$" peut être dit résolu et non seulement posé. Mais il ne s'agit pas, au fond, d'une vraie solution, car l'équation $x^2 = 2$ pose elle-même un problème qui n'est pas résolu par la simple écriture du symbole "$\sqrt{2}$", qui n'est, au fond, comme le symbole "$\surd : 3 \times 6$", qu'une manière d'indiquer un problème. Wallis peut donc penser qu'un symbole comme "$\mathcal{M} : 1 \mid \frac{3}{2}$" n'est pas essentiellement distinct d'un symbole comme "$\surd : 3 \times 6$" ou même comme "$3\sqrt{2}$" : ces symboles expriment tous la conclusion de l'analyse, sans avancer en rien dans la synthèse. Si dans le dernier cas on a l'impression d'avoir avancé plus loin dans la solution du problème c'est seulement parce que la pratique de l'Algèbre arithmétique nous enseigne à manipuler et à combiner entre eux des signes tels que "$3\sqrt{2}$" ; celle-ci n'est pour autant pas encore une synthèse et rien ne nous empêche d'espérer qu'on puisse faire autant avec des signes

[69] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CLXXXX, scolie, 175.

tels que "$\mathcal{M} : 1 \mid \frac{3}{2}$"[70]. Au fond, Wallis lance donc un appel aux développements futurs des mathématiques, et indique en même temps un programme de recherche.

Ce programme de recherche est d'autant plus prometteur que la seule voie qui aurait pu apparaître, à l'époque de Wallis, comme étant disponible pour avancer vers l'identification du "nombre" qui satisfait une équation comme $x^2 = 2$ — celle d'une approximation ou, du moins, d'une expression Algébrique infinitaire — permet aussi d'avancer vers l'identification du "nombre" qui satisfait la condition $\mathcal{M} : 1 \mid \frac{3}{2}$. C'est la dernière étape du long parcours de Wallis[71].

Du fait que la succession

$$\left\{ F_{[\frac{3}{2},1]} = 1, F_{[\frac{3}{2},2]} = \frac{3}{2}, F_{[\frac{3}{2},3]} = \frac{15}{8}, \ldots \right\} \tag{2.66}$$

exhibée par la matrice (2.59) satisfait, quel que soit ν ($\nu = 2, 3, \ldots$), la condition

$$\frac{F_{[\frac{3}{2},\nu]}}{F_{[\frac{3}{2},\nu-1]}} > \frac{F_{[\frac{3}{2},\nu+1]}}{F_{[\frac{3}{2},\nu]}} \tag{2.67}$$

Wallis tire que la succession

$$\left\{ F_{[\frac{3}{2},\frac{1}{2}]} = \frac{1}{2}\Box, F_{[\frac{3}{2},1]} = 1, F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]} = \Box, F_{[\frac{3}{2},2]} = \frac{3}{2}, \ldots \right\} \tag{2.68}$$

dérivée de celle-ci par une interpolation ultérieure, doit satisfaire la même condition : les rapports entre chaque terme de cette succession et le précédent doivent former une succession décroissante. En posant, pour faire simple, $F_{[\frac{3}{2},\nu]} = \Phi_\nu$ et $F_{[\frac{3}{2},\frac{2\nu-1}{2}]} = \Psi_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$), on obtient, quel que soit j ($j = 1, 2, \ldots$) les inégalités :

$$\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j} < \left(\frac{\Psi_{j+1}}{\Phi_j}\right)^2 < \frac{\Psi_{j+1}}{\Psi_j} \tag{2.69}$$

c'est-à-dire :

$$\Phi_j\sqrt{\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j}} < \Psi_{j+1} < \Phi_j\sqrt{\frac{\Psi_{j+1}}{\Psi_j}} \tag{2.70}$$

Donc, d'après l'égalité (2.58), on aura

$$\frac{(2j)(2j-2)(2j-4)\ldots(4)}{(2j-1)(2j-3)\ldots(3)}\Box \begin{cases} > \dfrac{(2j-1)(2j-3)\ldots(3)}{(2j-2)(2j-4)\ldots(2)}\sqrt{\dfrac{2j+1}{2j}} \\ < \dfrac{(2j-1)(2j-3)\ldots(3)}{(2j-2)(2j-4)\ldots(2)}\sqrt{\dfrac{2j}{2j-1}} \end{cases} \tag{2.71}$$

[70] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CLXXXX, scolie, 176-177 : "Sicut autem notation numeri surdi (puta $\sqrt{2}$ &c.) in Arithmeticam introduxit methodum addendi, subducendi, multiplicandi, dividendi, &c. latera surda ; ita non erit difficile ejusmodi operationes novum hunc nostrum notationis modum applicare ; quod tamen præsentis instituti non est. Non ignoro interim ad hanc ipsam notationem accuratius perficiendam, apponendas esse notæ $\mathcal{M}$ distinctiones suas, puta $\mathcal{M}^2$, $\mathcal{M}^3$, $\mathcal{M}^4$, &c, prout indicaverit vel medium unicum, vel primum duorum, trium, &c ; [...]".

[71] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CLXXXXI, 178-193.

c'est-à-dire :

$$\square \begin{cases} > \dfrac{(2j-1)^2(2j-3)^2\dots(3)^2}{(2j)(2j-2)^2(2j-4)^2\dots(2)}\sqrt{\dfrac{2j+1}{2j}} \\ < \dfrac{(2j-1)^2(2j-3)^2\dots(3)^2}{(2j)(2j-2)^2(2j-4)^2\dots(2)}\sqrt{\dfrac{2j}{2j-1}} \end{cases} \tag{2.72}$$

Comme la différence des extrêmes qui encadrent $\square$ est de plus en plus petite au fur et à mesure que j augmente, c'est-à-dire que le rapport

$$\frac{\sqrt{\frac{2j}{2j-1}}}{\sqrt{\frac{2j+1}{2j}}} = \sqrt{\frac{4j^2}{4j^2-1}} \tag{2.73}$$

s'approche de plus en plus de 1 au fur et à mesure que j augmente, Wallis conclut que la fraction $\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times\&c.}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times\&c.}$, "in infinite continuatam esse ipsissimum quæsitum numerum $\square$ præcise"[72], c'est-à-dire :

$$\square = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1)^2}{(2i)(2i+2)} \tag{2.74}$$

où l'on reconnaît l'expression de π qu'aujourd'hui on fait justement remonter à Wallis.

* * *

C'est avec ce résultat (et son expression en termes de fractions continues[73]) que Wallis avait probablement clôturé son traité en 1655 ; les trois dernières propositions et le scolie final[74] furent probablement ajoutés l'année suivante[75]. Ces propositions visent à exprimer "*in lineis*"[76] les résultats principaux atteints dans ce traité. Du fait que la troisième colonne (ou la troisième ligne) de la matrice (2.59) est donnée par la succession

$$\left\{\frac{1}{2}\square, 1, \square, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\square, \frac{15}{8}, \frac{8}{5}\square, \frac{35}{16}, \frac{64}{35}\square, \frac{315}{128}, \dots\right\} \tag{2.75}$$

Wallis conclut[77] que si une courbe est référée à un axe qui la coupe en un point donné, qu'on prend sur cet axe, et à partir de ce point, une famille de segments quelconques en progression arithmétique, disons les segments ia ($i = 1, 2, 3, ...$), et que la courbe est telle que les parallèles à l'axe donné prises à partir des extrémités successives de ces segments coupent la courbe, en formant des segments respectivement égaux à a, $\frac{3}{2}a$, $\frac{15}{8}a$, $\frac{35}{16}a$, $\frac{315}{128}a, \dots$ (en constituant une succession d'ordonnées qui sont entre elles comme les termes de place paire dans la succession 2.75), alors l'ordonnée correspondante à a sera à l'ordonnée correspondante à $\frac{3}{2}a$, comme un cercle est au carré construit sur son diamètre. Et il ajoute[78] que de la matrice (2.59) on peut dériver une infinité d'autres propositions de ce type.

[72] Cf. Wallis (1656*d*), 180.
[73] Cf. Wallis (1656*d*), 181-193.
[74] Cf. Wallis (1656a), prop. CXCII-CXCIV, 193-198.
[75] Cf. la note (159) ci-dessus.
[76] Cf. Wallis (1656*d*), 200.
[77] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CXCIII, 194.
[78] Cf. Wallis (1656*d*), prop. CXCIV, *scholium*, 194.

Il est clair que la courbe dont il est question, référée au système de coordonnées défini par Wallis est exprimée par une équation telle que $y = K\,[G(x)]$, où $G(x)$ est un segment tel que $G(ja) = F_{[\frac{3}{2},j]}a$ ($j = 1, 2, ...$), quel que soit a.

La considération d'une courbe comme celle-ci est emblématique autant de l'exigence mathématique que Wallis semble ressentir face à la conclusion à laquelle il est arrivé, que de l'impasse dans lequel il se trouve. D'un côté Wallis ressent l'exigence de représenter son résultat par le biais d'une courbe, c'est-à-dire de l'interpréter autrement que comme la simple caractérisation d'un rapport constant. De l'autre il est incapable de caractériser sa courbe autrement que comme le résultat inconnu d'une interpolation continue ; et il est aussi incapable de se réclamer d'une autre courbe, dont les ordonnées représentent les quadratures successives des différentes portions d'un cercle. Pour généraliser son résultat, il ne sait qu'envisager la possibilité de carrer, selon la même procédure et en employant les mêmes outils mathématiques, des figures autres que le cercle, qu'il ne sait d'ailleurs pas déterminer d'une manière précise. Il n'est pourtant pas sans tirer de ce résultat un enseignement cruciale : le domaine des courbes géométriques de Descartes est trop étroit pour permettre de représenter "*in lineis*" la quadrature des courbes géométriques elles-mêmes ; en d'autres termes, ce domaine est ouvert par rapport à une opération de quadrature définie sur ces courbes. Dans le scolie final de son traité, il affirme en effet que les valeurs non rationnelles intervenant dans la matrice (2.59) "provenient [...] æquabiles curvæ et regulares (quales puta pro Geometricis agnosceret Cartesius)"[79].

[79] Cf. Wallis (1656*d*), 196.

Chapitre 3

Normales, tangentes, aires et rectifications dans la géométrie cartésienne

Dans la géométrie de Descartes, une courbe est donnée lorsqu'elle est construite par règle, compas et réitération[1] ; elle peut cependant être définie d'une manière univoque grâce à une équation Algébrique. En énonçant cette définition on ne donne pas la courbe, mais on fait plus qu'établir des conditions satisfaites par une seule courbe. Lorsque l'équation d'une courbe est donnée, cette courbe reste inconnue si elle n'est exhibée par une construction. Néanmoins, les conditions fixées par l'équation permettent d'établir, avant toute construction, certaines propriétés saillantes de celle-ci. Voici ce que Descartes lui-même écrit dans le II$^{\text{ème}}$ livre de la *Géométrie*, après son traitement du problème de Pappus :

> Or, de cela seul qu'on sçait le rapport qu'ont tous les poins d'vne ligne courbe a tous ceux d'vne ligne droite, en la façon que i'ay expliquée, il est aysé de trouuer aussy le rapport qu'ils ont a tous les autres poins & lignes données : &, en suite, de connoistre les diametres, les aissieux, les centres, & autres lignes ou poins a qui chasque ligne courbe aura quelque rapport plus particulier, ou plus simple, qu'aux autres ; & ainsi d'imaginer diuers moyens pour les descrire, & et d'en choisir les plus faciles. Et mesme on peut aussy, par cela seul, trouuer quasi tout ce qui peut estre determiné touchant la grandeur de l'espace qu'elles comprenent, sans qu'il soit besoin que i'en donne plus d'ouuerture. Et enfin, pour ce qui est de toutes les autres proprietés qu'on peut attribuer aux lignes courbes, elles ne dependent que de la grandeur des angles qu'elles font auec quelques autres lignes. Mais, lorsqu'on peut tirer des lignes droites qui les couppent a angles droits, aux poins où elles sont rencontrées par celles auec qui elles font les angles qu'on veut mesurer, ou, ce que ie prens icy pour le mesme, qui couppent leurs contingentes, la grandeur de ces angles n'est pas plus malaysée a trouver que

[1] Cf. la section 1.4.2.

s'ils estoient compris entre deux lignes droites.[2]

Que cela ne soit pas facile à faire lorsque l'équation a un degré relativement élevé ne change rien à la perspective que Descartes ouvre par ces mots. Il s'agit de trouver des méthodes pour établir, à partir de la donnée d'une équation exprimant une courbe, autant de propriétés de cette courbe qu'il est possible, sans passer par sa construction ; ce sera une des principales lignes de recherche des mathématiciens qui, après Descartes, chercheront à suivre son enseignement et à développer ses théories.

3.1 La méthode de Descartes pour les normales et les tangentes

Descartes ouvre la voie, en présentant, dès le deuxième livre de la *Géométrie*[3], sa méthode pour la recherche des normales. C'est, d'après lui, le plus général des problèmes de géométrie, et il ne croit pas inutile de le répéter[4] :

> [...] ie croyray auoir mis icy tout ce qui est requis pour les elemens des lignes courbes, lorsque i'auray generalement donné la façon de tirer des lignes droites qui tombent a angles droits sur tels de leurs poins qu'on voudra choisir. Et i'ose dire que c'est cecy le problesme le plus vtile & le plus general, non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçauoir en Geometrie.

Je vais exposer d'abord la méthode de Descartes en suivant la présentation que celui-ci en donne dans la *Géométrie*[5]. Je montrerai en suite comment celle-ci peut être reformulée, et enfin comment elle fut simplifiée par Florimond de Beaune.

3.1.1 La présentation méthode dans la *Géométrie*

Descartes se réclame d'entrée de la tradition de l'analyse géométrique[6] :

> Ie suppose la chose desia faite, & que la ligne cherchée est MG [fig. 1], laquelle ie prolonge iusques au point G où elle rencontre la ligne droite HA, que ie suppose estre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne ME.

La courbe AN est ici une courbe quelconque et on n'a même pas besoin de supposer qu'on sache la construire. Cela n'empêche pas Descartes de la dessiner, et même de supposer que sa tangente TF et sa normale MG sont connues. Il suffit de tracer une ligne courbe quelconque et deux droites passant par un de ses points, en faisant attention, dans la suite de l'argument, que la nature particulière du dessin ne justifie pas l'une ou l'autre des inférences qui constituent cet argument. Ce qu'il y à de nouveau est que cette courbe se rapporte à un axe fixe sur lequel on a marqué une origine, de telle sorte que la position de chacun de ses points relativement à cet axe et à cette origine respecte une certaine condition exprimée

[2]Cf. Descartes (1637), 341.
[3]Cf. Descartes (1637), 342-352.
[4]Cf. Descartes (1637), 341-342.
[5]Sur la méthode des tangentes de Descartes, cf., entre autres, Galuzzi (1980).
[6]Cf. Descartes (1637), 342. Pour des raisons d'uniformité, j'ai modifié les lettres choisies par Descartes pour indiquer les différents points de sa figure. Je ferai de même dans la suite lorsque je le jugerai utile.

par une équation Algébrique. Cette équation est la seule donnée dont on disposer. C'est la donnée de cette équation qui permet à l'analyse de se servir du formalisme de l'Algèbre. La méthode de Descartes consiste que en une procédure employant ce formalisme, propre à passer de cette équation à une expression Algébrique exprimant un segment dont dépend la construction de la normale. La synthèse s'arrête lorsque cette expression est donnée, laissant cette construction sous-entendue.

Pour simplifier sa tâche, Descartes suppose que la courbe donnée coupe l'axe à l'origine A. L'équation exprimant la courbe doit donc être satisfaite par les positions $x = 0$ et $y = 0$. Bien que cela puisse apparaître comme une hypothèse arbitraire qui mine la généralité de la méthode, il est facile de voir comment procéder pour réduire toute équation Algébrique exprimant une courbe donnée à une équation de cette sorte. D'ailleurs, si l'on considère le problème de déterminer la tangente d'une courbe comme étant un problème qui porte sur cette courbe et non pas sur l'équation qui l'exprime, alors on doit aussi concevoir cette équation comme résultant d'un choix relatif au système de coordonnées auquel la courbe et référée et à la position de cette courbe par rapport à ce système, et rien n'empêche de choisir ce système et de positionner la courbe par rapport à lui de manière à rendre cette équation la plus simple. Une fois le système de coordonnées fixé, l'équation sur laquelle la méthode de Descartes opère doit ainsi être pensée comme un élément d'une classe d'équivalence formée par toutes les équations exprimant la même courbe, prise dans des positions différentes par rapport à ce système. C'est sur cette classe d'équivalence que porte, en dernière instance, la méthode.

En supposant que l'origine du système de coordonnées se trouve sur la courbe, Descartes fait donc un choix qu'il aurait certes pu éviter (au prix d'une légère complication des équations qui interviennent dans son argument), mais qui n'a aucune conséquence sur la généralité et la nature de sa méthode. Ceci n'est pourtant pas le seul choix fait par Descartes, qui suppose aussi que les coordonnées auxquelles la courbe est référée sont orthogonales. S'il est certes, encore une fois, aisé de transformer une équation exprimant une certaine courbe par rapport à un système de coordonnées non orthogonales en une autre équation exprimant la même courbe par rapport à un système de coordonnées orthogonales, il reste que cette méthode se sert de l'orthogonalité des coordonnées comme d'une condition essentielle.

Supposons donc que la courbe AMN est référée à un système de coordonnées orthogonales d'origine A, et posons $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{PM} = y$, l'angle $\mathsf{A\hat{P}M}$ étant droit. En supposant que MG est la normale à cette courbe au point M, Descartes imagine qu'autant ce segment que le segment PG, qui en dépend, sont connus, et pose $\mathsf{MG} = s$ et $\mathsf{AG} = v$. L'angle $\mathsf{A\hat{P}M}$ étant droit, le triangle PGM est rectangle, et donc, dit Descartes, le carré de l'hypoténuse MG est égal à la somme des carrés des cathètes PG et MP, ce qui donne

$$s^2 = (v - x)^2 + y^2 \tag{3.1}$$

et donc :

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{s^2 - v^2 + 2xv - x^2} \\ x &= v - \sqrt{s^2 - y^2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

qui expriment les relations induites par la nature géométrique du problème entre les coordonnées x et y, qu'on suppose données, et les segments inconnus s et v.

* * *

Avant de continuer dans l'exposition de la méthode de Descartes, arrêtons-nous un instant sur cette première étape de son argument. Si le passage de l'égalité (3.1) à l'égalité (3.2) ne tient qu'aux règles de l'Algèbre des segments, la première de ces égalités ne peut pas être justifiée par ces mêmes règles. Elle tient à la possibilité d'exprimer, par les moyens de cette Algèbre, des relations géométriques préalablement données. Si un mathématicien moderne n'a aucune difficulté à justifier cette égalité en se réclamant du théorème de Pythagore, ce n'est que parce qu'il pense directement ce théorème comme l'énoncé d'une relation entre les mesures (ou aires) des carrés construits sur les côtés d'une triangle rectangle. Ceci ne semble pourtant pas pouvoir être le point de vue de Descartes. Pour justifier l'égalité 3.1, il faut donc se réclamer d'un argument intermédiaire que Descartes laisse implicite, et qu'il convient ici d'expliciter.

D'abord, il faut établir une relation entre un carré et son côté. Comme il s'agit de deux grandeurs non comparables, cette relation ne peut être exprimée que par un système de proportions faisant intervenir deux carrés et les côtés correspondants. Si a et b sont deux segments quelconques, pris comme les côtés de deux carrés, $Q(a)$ et $Q(b)$ ce système de proportions est évidemment :

$$\begin{array}{l} a : b = \alpha : \beta = \beta : \gamma \\ Q(a) : Q(b) = \alpha : \gamma \end{array} \tag{3.3}$$

où α, β et γ sont, comme dans le chapitre précédent, des quantités homogènes quelconques, dont l'une est fixée de manière arbitraire et les autres déterminées à partir de celle-ci, comme des quatrièmes proportionnels. Il suffit alors de poser $\beta = u$, ou, simplement, d'éliminer β entre les deux premières proportions pour tirer de là la proportion

$$Q(a) : Q(b) = \frac{a}{b} : \frac{b}{a} = a^2 : b^2 \tag{3.4}$$

Or, si a et b sont les côtés d'un triangle rectangle dont h est l'hypoténuse, on aura, d'après le théorème de Pythagore,

$$Q(h) = Q(a) + Q(b) \tag{3.5}$$

Quel que soit le segment h, de la proportion (3.4) on peut alors tirer les nouvelles proportions

$$\begin{array}{l} Q(h) : Q(b) = \left[a^2 + b^2\right] : b^2 \\ Q(h) : Q(b) = h^2 : b^2 \end{array} \tag{3.6}$$

d'où il s'ensuit :

$$a^2 + b^2 = h^2 \tag{3.7}$$

comme l'affirme justement Descartes.

* * *

Après avoir établi les égalités (3.2) Descartes suppose que "le rapport qu'ont tous les poins de la courbe ME a ceux de la droite HA" est exprimé par une équation Algébrique entière entre x et y. En utilisant l'une ou l'autre des ces égalités, on pourra alors éliminer de cette équation une de ces deux "quantités indéterminées"[7], en obtenant une nouvelle équation entière contenant s, v, et soit x soit y[8], disons x[9].

Or, la normale $\mathsf{MG} = s$ peut être pensée comme le rayon d'un cercle de centre G. S'il en était ainsi, les égalités (3.2) se convertiraient en deux équations, l'une et l'autre exprimant ce cercle par rapport au même système de coordonnées auquel la courbe ME est référée. La perpendiculaire TF à MG serait ainsi, en même temps, tangente à ce cercle et à cette courbe ; le cercle de centre G et rayon MG serait donc un des cercles tangents à la courbe ME au point M, c'est-à-dire qu'il "touchera[it] la ligne courbe ME sans la coupper"[10]. Cela ne serait pourtant vrai — continue Descartes — qu'à condition que MG soit bien la normale en M à la courbe ME. Si ce n'était pas le cas (c'est-à-dire que PG ne soit pas la sous-normale) ce cercle couperait la courbe ME en deux points et l'équation qui résulterait de la composition de l'équation de la courbe avec l'une ou l'autre des égalités (3.2) aurait (au moins) deux racines (réelles) distinctes en l'inconnue x. Il s'ensuit que, parce que MG soit la normale cherchée, il suffit que cette dernière équation ait deux racines "égales" en cette inconnue[11].

Ceci étant, voici le passage crucial de l'argument de Descartes :

> De plus, il faut considerer que, lorsqu'il y a deux racines esgales en vne équation, elle a necessairement la mesme forme que si on multiplie, par soy mesme, la quantité qu'on y suppose estre inconnuë, moins la quantité connuë qui luy est esgale ; & qu'aprés cela, si cete derniere somme n'a pas tant de dimensions que la precedente, on la multiplie par vne autre somme qui en ait autant qu'il luy en manque : affin qu'il puisse y auoir separement équation entre chascun des termes de l'vne & chascun des termes de l'autre.[12]

En s'appuyant sur un lemme qu'il laisse implicite et qu'il n'énoncera explicitement et sous forme générale, sans pour autant le démontrer, que dans le III$^{\text{ème}}$ livre[13], Descartes réduit la condition précédente — qu'il justifie en se réclamant d'une évidence de nature géométrique, en ayant foi en une sorte de principe de continuité — à une condition relative à la forme d'une équation. C'est justement ce qui permet de passer de la géométrie classique

[7] Cf. Descartes (1637), 342.

[8] Descartes présente trois exemples de cette simple procédure Algébrique [cf. Descartes (1637), 343-345], tous portant sur des équations exprimant des courbes préalablement introduites de manière indépendante de ces équations : une ellipse ; une cubique exhibée par construction grâce à l'emploie d'un outil formé de trois règles et d'une parabole ; et enfin une courbe caractérisée géométriquement par la double position $\mathsf{MO}_1 = \mathsf{O}_1\mathsf{A} + z$, $\mathsf{MO}_2 = \mathsf{O}_2\mathsf{A} + kz$, M étant un point courant de la courbe, O_1 et O_2 deux points donnés, A le point d'intersection entre la courbe et la droite $\mathsf{O}_1\mathsf{O}_2$, k une raison donnée, et enfin z une variable auxiliaire.

[9] Évidemment le choix de la variable à éliminer n'a aucune conséquence sur le résultat final. Il convient donc de choisir cette variable de sorte à rendre les calculs nécessaires pour parvenir à ce résultat les plus simples possibles.

[10] Cf. Descartes (1637), 345.

[11] Cf. Descartes (1637), 346-347.

[12] Cf. Descartes (1637), 347.

[13] Cf. Descartes (1637), 372 : "Et on voit euidemment [...] que la somme d'vne équation qui contient plusieurs racines, peut toujours estre diuisée par un binôme composé de la quantité inconnuë, moins la valeur de l'vne des vrayes racines, laquelle que ce soit ; ou plus la valeur de l'vne des fausses". En d'autres termes : si $z = z_0$ est une racine (réelle) de l'équation entière $F(z) = 0$, alors le binôme $z - z_0$ est un facteur du polynôme $F(z)$, c'est-à-dire que le quotient $\frac{F(z)}{z-z_0}$ est encore un polynôme. Ce sont justement les coefficients de ce dernier polynôme, dont l'existence est supposée, que Descartes invite à déterminer par la méthode des coefficients indéterminés : cf. la section 3.1.2.

à l'Algèbre.

En effet, dire que l'équation dont il est question, par exemple $F(x) = 0$, "a la mesme forme" qu'une autre équation, telle que $(x - x_0)^2 P(x) = 0$ — où $x = x_0$ est une racine double de la première équation et $P(x)$ est un polynôme indéterminé de degré $m - 2$, m étant le degré de $F(x)$ — signifie dire que la première de ces équations est Algébriquement réductible à la deuxième. Il s'ensuit que les coefficients d'une même puissance de l'inconnue dans l'une et dans l'autre de ces équations doivent être séparément réductibles les uns aux autres par des règles Algébriques, et donc qu'ils sont égaux. On aura ainsi $m + 1$ égalités qui pourraient être prises comme autant d'équations linéaires pouvant servir à déterminer successivement les $m - 1$ coefficients indéterminés intervenant dans le polynôme $P(x)$ et les inconnues s et v. C'est la première énonciation, limitée au cas finitaire, de ce qui, sous le nom de "méthode des coefficients indéterminés (de Descartes)" deviendra au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle l'outil fondamental de l'*analyse*[14].

Supposons donc que, au moyen de ces équations, on soit effectivement en condition de déterminer non seulement les coefficients du polynôme $P(x)$, mais aussi au moins une des inconnues s et v. Cela signifie que de la comparaison de ces équations il est possible de tirer soit une égalité telle que $s = S(x_0)$, soit une égalité telle que $s = V(x_0)$, où $S(x_0)$ et $V(x_0)$ sont des expressions Algébriques où intervient x_0. Il suffit alors d'interpréter x_0 comme une des coordonnées du point M pour disposer d'une prescription univoque pour la construction du point G, pourvu qu'un des segments AP et PM soit donné. Le problème de la normale serait ainsi résolu. Il suffirait enfin, la normale à la courbe ME étant donnée, d'en construire une perpendiculaire passant par le point M, pour obtenir aussi la tangente à cette courbe donnée en ce même point.

3.1.2 Reformulation de l'argument de Descartes

Après avoir exposé son argument, Descartes se limite à présenter quelques exemples qui ont pour fonction d'éclairer la méthode. Au lieu de le suivre dans la présentation de ces exemples, je vais chercher à reformuler cet argument, en le référant à une équation Algébrique entière quelconque, de manière à rendre explicite certaines des conditions dont il dépend, qui restent cachées dans l'exposition de Descartes.

Pour plus de clarté, distinguons d'abord entre les coordonnées indéterminées du point M, qui, bien que quelconque, est censé être fixé, et les variables x et y qui entrent dans l'équation de la courbe. Si on pose $\mathsf{AP} = X$ et $\mathsf{PM} = Y$, il s'ensuit que le point M est caractérisé par les positions $x = X$ et $y = Y$. Si on pose ensuite $\mathsf{MG} = s$ et $\mathsf{AG} = v$, le théorème de Pythagore permet alors, grâce à l'argument intermédiaire que j'ai explicité ci-dessus, d'écrire l'égalité

$$Y^2 = s^2 - (s - X)^2 \tag{3.8}$$

En remplaçant dans cette égalité X par Y respectivement avec x et y, on obtient l'équation

$$y^2 = s^2 - (v - x)^2 \tag{3.9}$$

[14]Cf. Panza (1992*a*), parties II et III. C'est Descartes lui-même qui préconise ce large usage de sa méthode [cf. Descartes (1637), 351] : "Mais ie veux bien, en passant, vous auertir que l'inuention de supposer deux equations de mesme forme, pour comparer separement tous les termes de l'vne a ceux de l'autre, & ainsi en faire naistre plusieurs d'vne seule, dont vous aués vû icy vn exemple, peut seruir a vne infinité d'autres Problesmes & n'est pas l'vne des moindres de la méthode dont ie me sers."

qui est l'équation du cercle de centre G et de rayon $\mathsf{MG} = s$, référé au système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'abscisse AH et d'origine A. Il est clair que cette équation est parfaitement indépendante de la nature de la courbe AMN, et peut de ce fait être entendue comme une équation standard et générale, exprimant la nature géométrique du problème de la normale (et de la tangente) d'une courbe quelconque, référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales[15].

Supposons que la courbe AMN est exprimée, relativement au système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'abscisse AH et d'origine A, par l'équation ${}_nF(x, y) = 0$ — qu'on suppose de degré n et telle que ${}_nF(0, 0) = {}_nF(X, Y) = 0$. Pour éviter le cas trivial où cette courbe se réduit à une droite, on suppose que $n \geq 2$. En composant l'équation ${}_nF(x, y) = 0$ avec l'équation (3.9) et en éliminant soit la variable y soit la variable x, on obtient une équation respectivement en x ou en y, dont le degré dépend de la nature particulière de la première de ces équations. Supposons qu'il convienne d'éliminer la variable y[16]. On obtiendra une résultante en , disons de degré m (en général plus grand que n et toujours plus petit ou égal à $2n$).

Soit

$$ {}_mR_{(s,v)}(x) = \sum_{i=0}^{m} [\Gamma_i(s, v)]\, x^i = 0 \tag{3.10} $$

cette équation, $\Gamma_i(s, v)$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ étant des coefficients donnés par des expressions Algébriques où interviennent en général les inconnues s et v. Rien n'empêche de supposer que la puissance x^m apparaît dans cette équation sans être affecte d'aucun coefficient — ce qui de notre point du vue revient à poser $\Gamma_m(s, v) = 1$ — car s'il en était pas ainsi, il serait facile de réduire l'équation obtenue à une autre équation qui respecte cette condition. Comme l'équation (3.9) est homogène, si l'équation ${}_nF(x, y) = 0$ l'est aussi — et il faut le supposer, si l'on se place du point de vue de Descartes —, l'équation (3.10) est elle-même homogène, et donc tous ses termes sont donnés par le produit de m segments égaux, éventuellement affectés par un nombre (réel). Ses racines réelles dans l'inconnue x, donneront, de surcroît, les abscisses des points d'intersection entre la courbe d'équation ${}_nF(x, y) = 0$ et le cercle

[15] Imaginons que les coordonnées choisies ne soient pas orthogonales et posons $\mathsf{AR} = X$ et $\mathsf{RM} = Y$, en supposant que l'angle $\mathsf{M\hat{R}H}$ formé par les coordonnées est connu et égal à ϱ. Le triangle formé par les côtés $\mathsf{MG} = s$, $\mathsf{RM} = Y$ et $\mathsf{RG} = v - X$ ne sera alors pas rectangle et on ne pourra pas lui appliquer le théorème de Pythagore. Il est pourtant facile de voir que la donnée des côtés $\mathsf{RM} = Y$ et $\mathsf{RG} = v - X$ de ce triangle, et de l'angle $\mathsf{M\hat{R}H} = \varrho$ que ces côtés forment entre eux, détermine de manière univoque le côté $\mathsf{MG} = s$. On aurait en effet l'égalité

$$ Y^2 = s^2 - (v - X)^2 + 2Y(v - X)\cos\varrho $$

Il suffira alors de remplacer X et Y respectivement par x et y, pour obtenir l'équation du cercle (passant par M) de centre G et de rayon $\mathsf{MG} = s$, référé au système de coordonnées cartésiennes d'abscisse AH, d'origine A et d'angle ϱ :

$$ y^2 = s^2 - (v - x)^2 + 2y(v - x)\cos\varrho $$

Aussi cette équation est parfaitement indépendante de la nature de la courbe AMN ; elle est donc une équation standard et générale, exprimant la nature géométrique du problème de la normale (et de la tangente) d'une courbe quelconque référée à un système de coordonnées quelconque. Cette équation diffère de l'équation (3.9) par la présence du facteur constant $\cos\varrho$, mais surtout par la présence du produit $y(v - x)$. La présence de ce produit empêche d'opérer une simple séparation de variables pour obtenir les expressions de y en termes de x et/ou de x en termes de y. C'est ce qui rend plus pénible l'élimination de x ou de y entre cette équation et l'équation de la courbe AMN, quelle qu'elle soit. C'est sans doute la raison qui poussa Descartes à supposer d'emblée que cette courbe est référée à un système de coordonnées orthogonales.

[16] Cf. la note (9), ci-dessus.

de centre G et rayon $\mathsf{GM} = s$. Il s'ensuit que la condition qui fait que $x = X$ est une racine double de cette équation est en même temps celle qui permet de déterminer les valeurs cherchées de s et/ou de v.

Si on pose, en général

$$ {}_nF(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j} x^{i-j} y^j \right] \tag{3.11} $$

l'équation (3.10) prend la forme suivante :

$$ \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j} x^{i-j} \left(s^2 - v^2 + 2xv - x^2 \right)^{\frac{j}{2}} \right] = 0 \tag{3.12} $$

En élevant au carré pour éliminer les exposants fractionnaires, après avoir séparé les puissances paires des puissances impaires de $s^2 - v^2 + 2xv - x^2$, on a alors :

$$ \begin{aligned} & \left[\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} A_{i-2j,2j} x^{i-2j} z^j \right) \right]^2 = \\ & \qquad = z \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor} A_{i-2j+1,2j-1} x^{i-2j+1} z^{j-1} \right) \right]^2 \end{aligned} \tag{3.13} $$

où $z = s^2 - v^2 + 2xv - x^2$ et $\lfloor q \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à q, pourvu que q soit un nombre rationnel positif. Il s'agit de voir quelles sont les valeurs de s et v qui font que $x = X$ soit une racine double de cette équation.

Il est clair que ceci demande des calculs dont la complexité croit vertigineusement lorsque la complexité de l'équation donnée, ${}_nF(x,y) = 0$, ne croit que d'une manière fort modeste. Si cette équation n'est pas assez simple, la méthode de Descartes, prise en tant que telle, ne peut donc pas conduire à la détermination effective de la normale cherchée. Voyons de toute manière comment cette méthode procède, dans le cas général.

D'après Descartes, $x = X$ est une racine double de l'équation (3.13) si (et seulement si) cette équation peut être mise sous la forme suivante :

$$ (x - X)^2 \sum_{i=0}^{m-2} K_i x^i = 0 \tag{3.14} $$

où K_i ($i = 1, 2, \ldots, m-2$) sont des coefficients à déterminer. En développant $(x - X)^2$, en opérant les multiplications et en comparant l'équation résultante avec l'équation (3.10), on obtient l'égalité :

$$\left.\begin{array}{l} K_{m-2}x^m+ \\ (K_{m-3}-2K_{m-2}X)\,x^{m-1}+ \\ \displaystyle\sum_{i=2}^{m-2}\left(\begin{array}{l} K_{m-i-2} \\ -2K_{m-i-1}X \\ +K_{m-i}X^2 \end{array}\right)x^{m-i} \\ \left(-2K_0X+K_1X^2\right)x+ \\ K_0X^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} x^m+ \\ \left[\Gamma_{m-1}(s,v)\right]x^{m-1}+ \\ \displaystyle\sum_{i=2}^{m-2}\left[\Gamma_{m-i}(s,v)\right]x^{m-i}+ \\ \left[\Gamma_1(s,v)\right]x+ \\ \Gamma_0(s,v) \end{array}\right. \tag{3.15}$$

Comme cette égalité ne dépend pas de la valeur de x, elle n'est satisfaite qu'à condition que tous les coefficients d'une même puissance de cette variable soient égaux entre eux (c'est justement le principe de la méthode des coefficients indéterminés). On aura alors le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} K_{m-2}=1 \\ K_{m-3}=2X+\Gamma_{m-1}(s,v) \\ \left\{K_{m-i-2}-2K_{m-i-1}X+K_{m-i}X^2=\Gamma_{m-i}(s,v)\right\}_{i=2}^{i=m-2} \\ -2K_0X+K_1X^2=\Gamma_1(s,v) \\ K_0X^2=\Gamma_0(s,v) \end{array}\right. \tag{3.16}$$

comprenant $m+1$ égalités distinctes, dont la première fournit d'emblée la valeur du coefficient K_{m-2}. Pour déterminer les $m-2$ coefficients K_{m-i} $(i=3,4,\ldots,m)$, il faut en revanche connaître à l'avance les $m-2$ coefficients $\Gamma_{m-i}(s,v)$ $(i=1,2,\ldots m-2)$. Pour cela il faut évidemment se réclamer de l'équation (3.13), qui est loin de nous fournir aisément la forme générale de ces coefficients. Même si on suppose que la connaissance de ces derniers coefficients est donnée cas par cas, il faut encore supposer, pour s'assurer du succès de la méthode, que les $m-2$ équations linéaires

$$\begin{array}{l} K_{m-3}=2X+\Gamma_{m-1}(s,v) \\ \left\{K_{m-i-2}-2K_{m-i-1}X+K_{m-i}X^2=\Gamma_{m-i}(s,v)\right\}_{i=2}^{i=m-2} \end{array} \tag{3.17}$$

forment un système déterminé. Si c'est bien le cas, les deux équations restantes,

$$\begin{array}{l} K_1X^2-2K_0X=\Gamma_1(s,v) \\ K_0X^2=\Gamma_0(s,v) \end{array} \tag{3.18}$$

sont elles aussi déterminées, car les coefficients K_0 et K_1 ont été déterminés. L'hypothèse de Descartes est double : d'abord que le système (3.17) est déterminé, quelle que soit l'équation de départ (et qu'on est toujours à même d'en trouver les $m-2$ solutions) ; ensuite qu'une fois que les coefficients K_0 et K_1 ont été déterminés, les équations (3.18) permettent de déterminer s et/ou v en termes de l'abscisse X du point M et des coefficients donnés de l'équation de départ.

Descartes présente cette hypothèse comme une affirmation catégorique. Il est pourtant bien loin de pouvoir la démontrer. Il se limite d'ailleurs à présenter des exemples. Quel que soit le nombre et la nature des exemples que l'on considère, il est de surcroît fort difficile de détecter, par le biais de ceux-ci, des invariants algorithmiques capables, ensuite, de se substituer avantageusement à l'ensemble de la procédure précédente. Cette tâche est rendue encore plus difficile par le fait que les inconnues s et v, dont les valeurs dépendent évidemment l'une de l'autre, entrent dans cette procédure comme des variables indépendantes. Si cela permet d'obtenir autant d'équations que d'inconnues à déterminer, ce n'est pas, d'un autre point de vue, sans produire une conséquence néfaste : le fait de considérer s et v comme deux variable indépendantes détourne fatalement l'attention du mathématicien des relations algorithmiques qui lient l'équation donnée avec les expressions Algébriques de ces segments.

3.2 La reformulation de la méthode de Descartes par Florimond de Baune

Après la publication de la *Géométrie* il ne fallut que quelques mois pour que la méthode de Descartes fût radicalement transformée et améliorée. L'occasion fut donnée par un court commentaire du traité de Descartes, les *Notes brèves sur la geometrie de M^r.D.C.*, composé en français pendant l'hiver 1638-1639 par Florimond de Baune — mais inspiré probablement par Descartes lui-même[17] —, et publié plus tard par van Schooten, en traduction latine, en annexe à la première puis à la deuxième édition latine de la *Géométrie*[18]. La partie de ce commentaire consacrée à la méthode des normales et des tangentes est très brève et ne consiste qu'en un seul exemple, d'ailleurs fort simple[19]. La manière dont Florimond résout le problème dans ce simple cas n'est pourtant pas sans indiquer la voie pour une reformulation générale de la méthode de Descartes.

3.2.1 L'exposition de Florimond

Florimond commence sa présentation en observant que pour trouver la tangente à une courbe donnée, il est nécessaire d'exprimer l'ordonnée d'un point quelconque de cette courbe de deux manières différentes, et d'égaliser les deux expressions ainsi trouvées ; si l'une de ces expressions fait intervenir un segment dont dépend la construction de la tangente cherchée (par exemple la sous-tangente), on obtient une équation dont la solution fournit la solution du problème. Par cette observation, apparemment anodine, Florimond indique d'emblée deux aspects de sa version de la méthode de Descartes qui la différencient de celle de Descartes. D'abord, l'accent est désormais mis non pas sur la normale, mais sur la tangente. Ensuite, il est implicitement déclaré que la considération du cercle tangent, dans la méthode de Descartes, n'a pour fonction que de fournir une deuxième expression d'une coordonnée du point considéré, à comparer avec celle qui est (explicitement ou implicitement) fournie par l'équation de la courbe ; si cette deuxième expression peut être obtenue (plus simplement) d'une autre manière, alors cette méthode peut se passer de ce cercle. C'est justement ce que fait Florimond.

[17] Cf. Newton (MP), I, 19-20 (Introduction de Whiteside à la partie **I** du volume I, app. 2).
[18] Cf. Florimond de Baune (1649).
[19] Cf. Florimond de Baune (1649), 130-133.

La courbe considérée par ce dernier est une hyperbole, référée encore une fois à un système de coordonnées orthogonales, dont l'origine est fixée et coïncide avec le point d'intersection de la courbe et de l'axe. En particulier, cette courbe est définie comme le lieu géométrique des points qui satisfont la proportion

$$(\mathsf{AP} + k) : \mathsf{AP} = \mathsf{AP} : \mathsf{PM} \tag{3.19}$$

où AP et PM (fig. 2) sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un point M quelconque de la courbe, et k un segment constant quelconque. En posant alors $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{PM} = y$, on obtient l'équation :

$$x^2 - yx - yk = 0 \tag{3.20}$$

Comme Descartes, Florimond suppose que le problème a déjà été résolu et trace autant la normale MG que la tangente MF au point M. Au lieu de penser la normale comme le rayon d'un cercle tangent et de travailler en conséquence, comme Descartes, sur le triangle rectangle PGM, il suppose qu'il est donné un nouveau triangle AFK, semblable à celui-ci, dont l'hypoténuse AK est parallèle à la tangente cherchée, et choisit comme inconnues les côtés de ce triangle, en posant respectivement $\mathsf{AF} = \upsilon$ et $\mathsf{FK} = \sigma$[20]. Une fois que l'on a supposé ce triangle donné, il n'est guère nécessaire de se réclamer du théorème de Pythagore pour obtenir la deuxième expression de l'ordonnée y. Il est en fait possible de se réclamer de la proposition VI.4 des *Éléments*, pour obtenir la proportion

$$\mathsf{AF} : \mathsf{FK} = \mathsf{FP} : \mathsf{PM} \tag{3.21}$$

et de là passer, selon les règles de l'Algèbre des segments de Descartes, à l'équation :

$$y = \frac{\sigma(x - \upsilon)}{\upsilon} \tag{3.22}$$

L'avantage immédiat de ce choix sur celui de Descartes est clair : l'équation (3.22) est une équation du premier degré autant en y qu'en x, de sorte que la résultante de sa composition avec l'équation de la courbe est une équation du même degré que l'équation de la courbe. On verra plus tard que cet avantage opérationnel en cache un autre, plus profond. Pour l'instant, limitons nous à suivre Florimond dans son exposition.

En éliminant y entre les équations (3.20) et (3.22), on obtient la nouvelle équation :

$$x^2 + \frac{\sigma(\upsilon - k)}{\upsilon - \sigma}x + \frac{\sigma\upsilon k}{\upsilon - \sigma} = 0 \tag{3.23}$$

que Florimond compare, sans aucune justification, à l'équation

$$(x - X)^2 = 0 \tag{3.24}$$

[20] Pour indiquer les segments AF et FK, Florimond utilise les mêmes symboles "v" et "s" utilisés par Descartes pour indiquer respectivement les segments AG et MG. Il est pourtant clair que les segments v et s de Florimond ne sont pas seulement différents des segments v et s de Descartes, mais ont aussi entre eux un rapport différent. Pour marquer cette différence, qui va se révéler fondamentale, je change la notation de Florimond.

qui possède évidemment une racine double $x = X$. La méthode des coefficients indéterminés fournit alors le système linéaire en υ et σ

$$\begin{cases} 2\,(\upsilon - \sigma)\,X = \sigma(k - \upsilon) \\ (\upsilon - \sigma)\,X^2 = \sigma\upsilon k \end{cases} \tag{3.25}$$

d'où, en changeant X en x, Florimond obtient sans aucune difficulté l'égalité

$$\upsilon = \frac{kx}{x + 2k} \tag{3.26}$$

Il suffit alors de considérer le point M comme un point fixe, bien qu'indéterminé, et de lui assigner les coordonnées $\mathsf{AP} = X$ et $\mathsf{PM} = Y$, pour obtenir :

$$\begin{array}{l} \mathsf{FP} = X - \upsilon = \dfrac{X\,(X + k)}{X + 2k} \\ \mathsf{PG} = \dfrac{(\mathsf{PM})^2}{\mathsf{FP}} = \dfrac{X^3\,(X + 2k)}{(X + k)^3} \end{array} \tag{3.27}$$

qui fournissent la normale et la tangente cherchées.

3.2.2 Reformulation et généralisation de l'argument de Florimond

Avant de s'interroger sur les justifications possibles de l'argument de Florimond, on va le généraliser en le rapportant à une courbe exprimée par une équation Algébrique quelconque. Cela nous permettra de saisir des aspects de sa méthode qui restent cachés lorsque celle-ci est appliquée à un exemple aussi simple que le précédent.

On observe d'abord que pour son exemple, Florimond obtient la sous-normale PG après avoir obtenu la sous-normale FP, en se réclamant de la similitude des triangles FPM et PGM, et sans se réclamer à nouveau de la valeur assignée à υ et/ou à σ. Il aurait pourtant pu obtenir directement cette sous-normale, sans passer par la considération de la sous-tangente, en observant que du système (3.25) il s'ensuit aussi que

$$\sigma = \frac{kx^2}{(x + k)^2} \tag{3.28}$$

d'où, grâce à la similitude des triangles AFK et PGM, et en se rappelant l'égalité (3.26), on tire sans difficulté :

$$\mathsf{PG} = y\frac{\sigma}{\upsilon} = \left(\frac{x^2}{x + k}\right)\left(\frac{kx^2}{(x + k)^2}\right)\left(\frac{x + 2k}{kx}\right) = \frac{x^3\,(x + 2k)}{(x + k)^3} \tag{3.29}$$

Aussi pour la détermination de la valeur de la sous-normale FP, Florimond aurait pu éviter de se réclamer de l'égalité $\mathsf{FP} = \mathsf{AP} - \mathsf{AF} = x - \upsilon$, qui ne dépend que du choix de l'origine et de la position du triangle AFK. En opérant de manière plus générale, la valeur de cette sous-normale aurait pu directement être obtenue grâce à la similitude des triangles AFK et FPM, ce qui donne :

$$\mathsf{FP} = y\frac{\upsilon}{\sigma} = \left(\frac{x^2}{x + k}\right)\left(\frac{kx}{x + 2k}\right)\left(\frac{(x + k)^2}{kx^2}\right) = \frac{x\,(x + k)}{x + 2k} \tag{3.30}$$

On comprend alors que l'introduction des inconnues υ et σ et leur détermination successive, ou, pour être plus précis, la détermination de leur rapport, permettent d'obtenir directement autant la sous-tangente que la sous-normale en un point quelconque de la courbe. En introduisant une notation convenable, on aura en particulier :

$$\begin{aligned} stg._x &= y\frac{\upsilon}{\sigma} \\ sn._x &= y\frac{\sigma}{\upsilon} \end{aligned} \tag{3.31}$$

où $stg._x$ et $sn._x$ sont respectivement la sous-tangente et la sous normale au point de la courbe d'abscisse x quelconque, prises sur l'axe des abscisses[21].

Il est aussi aisé de voir que ces égalités générales ne dépendent ni de la nature de la courbe considérée, ni du choix de l'origine du système de coordonnées auquel on rapporte cette courbe, ni de la position dans laquelle on construit le triangle rectangle dont υ et σ sont les cathètes. La première de ces égalités est aussi indépendante de l'angle formé par les coordonnées choisies, ce qui n'est pas le cas de la deuxième. En effet, si la courbe AMN est référée aux coordonnées cartésiennes quelconques $\mathsf{AR} = x$ et $\mathsf{RM} = y$, M étant un point courant de cette courbe, il suffit, pour obtenir la première de ces égalités, de construire le triangle AFS semblable au triangle FRM (AS et FS étant respectivement parallèles à FT et à RM), en posant, dans ce cas : $\upsilon = \mathsf{AF}$ et $\sigma = \mathsf{FS}$. Ce triangle AFS n'est pourtant pas semblable en général au triangle RGM, formé par l'ordonnée, la normale et la sous-normale au point courant M. Ainsi, si la sous-tangente FR s'obtient comme résultat du produit de y et du rapport $\frac{\upsilon}{\sigma}$, pour obtenir la sous-normale RG, il faut passer par la considération de l'angle $\mathsf{H\hat{R}M}$ formé par les coordonnées. Si on suppose que cet angle est égal à ϱ, la proportion

$$\mathsf{FP} : \mathsf{MP} = \mathsf{MP} : \mathsf{PG} \tag{3.32}$$

donne

$$\mathsf{FR} + y\cos\varrho : y\sin\varrho = y\sin\varrho : \mathsf{RG} - y\cos\varrho \tag{3.33}$$

où les constantes que nous indiquons par "$\cos\varrho$" et "$\sin\varrho$" auraient pu être indiquées par Florimond respectivement par les rapports $\frac{\mathsf{RP}}{\mathsf{RM}}$ et $\frac{\mathsf{MP}}{\mathsf{RM}}$ qui sont l'un et l'autre connus dès que l'on connaît l'angle ϱ. Comme FR n'est rien d'autre que la sous-tangente, on obtient alors l'égalité :

$$\mathsf{RG} = sn._x = y\frac{(stg._x)\cos\varrho + y}{stg._x + y\cos\varrho} = y\frac{\sigma + \upsilon\cos\varrho}{\upsilon + \sigma\cos\varrho} \tag{3.34}$$

Si à cela on ajoute que l'équation (3.22) ne dépend ni de la nature de la courbe considérée, ni de l'angle que forment les coordonnées auxquelles cette courbe est référée (pourvu qu'on

[21]Par la suite, je ferai un large usage de cette notation. Si une variable z est employée pour indiquer une coordonnée cartésienne d'une courbe, et en particulier celle qui varie sur l'axe du système de coordonnées choisi, alors les symboles "$stg._z$" et "$sn._z$" indiqueront respectivement la sous-tangente et la sous-normale de cette courbe prises sur cet axe, relativement au point courant dont z est justement une coordonnée. Si Z est une valeur de v, alors les symboles "$stg._Z$" et "$sn._Z$" indiqueront respectivement la sous-tangente et la sous-normale de cette courbe prises sur l'axe où z varie, relativement au point où la coordonnée z prend la valeur Z. Lorsque le contexte ne permet pas de décider à quelle courbe ces symboles se réfèrent, alors j'emploierai à la place les symboles "$stg.[w]_z$" et "$sn.[w]_z$" ou "$stg.[w]_V$" et "$sn.[w]_V$" pour indiquer ces mêmes sous-normales ou sous-tangentes relatives à la courbe d'ordonnée w.

suppose en général que $\upsilon = \mathsf{AF}$ et $\sigma = \mathsf{FS}$), on comprend alors que le passage de coordonnées cartésiennes orthogonales à des coordonnées cartésiennes quelconques ne modifie en rien la méthode de Florimond pour la détermination de la tangente et ne fait que casser la symétrie qui règne dans cette méthode, lorsque les coordonnées sont orthogonales, entre détermination de la tangente et détermination de la normale. C'est cette autre différence entre la méthode de Descartes et sa reformulation par Florimond qui explique que dans l'exposition de ce dernier l'accent est mis non pas sur la détermination de la normale, mais sur celle de la tangente.

Considérons alors la méthode de Florimond pour la détermination de la tangente et référons-la, pour plus de généralité, à des coordonnées cartésiennes quelconques[22]. Pour plus de clarté, distinguons à nouveau entre les coordonnées indéterminées du point M et les variables x et y qui entrent dans l'équation de la courbe, et posons $\mathsf{AR} = X$ et $\mathsf{RM} = Y$, de sorte que le point M soit caractérisé, comme ci-dessus, par les positions $x = X$ et $y = Y$.

Si l'on suppose donné le triangle AFS, dont les côtés AS et FS sont respectivement parallèles à la tangente MF et à l'ordonnée RM prises au point M et que l'on pose $\mathsf{AF} = \upsilon$ et $\mathsf{FS} = \sigma$, on obtient d'emblée l'équation

$$Y = \frac{\sigma(X - \upsilon)}{\upsilon} \tag{3.35}$$

qui se transforme en l'équation (3.22) lorsqu'on remplace X et Y respectivement par x et y. Cette dernière est donc une équation standard et générale qui exprime la nature géométrique du problème des tangentes d'une courbe quelconque référée à un système de coordonnées quelconques.

Or, si la courbe dont il est question est exprimée, comme ci-dessus, par l'équation (3.11), et qu'on élimine y entre cette équation et l'équation (3.22), on obtient sur-le-champ la nouvelle équation :

$$\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}x^{i-j}(x-\upsilon)^{j}\left(\frac{\sigma}{\upsilon}\right)^{j}\right] = 0 \tag{3.36}$$

qui est bien plus simple que l'équation (3.13) obtenue en appliquant la méthode de Descartes dans sa version originale. Grâce au développement binomial restreint à des exposants entiers et positifs, on obtient l'équation :

$$\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} B_i x^i = 0 \\ \displaystyle B_i = \sum_{j=i}^{n}\left(\sum_{h=j-i}^{j}(-)^{i+j}A_{j-h,h}\begin{pmatrix} h \\ j-i \end{pmatrix}\upsilon^{j-i}\left(\frac{\sigma}{\upsilon}\right)^{h}\right) \end{array}\right. \tag{3.37}$$

dont l'équation (3.23) n'est qu'un cas particulier, pour $n = 2$, $A_{0,0} = A_{1,0} = A_{0,2} = 0$, $A_{0,1} = -k$ et $A_{2,0} = -A_{1,1} = 1$. En comparant cette équation avec l'équation (3.14) pour

[22] Il sera aisé de vérifier que l'argument qui suit ne dépend nullement du fait que l'origine A de ce système de coordonnées appartient à la courbe. On pourra ainsi imaginer, si on le préfère, que la courbe MN ne passe pas par le point A.

$m = n$, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} K_{n-2}x^n + \\ (K_{n-3} - 2K_{n-2}X)\, x^{n-1} + \\ \displaystyle\sum_{i=2}^{n-2} \left(\begin{array}{l} K_{n-i-2} \\ -2K_{n-i-1}X \\ +K_{n-i}X^2 \end{array} \right) x^{n-i} + \\ \left(-2K_0X + K_1X^2\right) x + \\ K_0X^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} B_nx^n + \\ B_{n-1}x^{n-1} + \\ \displaystyle\sum_{i=2}^{n-2} B_{n-i}x^{n-i} + \\ B_1x + \\ B_0 \end{array}\right. \tag{3.38}$$

De là, par la méthode des coefficients indéterminés, on tire le système d'équations linéaires :

$$\left\{\begin{array}{l} K_{n-2} = B_n \\ K_{n-3} = B_{n-1} + 2B_nX \\ \left\{K_{n-i-2} - 2K_{n-i-1}X + K_{n-i}X^2 = B_{n-i}\right\}_{i=2}^{i=n-2} \\ -2K_0X + K_1X^2 = B_1 \\ K_0X^2 = B_0 \end{array}\right. \tag{3.39}$$

comprenant $n + 1$ égalités distinctes, à partir desquelles, il s'agit de déterminer les $n - 1$ coefficients indéterminés K_{n-i} $(i = 2, 3, \ldots, n)$ et les inconnues υ et σ, ou leur rapport, en termes de l'abscisse $x = X$ du point M. La connaissance de ce rapport nous donne enfin, grâce à la première des égalités (3.31) et à l'égalité (3.34), la sous-tangente et la sous-normale cherchées[23].

* * *

Voilà donc la méthode de Descartes dans la nouvelle version que Florimond présente à partir d'un exemple simple. Il s'agit maintenant de discuter les nouveautés apportes par cette reformulation.

Une première remarque s'impose : quelle que soit l'équation de la courbe donnée, le passage de l'équation (3.9) à l'équation (3.22), en tant que point de départ de la méthode, entraîne une simplification notable des calculs en chaque cas particulier ; cette simplification s'accompagne d'un gain de généralité, car la prise en compte de coordonnées cartésiennes non orthogonales n'implique aucune modification de la méthode, lorsqu'elle est appliquée à la recherche de la tangente. Ces deux avantages sont le fruit de la prise en compte du triangle AFS, un triangle qu'on suppose donné, et dont les éléments constitutifs ne font partie ni des données du problème, ni des inconnues que ce problème demande explicitement de déterminer. Ce triangle est ainsi une construction auxiliaire, mais, à la différence des constructions auxiliaires de l'analyse géométrique classique[24], il ne sert pas à faciliter le parcours qui conduit de la solution présupposée du problème jusqu'à ces données, mais

[23] On verra, dans la section 3.2.3, comment il est possible de prouver que le système (3.39) est toujours déterminé.

[24] Cf. Hintikka et Remes (1974).

fonctionne comme un outil de multiplication des inconnues. Grâce à l'introduction de ce triangle, deux nouvelles inconnues, à savoir AF et FS, viennent s'ajouter aux inconnues naturelles du problèmes, FR et RG.

Comme ces deux dernières inconnues, les inconnues AF et FS sont liées entre elles par des relations, autant géométriques qu'Algébriques, qui permettent de passer de la détermination de l'une à la détermination de l'autre, mais la nature des relations entre AF et FS est essentiellement distincte de la nature des relations entre FR et RG. Si l'un des segments FR ou RG est donné, il ne s'agit, pour construire l'autre, que de tracer un segment entre deux points donnés et de tirer une perpendiculaire à ce segment (les points R et M étant donnés par hypothèse). En revanche, si le segment AF est donné (avec le point A qui est donné lui aussi par hypothèse), pour construire le segment FS il faut recourir à une construction moins simple : on tire un segment entre deux points donnés (F et M) et on cherche l'intersection entre une parallèle à ce segment (celle qui est tirée du point A) et une droite tirée d'un point donné pris sur une autre droite donnée, formant avec cette dernière droite un angle donné (la droite tirée de F qui forme avec l'axe AH un angle égal à l'angle $\mathsf{G\hat{R}M}$ formé par les coordonnées). D'autre part, si c'est le segment FS qui est donnée, rien ne nous permet de déterminer le point F sans connaître la sous-tangente FR, et on ne peut parvenir à construire le segment AF que si la sous-tangente FR est déjà donnée.

Le passage des inconnues naturelles FR et RG aux inconnues AF et FS n'est donc pas de la même nature que le passage opéré par Descartes des inconnues AP et PG aux inconnues AG et MG, car le premier de ces passages introduit une asymétrie essentielle entre les inconnues. Cette asymétrie n'est pas seulement reflétée par le fait que Florimond se limite à déterminer la seule inconnue $\mathsf{AF} = \upsilon$ (dont la détermination fournit d'emblée la solution complète du problème). Elle dévoile la véritable nature de l'équation (3.37) : avant d'être une équation entre les inconnues υ et σ, c'est une équation entre les inconnues υ et $\frac{\sigma}{\upsilon}$. C'est seulement entre ces deux inconnues que règne la même symétrie qu'entre les inconnues FR et RG : la détermination de l'une d'elles conduit aisément à la détermination de l'autre, et ainsi la détermination d'une seule des deux fournit la solution complète du problème. En effet, MR étant donné, la donne du rapport $\frac{\sigma}{\upsilon}$ fournit FR et donc, en même temps, AF et la solution du problème. Autant dire que l'introduction du triangle AFK ne correspond pas à un choix plus astucieux des inconnues, mais dérive de la compréhension et de l'exploitation d'un trait essentiel du problème de la tangente et de la normale : le fait que sa solution peut dépendre de la détermination d'un rapport (ou si l'on veut s'exprimer en termes classiques, une raison), plutôt que d'un point (ou d'un segment).

La mise en évidence du rôle de ce rapport permet aussi de comprendre comment la méthode de Florimond peut être justifiée. Ce qui nous apparaît immédiatement à la lecture du bref essai de Florimond est l'absence de toute justification explicite pour le passage de l'équation (3.37) à l'équation (3.38) : pour quelle raison l'équation (3.37), résultante de la composition de l'équation de la courbe avec une équation exprimant la similitude du triangle FRM avec le triangle auxiliaire AFS, devrait-elle conduire à la solution du problème une fois qu'on a supposé que cette équation possède une racine double $x = X$? L'argument de Descartes ne s'applique pas, tel quel, à la procédure de Florimond. Plutôt que justifier sa procédure *a priori*, Florimond se limite à faire suivre sa solution du problème, dans le cas de l'hyperbole considérée, d'une autre solution conduisant au même résultat et obtenue par une application fidèle de la procédure de Descartes[25]. C'est la correspondance des résultats qui sert ainsi de justification *a posteriori*.

Si l'on considère l'équation (3.22), on voit pourtant tout de suite qu'elle est l'équation d'une droite passante par le point de coordonnées $(\upsilon, 0)$, c'est-à-dire le point F, dont le coefficient angulaire (c'est à dire, dans le langage de Descartes et Florimond, le rapport entre les côtés du triangle rectangle qu'on forme en tirant de n'importe lequel des points de cette droite une perpendiculaire à l'axe AH) est donné par le rapport $\frac{\sigma}{\upsilon}$. En composant cette équation avec l'équation de la courbe, on obtient donc l'équation des points d'intersection entre cette courbe et cette droite. Il s'ensuite que cette droite est tangente à la courbe lorsque deux de ces points d'intersection viennent à coïncider. Bien que Florimond n'en explique pas la raison, il s'ensuit que la justification *a priori* de sa méthode est la même que celle de la méthode de Descartes : simplement, elle se réclame maintenant de l'intersection de la courbe avec une droite, et non pas avec un cercle.

C'est une justification si simple et immédiate qu'on peut se demander pourquoi Florimond ne l'explicite pas. On pourrait avancer nombreuses conjectures. Ce qui est clair est que pour voir cette justification, il faut avoir compris *a priori* que l'invariant géométrique donné par le rapport $\frac{\sigma}{\upsilon}$ joue un rôle crucial dans le problème des tangentes. Si l'on veut éviter de penser que Florimond, ou son inspirateur Descartes, ait procédé à l'aveugle, ou sur la seule base de quelques coïncidences entre les résultats obtenus par les deux méthodes, il faut ainsi supposer qu'ils l'avaient bien compris. La vraie nouveauté de la reformulation de Florimond n'est donc pas celle qui apparaît d'abord — c'est-à-dire la réduction de la complexité des calculs induite par le passage de l'équation (3.9) à l'équation (3.22) en tant que point de départ de la méthode —, mais la mise en relief du rôle d'une nouvelle variable, le rapport $\frac{\sigma}{\upsilon}$, exprimant un invariant géométrique fondamental. C'est la première étape dans l'histoire du *calcul*[26], une étape que, comme on le verra dans les chapitres suivants, Newton aura bien du mal à franchir à son tour.

3.2.3 Comment on aurait pu transformer la méthode de Florimond en un algorithme

J'ai dit ci-dessus que la reformulation par Florimond de la méthode de Descartes entraîne une simplification notable des calculs. Il y a pourtant plus. Reformulée à la manière de Florimond, cette méthode peut être employée pour établir un algorithme simple et universel qui s'applique à toute équation Algébrique et fournit directement le rapport $\frac{\sigma}{\upsilon}$ associé à la courbe exprimée par cette équation. Certes, ni Florimond, ni Descartes, ni aucun autre mathématicien de l'époque ne pouvaient démontrer ceci en général. Il est cependant probable qu'ils ont observé que dans tous les cas particuliers auxquels ils appliquèrent cette méthode, le système (3.39) se laissait résoudre assez aisément et conduisait à une expression de ce rapport qui pouvait être obtenue directement à partir de l'équation donnée, en opérant toujours la même transformation. Pour nous, cela n'a évidemment rien de surprenant, car, si la méthode de Descartes est correcte, elle ne peut que conduire aux mêmes résultats qu'on obtient en appliquant le formalisme différentiel. L'essentiel est pourtant que cette

[25]Cf. Florimond de Baune (1649), 132-133.

[26]À propos de l'importance de cette acquisition — discutée pourtant en relation à la *Nova methodis* de Leibniz [cf. Leibniz (1684)] —, cf. Giusti (1984).

méthode, dans la version de Florimond, fournit d'elle même, c'est-à-dire *a priori* de toute considération fondée sur le formalisme différentiel, une manière de justifier un algorithme formellement équivalent à celui qu'on établit moyennant ce formalisme.

Les $n-1$ premières équations linéaires du système (3.39) permettent de déterminer récursivement les $n-1$ coefficients K_{n-i} $(i = 2, 3, \dots, n)$, en termes des coefficients B_{n-i} $(i = 0, 1, ..., n-2)$ et de l'abscisse $x = X$ du point M. Les deux premières fournissent d'emblée la base de la récurrence. En continuant, on a :

$$K_{n-i} = \sum_{j=2}^{i} (j-1)\, B_{n-i+j} X^{j-2} \tag{3.40}$$

$(i = 2, 3, \dots, n)$. En substituant dans les deux dernières équations de ce même système (3.39) les expressions ainsi trouvées pour K_1 et K_0, on a alors, respectivement :

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{n} i X^{i-1} B_i = 0 \\ \text{et} \\ \sum_{i=0}^{n} (i-1) X^{i} B_i = 0 \end{gathered} \tag{3.41}$$

que, en se rappelant l'égalité (3.37) et en posant, pour faire plus simple,

$$\begin{gathered} B_i = \sum_{j=i}^{n} B_{i,j} \\ B_{i,j} = \sum_{h=j-i}^{j} (-)^{i+j} A_{j-h,h} \begin{pmatrix} h \\ j-i \end{pmatrix} \upsilon^{j-i} \left(\frac{\sigma}{\upsilon}\right)^{h} \end{gathered} \tag{3.42}$$

l'on peut réécrire ainsi :

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{n} i X^{i-1} \sum_{j=i}^{n} B_{i,j} = 0 \\ \text{et} \\ \sum_{i=0}^{n} (i-1) X^{i} \sum_{j=i}^{n} B_{i,j} = 0 \end{gathered} \tag{3.43}$$

En comparant les équations (3.43) avec la deuxième des positions (3.42), il est facile de vérifier que le coefficient $A_{\mu,\nu}$ du produit $x^{\mu} y^{\nu}$ $(\mu, \nu \in \{0, 1, ..., n\})$ dans l'équation donnée,

${}_nF(x,y)=0$, devient respectivement, dans ces deux équations, le coefficient de

$$\left(\frac{\sigma}{\upsilon}\right)^{\nu}\sum_{h=0}^{\mu+\nu}(-)^h(\mu+\nu-h)\left(\begin{array}{c}\nu\\h\end{array}\right)X^{\mu+\nu-h-1}\upsilon^h$$

$$\text{et} \tag{3.44}$$

$$\left(\frac{\sigma}{\upsilon}\right)^{\nu}\sum_{h=0}^{\mu+\nu}(-)^h(\mu+\nu-h-1)\left(\begin{array}{c}\nu\\h\end{array}\right)X^{\mu+\nu-h}\upsilon^h$$

Les équations (3.41) peuvent donc être réécrites comme suit[27] :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j,j}\left(\frac{\sigma}{\upsilon}\right)^{j}\sum_{h=0}^{i}(-)^h(i-h)\left(\begin{array}{c}j\\h\end{array}\right)X^{i-h-1}\upsilon^h=0$$

$$\text{et} \tag{3.45}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j,j}\left(\frac{\sigma}{\upsilon}\right)^{j}\sum_{h=0}^{i}(-)^h(i-h-1)\left(\begin{array}{c}j\\h\end{array}\right)X^{i-h}\upsilon^h=0$$

Il s'ensuit que les deux dernières équations du système (3.39) peuvent être obtenues directement de l'équation de la courbe, sans passer par la détermination préalable des coefficients K_{n-i} $(i=2,3,\ldots,n)$. Si, à partir de ces équations, il est possible de déterminer les inconnues υ et σ, ou leur seul rapport, en termes des coefficients $A_{i-j,j}$ $(i=0,1,...n; j=0,1,...i)$ et des coordonnées du point M, alors le problème est résolu. La méthode de Descartes, dans la version de Florimond, peut donc se réduire à la solution d'un système de deux équations qui s'obtiennent directement de l'équation donnée moyennant des transformations standard.

Ceci étant dit, revenons un instant à l'équation (3.22). L'inconnue υ y intervient avec deux significations distinctes : comme dénominateur du rapport $\frac{\sigma}{\upsilon}$, et comme différence entre l'abscisse $x=X$ du point M et la sous-tangente relative à ce point. Ainsi, dans les équations qui dérivent de cette équation, et donc aussi dans les équations (3.45), les deux inconnues υ et σ sont entre elles dans le rapport de la sous-tangente à l'ordonnée relatives au point M si et seulement si la première de ces inconnues est prise de telle manière que cette sous-tangente soit égale à $X-\upsilon$. Cela signifie qu'on ne peut pas assigner à la variable υ une valeur arbitraire et espérer trouver, par le biais de ces équations, la valeur correspondante de σ et, donc, la valeur du rapport $\frac{\sigma}{\upsilon}$. Pour résoudre le problème, il faut donc déterminer le rapport $\frac{\sigma}{\upsilon}$ comme s'il était indépendant de υ.

Il est pourtant aisé de prouver que la première des équations (3.45) peut toujours être réduite à une équation du premier degré dans la variable $\frac{\sigma}{\upsilon}$, où n'apparaît pas l'inconnue υ. Pour résoudre le problème, et déterminer donc la tangente cherchée, il suffit de considérer cette seule équation et d'opérer cette réduction.

Si l'équation de la courbe est de la forme

$$y={}_nP(x)=\sum_{i=0}^{n}A_ix^i \tag{3.46}$$

[27]Il est aisé de vérifier que des équations (3.45) on passe aux équations (3.25) en posant : $n=2$; $A_{0,0}=A_{1,0}=A_{0,2}=0$; $A_{0,1}=-k$; et $A_{2,0}=-A_{1,1}=1$.

ceci se fait fort aisément. Dans ce cas on aura en effet :

$$\begin{aligned} &A_{i,0} = A_i && (i = 0, 1, \ldots, n) \\ &A_{0,1} = -1 && \\ &A_{i-j,j} = 0 && (j = 1 \neq i \ ; \ j = 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{3.47}$$

de sorte que la première des équations (3.45) fournira d'emblée l'égalité :

$$\frac{\sigma}{\upsilon} = \sum_{i=0}^{n} A_i i X^{i-1} \tag{3.48}$$

qui est bien sur équivalente à celle qu'on obtient par le biais du formalisme différentiel.

Il est facile de montrer qu'on parvient aisément à un résultat équivalent à celui obtenu par le biais de ce formalisme dans d'autres cas particuliers, par exemple lorsque l'équation de la courbe est de la forme

$$y = \frac{{}_nP(x)}{{}_mQ(x)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} A_i x^i}{\sum\limits_{i=0}^{m} \bar{A}_i x^i} \tag{3.49}$$

ou de la forme

$$y^q = \frac{{}_nP(x)}{{}_mQ(x)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} A_i x^i}{\sum\limits_{i=0}^{m} \bar{A}_i x^i} \tag{3.50}$$

(q étant un exposant entier strictement positif quelconque).

Je me limite pourtant à considérer le cas le plus général, en supposant que l'équation de la courbe est une équation Algébrique entière quelconque :

$$\sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j} x^{i-j} y^j \right] = 0 \tag{3.51}$$

Il suffit de se réclamer de l'équation (3.35), d'observer que, quels que soient les nombres entiers positifs k et l, on a

$$[k > l] \Rightarrow \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} = 0 \tag{3.52}$$

et

$$(l-k) \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} l-1 \\ k \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

et de poser, pour tout nombre entier positif ν,

$$H_{\nu,h} = (-)^h \begin{pmatrix} \nu \\ h \end{pmatrix} X^{\nu-h} \upsilon^h \tag{3.54}$$

pour réécrire la première des équations (3.45) sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}\left(\frac{\sigma}{\upsilon}\right)^{j}\sum_{h=0}^{j}\left[i-j+j-h\right]H_{j,h}X^{i-j-1} \\
&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}X^{i-j-1}\left\{\begin{array}{l}(i-j)\left(\dfrac{\sigma}{\upsilon}\right)^{j}\displaystyle\sum_{h=0}^{j}H_{j,h}\\ j\left(\dfrac{\sigma}{\upsilon}\right)^{j}X\displaystyle\sum_{h=0}^{j-1}H_{j-1,h}\end{array}\right. \\
&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}X^{i-j-1}\left\{\begin{array}{l}(i-j)\left(\dfrac{\sigma}{\upsilon}\right)^{j}(X-\upsilon)^{j}\\ j\left(\dfrac{\sigma}{\upsilon}\right)X\left(\dfrac{\sigma}{\upsilon}\right)^{j-1}(X-\upsilon)^{j-1}\end{array}\right. \\
&=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}\left(i-j\right)X^{i-j-1}Y^{j}\\ +\left(\dfrac{\sigma}{\upsilon}\right)\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}X^{i-j}jY^{j-1}\end{array}\right\}=0
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

La solution immédiate de cette équation donne alors l'égalité :

$$
\frac{\sigma}{\upsilon}=-\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}\left(i-j\right)X^{i-j-1}Y^{j}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}X^{i-j}jY^{j-1}}
\tag{3.56}
$$

qui est bien sûr équivalente à celle qu'on obtient par le biais du formalisme différentiel[28].

Cela ne signifie pas que la méthode de Descartes, dans la version de Florimond, préconise le calcul différentiel. Ce qu'on vient de montrer est tout simplement que si l'équation de la courbe a été mise sous forme entière, alors, quelle que soit cette équation, cette méthode

[28]Il est aisé de voir que les calculs qui conduisent à la détermination du rapport $\frac{\sigma}{\upsilon}$ peuvent être répétés — et conduisent au même résultat — si l'on remplace, dès la première étape de la méthode, l'équation (3.22) par l'équation

$$
y=\frac{\sigma(x-z)}{\upsilon}
$$

où σ et υ sont les deux côtés proportionnels respectivement à RM et à FR d'un triangle quelconque semblable au triangle FRM, et où $z =$ AF est la différence entre l'abscisse AR du point M et la sous-tangente FR, et qu'on pose ensuite

$$
Y=\frac{\sigma(X-z)}{\upsilon}
$$

Cela dépend du fait que, dans ces calculs, on a traité les variables υ et $\frac{\sigma}{\upsilon}$ comme des variables indépendantes entre elles. On comprend ainsi que rien n'oblige, dans la méthode de Florimond, à supposer que le triangle semblable au triangle FRM, de côtés σ et υ , soit placé dans la position dans laquelle Florimond le place. Si dans l'équation (3.22), on posait par contre $x-\upsilon=t$ ($t =$ FR étant la sous-tangente relative au point M), fournit aisément, par le biais d'une suite de transformations formelles fort simples, une expression du rapport $\frac{\sigma}{v}$ en termes des coordonnées X et Y du point M. Pour le prouver, on a employé une notation convenable nous permettant d'écrire la forme générale d'une équation Algébrique entière, et on a ensuite raisonné sur cette forme comme sur n'importe quelle autre équation, conformément aux prescriptions de la méthode de Descartes dans la version de Florimond. À ce propos, on s'est aussi réclamé de la forme générale d'un développement binomial pour un exposant entier, qu'on a pu écrire grâce à l'usage d'un symbole qui exprime un coefficient binomial quelconque. L'usage de ce symbole nous a permit d'exprimer une propriété générale des coefficients binomiaux, moyennant une simple égalité dont on s'est servit comme d'une règle de substitution. Naturellement, rien de ceci n'aurait pu être fait par Descartes, Florimond ou n'importe quel autre mathématicien de leur époque. Rien ne les aurait pourtant empêchés de raisonner comme on l'a fait à partir de n'importe quelle équation particulière, en écrivant des développements binomiaux particuliers et en comparant leurs coefficients. Ce qu'on a prouvé est donc, en dernière instance, qu'aucune difficulté matérielle, due à une masse de calculs trop compliqués, n'aurait en aucun cas su empêcher Descartes ou un mathématicien post-cartésien de parvenir à une expression du rapport $\frac{\sigma}{v}$ en termes des coordonnées X et Y du point M, en appliquant la démarche suggérée par Florimond à l'équation de la courbe donnée, pourvu que cette équation ait été mise sous forme entière, et qu'on ait opéré des substitutions et des transformations convenables.

Ceci étant dit, il faut néanmoins observer que la limitation aux cas où l'équation de la courbe a été mise sous forme entière est loin d'être anodine, et cela non pas à cause de l'extension du domaine de courbes auxquelles la méthode est applicable, puisque ce domaine coïncide, par définition[29], avec le domaine des courbes géométriques, et Descartes n'aurait pas pu espérer appliquer sa méthode dans d'autres cas. Ce qui est crucial est plutôt que, ne s'appliquant qu'à des équations entières, la démarche précédente ne produit rien de similaire à un opérateur de transformation applicable à n'importe quelle expression Algébrique, formellement équivalent à l'opérateur différentiel $\frac{d}{dx}$. Si la méthode de Descartes, dans la nouvelle version de Florimond, semble ainsi traiter le rapport $\frac{\sigma}{v}$ comme un invariant géométrique fondamentale (ce qui n'était guère le cas pour cette même méthode dans sa version originale), ce rapport n'est pas lié à l'algorithme de solution du problème des tangentes que cette méthode permet de mettre en place par une relation analogue à

l'équation (3.37) prendrait la forme

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} B_i x^i = 0 \\ &B_i = \sum_{j=i}^{n} A_{i,j-i}\left(t\frac{\sigma}{v}\right)^{j-i} \end{aligned}\right.$$

et les deux dernières équations du système (3.39) deviendraient respectivement

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} A_{j,i-j}\, jX^{j-1}\left(t\tfrac{\sigma}{v}\right)^{i-j}\right) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} A_{j,i-j}(j-1)X^{j}\left(t\tfrac{\sigma}{v}\right)^{i-j}\right) = 0$$

Ce même système, considéré par rapport aux inconnues t et $\frac{\sigma}{v}$, serait alors nécessairement indéterminé.

[29]Cf. ci-dessus, pp. 56-57.

celle qui lie le rapport $\frac{dy}{dx}$ avec l'algorithme du calcul différentiel.

3.3 La règle de Hudde

La réforme de la méthode de Descartes proposée par Florimond ne fut probablement pas étrangère aux recherches que, quelques années après la rédaction des *Notes brèves*, conduisirent Johannes Hudde, un autre des représentants de l'école de van Schooten, à une nouvelle méthode pour la recherche des *maxima* et *minima* d'une quantité exprimée par une expression Algébrique.

La méthode de Hudde fut énoncée dans une lettre à van Schooten du 6 février 1658, que ce dernier publia aussitôt dans la seconde édition latine de la *Géométrie*[30]. Cette première lettre, se terminant avec le sommaire d'un traité sur les *maxima* et les *minima* qui ne fut jamais publié, et que Hudde dit avoir écrit à son usage[31], fut suivie d'une autre lettre sur le même argument, datée du 21 novembre 1659, que Van Schooten n'eut pas, en revanche, le temps d'insérer dans son édition de la *Géométrie*. Cette deuxième lettre ne devint publique qu'en 1713[32], après la mort de son auteur, et ne fut certes pas connue par Newton à l'époque de ses premières recherches mathématiques. On va considérer ici seulement la première de ces lettres, qui fut une source fondamentale pour l'évolution mathématique de ce dernier.

3.3.1 Le théorème de Hudde

Cette lettre s'ouvre, sans aucune explication préliminaire, avec l'exposition d'un théorème qui constitue le fondement de la méthode[33] :

> Si in æquatione duæ radices sint æquales, atque ipsa multiplicetur per Arithmetica Progressionum, quam libuerit ; nimirum, primus terminus æquationis per primum terminum Progressionis, secundus terminus æquationis per secundum terminum progressionis, &c. : dico Productum fore æquationem, in quâ una dictarum radicum reperietur.

Reformulé dans un langage plus explicite, ce théorème peut s'énoncer ainsi : si

$$\{\tau_i\}_{i=0}^{n} \tag{3.57}$$

est une progression arithmétique quelconque, et que

$$_nP(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i = 0 \tag{3.58}$$

[30] Cf. Hudde (1658*b*).

[31] Cf. Hudde (1658*b*), 515-516.

[32] Cf. Hudde (JL) ; à propos de cette publication cf. Newton (MP), I, **2**, Introduction, App. 1, 150, note 11.

[33] Cf. Hudde (1658*b*), 507. Il se peut que Hudde soit parvenu à ce théorème au cours de ses recherches sur la "réduction des équations", dont les résultats son exposés dans une lettre précédente, écrite à van Schooten pendant les ides de juillet 1657, et qui figure aussi dans la seconde édition latine de la *Géométrie* : cf. Hudde (1658*a*).

est une équation *algébrique* dont $x = X$ est une racine double, alors $x = X$ est une racine de la transformée

$$_nP^*(x) = \sum_{i=0}^{n} \tau_i A_i x^i = 0 \tag{3.59}$$

de cette équation[34].

Avant de voir comment ce théorème peut être appliqué à la recherche des *maxima* et de *minima* d'une courbe exprimée par une équation Algébrique donnée, exposons la (splendide) démonstration de Hudde. Celle-ci porte, comme d'habitude à l'époque, sur un exemple particulier, une équation quelconque de degré 5, qui est censée avoir une racine double $x = X$. Néanmoins, en suivant la suggestion de Descartes, contenue dans le troisième livre de la *Géométrie*[35], Hudde écrit cette équation ainsi :

$$\left(x^2 - 2Xx + X^2\right)\left(x^3 + px^2 + qx + r\right) = 0 \tag{3.60}$$

en rendant clair d'emblée que les coefficients de cette équation sont quelconques. Quant à la progression arithmétique, il considère la progression à 6 termes $\{a + ib\}_{i=0}^{5}$, où a et b sont des "termes indéterminés". Et il est même explicite en observant que sa démonstration vaut pour n'importe quelle équation et n'importe quelle progression arithmétique[36] :

> Et cum hîc rursus nulla habeatur ratio multitudinis aut paucitatis aut etiam qualitatis multiplicatorum erint Propositum Theorema universaliter demostratum de quibusqunque æquationibus, duas radices æquales habentibus.

Comme Descartes, Hudde travaille ainsi sur la forme générique d'une équation *algébrique* possédant une racine double.

En introduisant une notation plus adéquate, on pourra écrire l'équation (3.58) comme suit :

$$_nP(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i = (x - X)^2 \sum_{i=0}^{n-2} K_i x^i = 0 \tag{3.61}$$

---

[34]D'après Whiteside [Newton (MP), I, **2**, 2, "Historical Note", 214-215], le théorème de Hudde fournirait un critère pour la possession d'une racine double de la part d'une équation *algébrique* : l'équation $_nP(x) = 0$ a une racine double $x = X$, si $_nP^*(X) = 0$. En observant que

$$_nP^*(x) = \tau_0 \left[_nP(x)\right] + rx\frac{d}{dx}\left[_nP(x)\right]$$

Whiteside conclut que ce critère est équivalent au critère connu, d'après lequel $_nP(x) = 0$ a une racine double si

$$_nP(X) = \left[\frac{d}{dx}\left[_nP(x)\right]\right]_{x=X} = 0$$

Il ne me semble pas, pourtant, que Hudde entendait ainsi son théorème.

[35]Cf. la note 97 du chapitre 1.

[36]Cf. Hudde (1658), 509.

où K_i $(i = 0, 2, \ldots, n-2)$ sont $n-1$ coefficients quelconques. En développant, on aura alors :

$$\begin{aligned} {}_nP(x) &= \sum_{i=0}^{n-2} \left(x^i X^2 - 2x^{i+1}X + x^{i+2}\right) K_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \left[\sum_{j=0}^{2} w_j x^{i+j} X^{2-j}\right] K_i = 0 \end{aligned} \tag{3.62}$$

où $\{w_j\}_{j=0}^2$ est la progression numérique $\{1, -2, 1\}$).

À ce point Hudde se réclame d'un lemme qu'on peut prouver aisément : si $\{\theta_j\}_{j=0}^2$ est une progression arithmétique quelconque, alors, quel que soit z :

$$\sum_{j=0}^{2} z\theta_j w_j = 0 \tag{3.63}$$

De ce lemme il s'ensuit que les sommes

$$\sum_{j=0}^{2} \tau_{i+j} w_j x^{i+j} X^{2-j} \tag{3.64}$$

$(i = 0, 1, \ldots, n-2)$, où $\{\tau_h\}_{h=0}^n$ est une progression géométrique quelconque, s'annulent toutes pour la substitution $x = X$, en se réduisant par cette substitution aux sommes

$$\sum_{j=0}^{2} X^{i+2} \tau_{i+j} w_j \tag{3.65}$$

$(i = 0, 1, \ldots n-2\ )$, où les progressions $\{\tau_{i+j}\}_{j=0}^2$ sont toutes arithmétiques. Comme, d'après l'équation (3.62), on a,

$$\sum_{i=0}^{n-2} \left[\sum_{j=0}^{2} \tau_{i+j} w_j x^{i+j} X^{2-j}\right] K_i = \sum_{i=0}^{n} \tau_i A_i x^i = {}_nP^*(x) \tag{3.66}$$

de là il s'ensuit enfin que :

$${}_nP^*(X) = \sum_{i=0}^{n-2} \left[\sum_{j=0}^{2} \tau_{i+j} w_j X^{i+2}\right] K_i = \sum_{i=0}^{n-2} 0 = 0 \tag{3.67}$$

de sorte que $x = X$ est bien une racine de ${}_nP^*(x) = 0$, comme il fallait prouver[37].

[37]Après avoir prouvé son théorème, Hudde énonce un corollaire [cf. Hudde (1658*b*), 509], qui ne trouve d'ailleurs aucune application par la suite : si $\{\tau_i\}_{i=0}^n$ est une succession arithmétique quelconque, et ${}_nP(x) = 0$ est une équation *algébrique* dont $x = X$ est une racine m-uple, alors $x = X$ est une racine $(m-1)$-uple de la transformée ${}_nP^*(x) = 0$ de cette équation. Hudde ne fournit aucun argument pour prouver ce corollaire à partir de son théorème. Whiteside [cf. Newton (MP), I, **2**, 2, "Historical Note", 213-215, 215, note (11)] a

3.3.2 Du théorème de Hudde à la règle de Hudde

Après avoir démontré son théorème, Hudde se contente de considérer trois cas distincts dans lesquels ce théorème permet de déterminer les *maxima* et le *minima* d'une quantité exprimée par une certaine expression Algébrique. Ces cas diffèrent entre eux pour la forme de l'expression dont il est question. D'abord, Hudde considère des quantités y satisfaisant à des équations de la forme (3.46), puis des quantités y satisfaisant des équations de la forme (3.49), enfin des quantités y satisfaisant à des équations de la forme (3.50). Pour chacun de ces cas, il décrit d'abord la méthode discursivement et en général, et il présente ensuite des exemples.

* * *

Avant de venir à la considération de ces trois cas, il convient de faire une remarque d'ordre général.

Supposons qu'il s'agit de trouver les valeurs de x qui maximisent ou minimisent la valeur d'une certaine quantité y satisfaisant à une équation de la forme $y = f(x)$, où

---

donné une très jolie preuve de ce corollaire, pour le cas où $m = 3$, qui est facilement généralisable à toute valeur de m (et aussi au cas $m = 2$, qu'on vient de considérer). Soit ${}_nP(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} A_i x^i = 0$ une équation de degré n qui possède une racine m-uple $x = X$ ($m \leq n$). Cette équation peut être écrite sous la forme

$$(x-X)^m \sum_{i=0}^{n-m} K_i x^i = \sum_{i=0}^{n-m} \left(\sum_{j=0}^{m} (-)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} x^{m-j} X^j \right) K_i x^i = 0$$

Si on pose $\tau_{i+h} = \tau_i + h\eta$, on a alors

$$\begin{aligned} {}_nP^*(x) &= \sum_{i=0}^{n-m} \left(\sum_{j=0}^{m} (-)^j \left(\tau_i + (m-j)\,\eta\right) \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} x^{i+m-j} X^j \right) K_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-m} \left(\begin{array}{l} \sum\limits_{j=0}^{m} (-)^j \tau_i \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} x^{m-j} X^j \\ +\eta \sum\limits_{j=0}^{m-1} (-)^j (m-j) \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} x^{m-j} X^j \end{array} \right) K_i x^i \end{aligned}$$

Mais, quel que soient les nombres entiers positifs l et k,

$$(l-k) \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} l-1 \\ k \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\begin{aligned} {}_nP^*(x) &= \sum_{i=0}^{n-m} \left[\tau_i \,(x-X)^m + \eta m x \,(x-X)^{m-1} \right] K_i x^i \\ &= (x-X)^{m-1} \sum_{i=0}^{n-m} \left[\tau_i \,(x-X) + \eta m x \right] K_i x^i \end{aligned}$$

qui conclut la démonstration. Il est évident que cette preuve est essentiellement différente de celle de Hudde, qui ne cherche pas de factoriser ${}_nP^*(x)$, en se contentant de montrer que ce polynôme s'annule (en se transformant dans une somme de zéros), pour $x = X$. Il reste donc le problème de comprendre comment Hudde parvint à démontrer ce théorème généralisé en tant que corollaire de son premier théorème, pourvu qu'il en possédât une véritable démonstration.

$f(x)$ est une expression Algébrique quelconque où apparaît la variable x. Quelle que soit la nature des quantités x et y, on pourra supposer qu'elles soient représentées par des segments variables, liés entre eux par une relation exprimée par l'équation $y = f(x)$, qui appartiendra alors à l'Algèbre des segments. Ainsi interprétée, cette équation pourra être rapportée à un système de coordonnées cartésiennes quelconque, et elle exprimera alors une courbe référée à ce système. Les valeurs de x qui maximisent ou minimisent y seront alors les valeurs des abscisses de certains points de cette courbe où celle-ci présente une tangente parallèle à l'axe. Supposons que $x = X$ soit une de ces valeurs et que $Y = f(X)$ soit par conséquent un extrême de y. Comme, quel que soit le segment K, l'équation $f(x) - K = 0$ exprime les conditions pour que la courbe d'équation $y = f(x)$ coupe la droite d'équation $y = K$ qui est évidemment parallèle à l'axe, il s'ensuit que l'équation $f(x) - Y = 0$ (qui ne présente qu'une seule variable) a une racine double $x = X$. Supposons encore que cette équation puisse être mise sous forme entière, c'est-à-dire qu'elle puisse être transformée dans un équation telle que $P_Y(x) = 0$, où $P_Y(x)$ est un polynôme en x où apparaît la constante Y. D'après le théorème de Hudde on aura alors l'égalité $P^*_Y(X) = 0$, et, comme Y n'est rien d'autre que la valeur prise par $y = f(x)$ lorsque $x = X$, cette dernière égalité peut être écrite sous la forme $P^*_{f(X)}(X) = 0$. On pourra alors lire cette égalité comme une équation dans la variable X qui exprime les conditions que cette variable doit respecter pour que la quantité $Y = f(X)$ puisse être un *maximum* ou un *minimum*. On pourra donc y substituer la variable x à la variable X.

Il s'ensuit que si de l'équation $y = f(x)$ on passe à l'équation $P^*_{f(x)}(x) = 0$ en suivant la démarche suivante

$$\begin{aligned}
&y = f(x) \rightarrow \\
&\quad \rightarrow f(x) - Y = 0 \rightarrow \\
&\qquad \rightarrow P_Y(x) = 0 \rightarrow \\
&\qquad\quad \rightarrow P^*_Y(X) = 0 \rightarrow \\
&\qquad\qquad \rightarrow P^*_{f(x)}(x) = 0
\end{aligned} \tag{3.68}$$

où X et Y sont des valeurs indéterminées qu'on assigne provisoirement aux variables x et y, on obtient une équation qui exprime les conditions que la variable x doit respecter pour que y puisse être un *maximum* ou un *minimum*. Or, il est facile de comprendre que dans la pratique des calculs, la prise en compte des variables indéterminées X et Y est parfaitement superflue. Il suffit, pour obtenir l'équation $P^*_{f(x)}(x) = 0$ à partir de l'équation $y = f(x)$, de mettre cette dernière équation sous forme entière, d'y considérer y comme constante, d'appliquer la transformation prescrite par le théorème de Hudde et de substituer enfin $f(x)$ à y.

Dans les trois cas qu'il considère, Hudde tire directement à partir des équations données (exprimant la relation qui lie entre elles les variables x et y) des nouvelles équations dans la seule variable x, et affirme que ces équations expriment les conditions que la variable x doit respecter pour que y puisse être un *maximum* ou un *minimum*. Ses conclusions peuvent donc être justifiées en général en montrant que ces nouvelles équations coïncident avec les équations $P^*_{f(x)}(x) = 0$ qu'on obtient à partir des équations données, en suivant le démarche

(3.68)[38]. Il y a pourtant d'autres manières de justifier ces mêmes conclusions, en s'appuyant, cas pour cas, sur la méthode des tangentes de Descartes, dans la version de Florimond. C'est ce qu'on verra en considérant ces cas séparément.

* * *

Comme on l'a dit, Hudde suppose d'abord[39] que la quantité y satisfait à une équation Algébrique de la forme (3.46), et il affirme d'emblée que lorsque cette quantité rejoint un *maximum* ou un *minimum* x est une racine de l'équation[40]

$$\sum_{i=1}^{n} iA_i x^i = 0 \tag{3.69}$$

Dans ce cas, l'équation $P_Y(x) = 0$ n'est rien d'autre que celle-ci :

$$A_0 - Y + \sum_{i=1}^{n} A_i x^i = 0 \tag{3.70}$$

Il suffit donc de choisir la progression arithmétique

$$\{\tau_i\}_{i=0}^{n} = \{i\}_{i=0}^{n} \tag{3.71}$$

pour obtenir l'égalité

$$P^*_{f(x)}(x) = \sum_{i=1}^{n} iA_i x^i \tag{3.72}$$

ce qui justifie l'affirmation de Hudde.

Pour voir comment cette même affirmation puisse être justifiée en se réclamant de la méthode des tangentes de Descartes, dans la version de Florimond, imaginons que l'équation (3.46) soit celle d'une courbe MN, référée à l'axe AH d'origine A, et que ses ordonnées forment avec cet axe un angle $\widehat{\mathsf{HRM}}$ quelconque (fig. 2 ; comme ci-dessus, on n'aura aucun besoin de supposer que cette courbe passe par le point A et qu'on ait ainsi $A_0 = 0$). Imaginons de surcroît que M soit un point de cette courbe d'abscisse $X = \mathsf{AR}$ et d'ordonnée $Y = \mathsf{RM}$; posons $\mathsf{AF} = \upsilon$ et $\mathsf{FS} = \sigma$; et supposons que FT est la tangente en M la courbe MN, de manière à ce que $\frac{\sigma}{\upsilon}$ soit le rapport entre Y et la sous-tangente FR. Il s'ensuit que la nouvelle équation

$${}_nP(x) - \frac{\sigma}{\upsilon}(x - \upsilon) = A_0 + \sigma + (A_1 - \frac{\sigma}{\upsilon})x + \sum_{i=2}^{n} A_i x^i = 0 \tag{3.73}$$

[38] Comme tous les mathématiciens de son époque, Hudde ne distinguait pas entre conditions nécessaires et conditions suffisantes pour un *maximum* ou un *minimum*. Il affirme à la lettre que ses équations expriment les conditions pour que y soit un *maximum* ou un *minimum*, ce qui est en général faux. Plus que les résultas de Hudde, ces sont pourtant les manières de les exprimer qui sont fautives, lorsque elles sont prises à la lettre, conformément aux conventions terminologiques modernes. Il ne me semble donc pas qu'il vaille la peine d'insister sur cette imprécision.

[39] Cf. Hudde (1658*b*), 510.

[40] Cf. la note (38), ci-dessus.

a une racine double $x = X$. Selon le théorème de Hudde, de là on tire l'égalité

$$\tau_0(A_0 + \sigma) + \tau_1(A_1 - \frac{\sigma}{\upsilon})X + \sum_{i=2}^{n} \tau_i A_i X^i = 0 \tag{3.74}$$

d'où il s'ensuit :

$$\frac{\sigma}{\upsilon} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \tau_i A_i X^i}{\tau_1 X - \upsilon\tau_0} = \frac{{}_nP^*(X)}{\tau_1 X - \upsilon\tau_0} \tag{3.75}$$

Les racines de ${}_nP^*(X) = 0$ donnent ainsi les valeurs de X pour lesquelles le rapport $\frac{\sigma}{\upsilon}$ s'annule, quelle que soit la progression $\{\tau_i\}_{i=0}^{n}$, pourvu que ces valeurs ne soient pas telles qu'on ait aussi $\frac{\tau_1}{\upsilon}X = \tau_0$. Or, ce rapport est nul en général (c'est-à-dire lorsque Y n'est pas nul) si et seulement si la sous-tangente est infinie pour $x = X$, c'est-à-dire que la courbe exprimée par l'équation $y = {}_nP(x)$ a une tangente parallèle à l'axe pour $x = X$. Pour éviter que les valeurs de X qui fournissent des racines de ${}_nP^*(X) = 0$ annulent en même temps $\tau_1 X - \upsilon\tau_0$, il suffit de bien choisir la progression $\{\tau_i\}_{i=0}^{n}$ ou de considérer υ comme une constante convenable. Si, en suivant le conseil de Hudde, on pose $\tau_i = i$, l'égalité (3.75) se change dans l'équation (3.48) et ce problème est résolu d'emblée. Il suffit alors de remplacer X par x pour obtenir l'équation (3.69).

Supposons maintenant que la quantité y satisfait une équation Algébrique de la forme (3.49) : c'est le deuxième cas considéré par Hudde. Pour résoudre le problème dans ce cas, Hudde énonce une règle assez baroque qui revient pourtant, en dernière instance, et pour admission explicite de Hudde lui-même[41], à prescrire de passer du quotient de polynômes donnés à l'équation

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} A_i x^i}{\sum_{i=0}^{m} \bar{A}_i x^i} - \frac{\sum_{i=0}^{n} iA_i x^i}{\sum_{i=0}^{m} i\bar{A}_i x^i} = 0 \tag{3.76}$$

qui n'est rien d'autre que la suivante

$$\frac{{}_nP(x)}{{}_mQ(x)} = \frac{{}_nP^*(x)}{{}_mQ^*(x)} \tag{3.77}$$

pour le choix de la progression arithmétique

$$\{\tau_i\}_{i=0}^{Max\{n,m\}} = \{i\}_{i=0}^{Max\{n,m\}} \tag{3.78}$$

Aussi dans ce cas, il est facile de justifier l'affirmation du Hudde de deux manières. On peut observer que

$$P_Y(x) = Y\left({}_mQ(x)\right) - {}_nP(x) \tag{3.79}$$

et donc :

$$\begin{aligned} P_Y^*(x) &= Y\left({}_mQ^*(x)\right) - {}_nP^*(x) \\ P_{f(x)}^*(x) &= \frac{{}_nP(x)}{{}_mQ(x)}\left({}_mQ^*(x)\right) - {}_nP^*(x) \end{aligned} \tag{3.80}$$

[41] Cf. Hudde (1658b), 512.

ou avoir recours à la méthode des tangentes de Descartes, dans la version de Florimond. En effet, si on interprète l'équation (3.49) comme l'équation d'une courbe MN, et qu'on raisonne sur cette courbe comme on l'a fait ci-dessus, on en conclut que la nouvelle équation

$$\sum_{i=0}^{n} A_i x^i - \frac{\sigma}{\upsilon}(x-\upsilon)\sum_{i=0}^{m} \bar{A}_i x^i = 0 \tag{3.81}$$

a une racine double $x = X$. De là, grâce au théorème de Hudde, en supposant que $\tau_i = \tau_0 + i\eta$, et en se rappelant l'égalité (3.35), on tire

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} \tau_i A_i X^i - \sum_{i=0}^{m} \bar{A}_i \left(\tau_{i+1}\frac{\sigma}{\upsilon}X^{i+1} - \tau_i \sigma X^i\right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \tau_0 \sum\limits_{i=0}^{n} A_i X^i - \tau_0 \sum\limits_{i=0}^{m} \bar{A}_i X^i \left(\frac{\sigma}{\upsilon}X - \sigma\right) \\ + \,\eta \sum\limits_{i=0}^{n} i A_i X^i - \eta \sum\limits_{i=0}^{m} \bar{A}_i i X^i \left(\frac{(i+1)}{i}\frac{\sigma}{\upsilon}X - \sigma\right) \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \tau_0 \sum\limits_{i=0}^{n} A_i X^i - \tau_0 Y \sum\limits_{i=0}^{m} \bar{A}_i X^i \\ + \,\eta \sum\limits_{i=0}^{n} i A_i X^i - \eta Y \sum\limits_{i=0}^{m} \bar{A}_i i X^i - \eta\frac{\sigma}{\upsilon} \sum\limits_{i=0}^{m} \bar{A}_i X^{i+1} \end{array} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.82}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\sigma}{\upsilon} = \frac{\tau_0 \sum_{i=0}^{n} A_i X^i + \eta \sum_{i=0}^{n} i A_i X^i - Y\left(\tau_0 \sum_{i=0}^{m} \bar{A}_i X^i + \eta \sum_{i=0}^{m} \bar{A}_i i X^i\right)}{\eta \sum_{i=0}^{m} \bar{A}_i X^{i+1}} \tag{3.83}$$

Le rapport $\frac{\sigma}{\upsilon}$ est donc nul, en général, et la tangente au point M est par conséquent parallèle à l'axe, si

$$Y = \frac{\tau_0 \sum_{i=0}^{n} A_i X^i + \eta \sum_{i=0}^{n} i A_i X^i}{\tau_0 \sum_{i=0}^{m} \bar{A}_i X^i + \eta \sum_{i=0}^{m} \bar{A}_i i X^i} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \tau_i A_i X^i}{\sum_{i=0}^{m} \tau_i \bar{A}_i X^i} \tag{3.84}$$

qui, en substituant x à X se transforme dans l'équation (3.77). Si on suppose que la raison η de la progression arithmétique $\{\tau_i\}_{i=0}^{Max\{n,m\}}$ est différente de zéro, le dénominateur du deuxième membre de l'égalité (3.83) est nul lorsque X est nul ou assume une valeur qui, en annulant le polynôme ${}_mQ(X)$, rend Y infini. Si on veut éviter l'exception à la règle précédente qui tient à la première de ces possibilités, il suffit, encore une fois, de suivre la suggestion de Hudde, et prendre $\tau_i = i$[42].

[42] Après avoir traité les deux premiers cas, Hudde observe [cf. Hudde (1658*b*), 513] que toute succession arithmétique de raison 1 dont les termes sont des nombres entiers positifs aurait convenu dans ces deux cas. Il n'est pas difficile de vérifier qu'en général c'est ainsi et qu'on peut même prendre n'importe quelle succession arithmétique.

Il ne reste que le troisième cas[43]. Bien que Hudde déclare de s'intéresser, dans ce cas, à une quantité y exprimée implicitement par une équation Algébrique quelconque à deux variables, il ne considère que le cas où y satisfait à une équation Algébrique de la forme (3.50), que, pour rester plus proche de l'argument de Hudde, on écrira ainsi :

$$\sum_{i=0}^{\nu} \left(A_i - y^q \bar{A}_i\right) x^i = 0 \tag{3.85}$$

(où on peut bien supposer que certains des coefficients A_i et $\bar{A}_i$ ($i = 0, 1, \ldots, \nu$) sont nuls. Hudde prescrit dans ce cas de transformer cette équation dans la suivante

$$\sum_{i=0}^{\nu} \tau_i \left(A_i - y^q \bar{A}_i\right) x^i = 0 \tag{3.86}$$

et d'en chercher les racines[44].

Encore une fois, il est facile de justifier la prescription de Hudde de deux manières. D'un côté, il suffit d'observer que, quelle que soit la progression arithmétique $\{\tau_i\}_{i=0}^{\nu}$, on a

$$P_Y(x) = {}_nP(x) - (Y^q)_m\, Q(x) \tag{3.87}$$

et donc

$$P_Y^*(x) = {}_nP^*(x) - (Y^q)_m\, Q^*(x) \tag{3.88}$$

De l'autre côté, il suffit d'interpréter l'équation (3.85) comme l'équation d'une courbe MN, et raisonner sur cette courbe comme on l'a fait ci-dessus, conformément à la méthode de Descartes, dans la version de Florimond. On et conclura alors que la nouvelle équation

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\nu} \left(A_i - \left(\frac{\sigma}{\upsilon}\right)^q (x-\upsilon)^q \bar{A}_i\right) x^i = \\ = \sum_{i=0}^{\nu} A_i x^i - \sum_{i=0}^{n} \bar{A}_i \left[\sum_{h=0}^{q} (-)^h \left(\frac{\sigma}{\upsilon}\right)^q \left(\begin{array}{c} q \\ h \end{array}\right) x^{i+q-h} \upsilon^h\right] = 0\end{aligned} \tag{3.89}$$

a une racine double $x = X$. En appliquant le théorème de Hudde, en supposant que $\tau_i = \tau_0 + i\eta$, en se rappelant les égalités (3.35) et (3.53), et en posant, quel que soit le nombre entier positif ν,

$$H_{\nu,h} = (-)^h \left(\frac{\sigma}{\upsilon}\right)^\nu \left(\begin{array}{c} \nu \\ h \end{array}\right) X^{\nu-h} \upsilon^h \tag{3.90}$$

---

[43]Cf. Hudde (1658*b*), 513-515.

[44]Hudde illustre sa règle en la rapportant tantôt à la progression arithmétique $\{i\}_{=0}^{n}$, tantôt à d'autres progressions arithmétiques de raison 1 dont les termes sont des nombres entiers positifs, et il observe qu'il convient toujours de choisir la progression arithmétique qui rend les calculs les plus simple possibles : cf. Hudde (1658*b*), 515.

il est sera facile de tirer :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\nu} \tau_i A_i X^i - \sum_{i=0}^{n} \bar{A}_i \left[\sum_{h=0}^{q} \tau_{i+q-h} H_{q,h} X^i \right] = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \tau_0 \sum_{i=0}^{\nu} A_i X^i + \eta X \sum_{i=0}^{\nu} i A_i X^{i-1} \\ - \sum_{i=0}^{\nu} \bar{A}_i \left[\begin{array}{l} \tau_0 X^i \sum_{h=0}^{q} H_{q,h} + \\ + \eta X^{i+1} \sum_{h=0}^{q} (i+q-h) H_{q,h} X^{-1} \end{array} \right] \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \tau_0 \sum_{i=0}^{\nu} A_i X^i + \eta X \sum_{i=0}^{\nu} i A_i X^{i-1} \\ - \sum_{i=0}^{\nu} \bar{A}_i X^i \left[\begin{array}{l} \tau_0 Y^q + \\ + \eta \left[\begin{array}{l} i \sum_{h=0}^{q} H_{q,h} \\ X \left(\frac{\sigma}{\upsilon} \right) \sum_{h=0}^{q} q H_{q-1,h} \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \tau_0 \sum_{i=0}^{\nu} \left(A_i - Y^q \bar{A}_i \right) X^i \\ - \eta q X \left(\frac{\sigma}{\upsilon} \right) Y^{q-1} \sum_{i=0}^{\nu} \bar{A}_i X^i \\ + r \sum_{i=0}^{\nu} i A_i X^i - \eta Y^q \sum_{i=0}^{\nu} \bar{A}_i i X^i \end{array} \right\} = 0
\end{aligned}
\tag{3.91}
$$

c'est-à-dire :

$$
\frac{\sigma}{\upsilon} = \frac{\tau_0 \sum_{i=0}^{\nu} \left(A_i - Y^q \bar{A}_i \right) X^i + \eta \sum_{i=0}^{\nu} i \left(A_i - Y^q \bar{A}_i \right) X^i}{\eta q Y^{q-1} \sum_{i=0}^{\nu} \bar{A}_i X^{i+1}} \tag{3.92}
$$

Le rapport $\frac{\sigma}{\upsilon}$ est donc nul, en général, et la tangente au point M est par conséquent parallèle à l'axe, si

$$
\begin{aligned}
\tau_0 \sum_{i=0}^{\nu} \left(A_i - Y^q \bar{A}_i \right) X^i + \eta \sum_{i=0}^{\nu} i \left(A_i - Y^q \bar{A}_i \right) X^i = \\
= \sum_{i=0}^{\nu} \left(A_i - Y^q \bar{A}_i \right) \tau_i X^i = 0
\end{aligned}
\tag{3.93}
$$

comme Hudde l'affirme. Si la raison η de la progression arithmétique $\{\tau_i\}_{i=0}^{n}$ est différent de zéro, le dénominateur du deuxième membre de l'égalité (3.92) est nul soit lorsque Y

est nul, soit lorsque X est nul ou assume une valeur qui rend Y infini. Si on veut éviter les exceptions à la règle précédente qui tiennent aux deux premières possibilités, il suffit à nouveau de supposer que $\tau_i = i$.

* * *

Ainsi qu'on les a exposés, en tant que référés à des équations quelconques de la forme considérée, les arguments qui justifient les égalités (3.83) et (3.92) en s'appuyant sur de la méthode des tangentes de Descartes dans la version de Florimond n'étaient certes pas à la porté de Hudde. Il est portant certain que ce dernier aurait pu formuler les mêmes arguments à propos de n'importe quelle équation particulière des formes considérées. Quant à l'argument qui justifie l'égalité (3.75) en s'appuyant sur cette même méthode, il était, même dans sa forme générale, parfaitement à la porté de Hudde. Ces arguments montrent comment, derrière la forme discrète d'une application du théorème de Hudde à la solution du problème des *maxima* et des *minima*, se cache une méthode pour la solution du problème des tangentes qui simplifie celle de Descartes, en le transformant *de facto* dans un simple algorithme. Dans le cas considérés l'application du théorème de Hudde permet en effet de libérer le processus de détermination du rapport $\frac{\sigma}{\upsilon}$ de la détermination préalable des coefficients K_i $(i = 0, 1, \ldots, n-2)$.

Un argument analogue permet de démontrer aussi l'égalité (3.56), moyennant des calculs fort simples, lorsque la courbe dont on cherche la tangente est exprimée par une équation Algébrique entière quelconque. En en effet, si l'on suppose que l'équation

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}x^{i-j}\left(\frac{\sigma}{\upsilon}\right)^{j}(x-\upsilon)^{j} = 0 \tag{3.94}$$

a une racine double $x = X$, alors, pourvu que l'on pose, comme ci-dessus, $\tau_i = \tau_0 + \eta i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ et on se rappelle l'égalité (3.53), le théorème de Hudde permet de passer à l'égalité

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}\sum_{h=0}^{j}(-)^{h}\tau_{i-j+j-h}\left(\begin{array}{c} j \\ h \end{array}\right)\left(\frac{\sigma}{\upsilon}\right)^{j} X^{i-j+j-h}\upsilon^{h} = \\ &= \left\{\begin{array}{l} \tau_0\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{i} A_{i-j,j}X^{i-j}Y^{j} + \\ \\ +\ \eta\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{i} A_{i-j,j}X^{i-j}\left[(i-j)\,Y^{j} + j\dfrac{\sigma}{\upsilon}XY^{j-1}\right] \end{array}\right\} = 0\end{aligned} \tag{3.95}$$

d'où il s'ensuit :

$$\frac{\sigma}{\upsilon} = -\frac{\tau_0\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}X^{i-j}Y^{j} + \eta X\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}(i-j)X^{i-j-1}Y^{j}}{\eta X\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}jX^{i-j}Y^{j-1}} \tag{3.96}$$

que pour $\tau_0 = 0$ et $r = 1$ se réduit justement à l'égalité (3.56).

On comprendra alors que la contribution de la lettre de Hudde au développement de la géométrie cartésienne est bien plus grande que ce qu'il peut apparaître si l'on se limite à la lire comme l'exposition d'une méthode pour la solution du problème des *maxima* et des *minima*. Cette lettre présente en effet une règle qui peut être appliquée à la solution de trois problèmes, au moins. Cette règle, qui sera dire ensuite "règle de Hudde", prescrit de passer de n'importe quelle équation entière à une variable $\sum_{i=0}^{n} A_i x^i = 0$ aux équations $\sum_{i=0}^{n} \tau_i A_i x^i = 0$ ou $\sum_{i=0}^{n} \tau_i A_i X^i = 0$. Elle s'applique d'abord à déterminer les conditions pour que n'importe quelle équation entière a une racine double. De ce fait, elle permet de simplifier la méthode de tangentes de Descartes, dans sa formulation originale. En deuxième lieu, cette règle s'applique à la solution du problème des *maxima* et des *minima* d'une quantité y exprimée par une expression Algébrique $f(x)$, pourvu qu'on sache écrire l'égalité $y = f(x)$ sous la forme d'une équation entière. Enfin, elle s'applique à la détermination du rapport $\frac{\sigma}{v}$ relatif à n'importe quelle courbe exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes quelconque, par une équation Algébrique entière.

C'est en réfléchissant sur cette règle et en l'appliquant de différentes manières que Newton parviendra, entre les années 1664 et 1665, à certaines parmi ses résultats les plus fondamentaux.

3.4 La méthode des *maxima* et *minima* de Fermat appliquée par van Schooten à la recherche de la normale

La méthode de Descartes ne fut pourtant qu'une des sources de réflexions de Newton à propos du problème des tangentes. Une autre fut, sans doute, la méthode de Fermat, que Newton apprit probablement de la deuxième édition latine de la *Géométrie*. De même que la première, celle-ci contient, à côté du bref commentaire de Florimond, un autre commentaire, plus consistant, rédigé par van Schooten[45]. Au cours de ce commentaire, à l'occasion d'une exemplification de la méthode des normales de Descartes, ce dernier observe que la normale d'une conchoïde de Nicomède peut aussi être trouvée d'une autre manière, grâce à une application de la méthode des *maxima* et *minima* de Fermat[46].

En ayant fixé un point en dehors de la courbe et en ayant référée celle-ci à un système de coordonnées cartésiennes, van Schooten parvient à exprimer le segment variable, qui joint ce point à un point courant de la courbe, par une expression Algébrique, dans laquelle n'intervient qu'une seule des deux variables qui expriment les coordonnées auxquelles la courbe est référée, s'appuie sur la méthode des *maxima* et *minima* de Fermat pour déterminer

[45]Cf. van Schooten (1649).

[46]Cf. van Schooten (1649), 253-255. Van Schooten se réclame de la présentation de la méthode de Fermat faite par Herigon [cf. Herigon (1634-1637), *Supplementm algebræ*, prop. XXVI, vol. de suppl. 59-69]. Parmi les différents essais de Fermat, où cette méthode est présentée, aucun n'était en fait publié à l'époque : certaines apparurent, quelques années plus tard, dans les *Varia Opera Mathématica* de ce dernier [cf. Fermat (1679), 63-73], d'autres ne furent publiés qu'à la fin du siècle dernier, dans les *Œuvres de Fermat*[cf. Fermat (OTH), I, 133-179].

l'équation qui exprime les conditions pour que ce segment est un *minimum*, et conclut que les droites qui joignent le point fixé avec les points de la courbe dont cette coordonnée satisfait à ces conditions sont des normales à cette même courbe. Plutôt que de chercher la normale en un point donné de la courbe, il cherche ainsi les points de la courbe dans lesquels des droites appartenant à un certain faisceau des droites concentriques sont normales à celle-ci[47]. Il suffit pourtant de fixer le centre du faisceau en lui assignant des coordonnées indéterminées, et de prendre, dans l'équation qui exprime les conditions pour que le segment qui joint ce centre à la courbe est un *minimum*, ces coordonnées comme variables, en prenant, en revanche, les coordonnées du point courant de la courbe comme des coordonnées constantes. L'équation ainsi trouvée exprimera alors la solution du problème consistant à déterminer la normale à la courbe en un point quelconque.

Si on applique cet argument à la conchoïde de Nicomède, il est naturel de prendre le point fixe $\mathsf{\Gamma}$ sur la droite EH qui passe par le pôle O et est perpendiculaire à la règle fixe WA (fig. 4). Il est d'ailleurs commode de prendre cette même droite EH come l'axe des abscisses et de fixer son origine au point A, où celle-ci coupe la règle WA. Si on suppose de surcroît que les ordonnées tirées de cet axe lui sont orthogonales, on imagine que M soit un point générique de la conchoïde, de coordonnées $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{PM} = y$, et qu'on pose $\mathsf{AE} = \mathsf{LM} = c$, et $\mathsf{AO} = b$, on trouve l'équation

$$x^2y^2 = (x+b)^2(c^2 - x^2) \tag{3.97}$$

qui exprime justement la conchoïde ME par rapport au système de coordonnées choisi. Fixons maintenant le point $\mathsf{\Gamma}$ en posant $\mathsf{A\Gamma} = v_*$, et posons ensuite $\mathsf{\Gamma M} = s_*$. Grâce au théorème de Pythagore, on aura alors

$$s_*^2 = y^2 + (x+v_*)^2 = \frac{(x+b)^2(c^2-x^2)}{x^2} + (x+v_*)^2 \tag{3.98}$$

Or, la droite $\mathsf{\Gamma M}$ est une normale à la conchoïde si le point M est tel que son abscisse assume une valeur $x = X$ qui fait que le segment s_* est un *minimum* parmi les segments qui joignent le point fixe $\mathsf{\Gamma}$ à un point quelconque de la conchoïde. La même valeur $x = X$ rendra donc minimale aussi le carré s_*^2 de ce segment. Il s'agit de déterminer cette valeur. C'est à ce point que, dans l'argument de van Schooten, intervient la méthode de Fermat. En s'appuyant sur cette méthode, van Schooten considère un point M' proche de M, d'abscisse

[47] De cette manière van Schooten ne fait que suivre la démarche d'Apollonius qui dans le V$^{\text{ème}}$ livre des *Coniques* [cf. Apollonius (CH), (CVE) et (CT)] cherche à déterminer les segments minimaux qu'on peut tirer à une conique d'un point donné quelconque. Dans la préface à ce livre, Apollonius semble donner pour acquis que ces segments minimaux soient des normales à la conique [cf. Knorr (1986), 315 and 335, note (64)] et le démontre ensuite dans les propositions 27-29. Dans les propositions 27-28 sa preuve ne tient qu'à des propriétés spécifiques des coniques (la proposition 27 concerne une parabole et la proposition 28 une hyperbole ou une ellipse). En revanche, dans la proposition 29, il démontre la même chose d'une autre manière, moyennant un argument par l'absurde qui s'adapte à n'importe quelle courbe concave du côté de l'origine de ces segments. Supposons que le segment $\mathsf{\Gamma M}$ (fig. 3) est un des segments minimaux parmi ceux qui joignent le point fixe $\mathsf{\Gamma}$ à un point quelconque de la courbe IJ. Traçons la tangente MM' à cette courbe au point M et supposons qu'elle ne soit pas perpendiculaire au segment $\mathsf{\Gamma M}$. Il y aura alors un autre point M' sur cette tangente tel que le segment $\mathsf{\Gamma M}'$ qui joigne ce point au point $\mathsf{\Gamma}$ est perpendiculaire à cette même tangente.On aura alors un triangle rectangle $\mathsf{\Gamma MM}'$, dont le segment $\mathsf{\Gamma M}$ est l'hypoténuse. Ce segment sera alors plus grand du côtés $\mathsf{\Gamma M}'$ de ce triangle et donc de sa partie $\mathsf{\Gamma m}$, ce qui est impossible, car $\mathsf{\Gamma M}$ est un segment minimale. Il n'est pas difficile de comprendre comment cet argument puisse être généralisé.

$\mathsf{AP}' = x + e$, et cherche la valeur de x qui rend égaux les segments $\mathsf{\Gamma M}$ et $\mathsf{\Gamma M}'$, sous la condition que l'accroissement e de l'abscisse soit si petit qu'on puisse en négliger les puissances d'ordre supérieur. En posant $\mathsf{\Gamma M}' = s'_*$, on aura

$$(s'_*)^2 = \frac{(x+e+b)^2 \left[c^2 - (x-e)^2\right]}{(x+e)^2} + (x+e+v_*)^2 \tag{3.99}$$

et donc, en égalisant s_*^2 et $(s'_*)^2$:

$$(x+e)^2 \begin{bmatrix} (x+b)^2(c^2-x^2) \\ +\ (x+v_*)^2x^2 \\ -\ (x+e+v_*)^2x^2 \end{bmatrix} - x^2(x+e+b)^2\left[c^2-(x+e)^2\right] = 0 \tag{3.100}$$

De là, en simplifiant, en divisant par e, et en négligeant les puissances d'ordre supérieur de e, on tire :

$$(v_* - b)\,x^3 - c^2bx - c^2b^2 = 0 \tag{3.101}$$

Or, si on lit cette équation, comme une équation dans la variable x et qu'on suppose que v_* est constante, c'est-à-dire qu'on considère $\mathsf{\Gamma}$ comme un point fixe, alors la (seule) racine réelle de cette équation nous donne l'abscisse d'un point de la conchoïde tel que la droite qui le joint au point $\mathsf{\Gamma}$ est normale à cette courbe[48]. En revanche, si on considère v_* comme une valeur particulière de la variable v, qui (selon la notation de Descartes) exprime la somme de l'abscisse du point M et de la sous-normale correspondante, et on change dans cette équation v_* en v, en supposant, en même temps, que l'abscisse $x = \mathsf{AP}$ du point M est constante et égale à X, alors la racine

$$v = \frac{c^2b^2}{X^3} + \frac{c^2b+}{X^2} + b \tag{3.102}$$

d'une telle équation nous donne la valeur de l'abscisse AG du point G (que, dans la figure 4, on identifiera avec le point $\mathsf{\Gamma}$) par lequel passe la normale à la conchoïde au point M. De là il sera ensuite facile de déterminer la valeur de la sous-normale AG :

$$\mathsf{AG} = \mathsf{AP} + (-\mathsf{AG}) = sn._X = X - \frac{c^2b^2}{X^3} - \frac{c^2b+}{X^2} - b \tag{3.103}$$

[48]Pour tirer l'égalité (3.98), on a implicitement supposé que y est différent de zéro (car autrement le triangle $\mathsf{\Gamma PM}$ se réduit à un segment), et donc que x est différent de c. Il s'ensuit que l'équation 3.101, prise comme une équation en x, ne peut pas fournir la solution $x = c$ qui est géométriquement évidente, quel que soit v_*. À cause du passage de s_* à s_*^2, cette équation ne concerne d'ailleurs qu'une branche de la conchoïde et sa seule racines réelle

$$x = \frac{1}{6}\left[\frac{\sqrt[3]{12H}}{v_* - b} + c^2b\sqrt[3]{\frac{144}{H}}\right]$$

où

$$H = c^2\left(-9 + \sqrt{-\frac{12c^2b^3 - 81(v_* - b)}{v_* - b}}\right)(v_* - b)^2$$

ne fournit que l'abscisse d'un des deux points de la conchoïde (symétriques antre eux, relativement à l'axe AH) tels que la droite qui joint ces points au point $\mathsf{\Gamma}$ est normale à la conchoïde.

qu'on trouve aussi par la méthode de Descartes.

Bien que la présentation de van Schooten s'arrête ici, il n'est pas difficile de fournir une version générale de la méthode.

Cette méthode s'appuie d'un côté sur une propriété géométrique de la normale à une courbe quelconque que Apollonius avait déjà observée dans la normale à une conique[49], et, de l'autre côté, sur une condition qui, d'après Fermat, caractérise les *maxima* et les *minima* d'une quantité variable quelconque, dont la valeur dépend de la valeur d'une autre quantité : les *maxima* et les *minima* d'une quantité quelconque ζ, dont la valeur dépend de la valeur d'une autre quantité ξ, sont caractérisés par le fait qu'une petite, mais appréciable, variation de ξ ne produit pas de variations appréciables de ζ ; pour trouver ces *maxima* et *minimum,* lorsque la quantité ζ est exprimée par une expression Algébrique "$f(\xi)$" dans laquelle intervient la variable ξ, il suffit alors d'égaliser entre eux les expressions "$f(x+e)$" et "$f(x)$", exprimant respectivement les valeurs de ζ correspondant aux valeurs $\xi = x$ et $\xi = x+e$ de ξ (e étant une quantité petite, mais appréciable), et de tirer de l'égalité ainsi obtenue une équation dont les racines (réels) nous donnent les valeurs de ξ correspondantes aux extrêmes de ζ. La méthode de Fermat a été l'objet de plusieurs présentations et discussions de la part des historiens des mathématiques[50] et il ne sera pas nécessaire d'en ajouter une autre ici. Il suffira de montrer comment elle s'applique en général, selon la suggestion de van Schooten, à la recherche des normales à une courbe quelconque exprimée par une équation Algébrique, référée à un système de coordonnées cartésiennes donné.

On suppose que la courbe MN (fig. 2) est une courbe quelconque référée à l'axe AH d'origine A (aussi dans ce cas, le fait que la courbe en question passe par A est parfaitement inessentiel, et on peut donc supposer qu'il n'en soit pas ainsi) et que ses ordonnées RM forment avec cet axe une angle $\mathsf{H\hat{R}M} = \varrho$ donné. On pose $\mathsf{AR} = x$ et $\mathsf{RM} = y$, M étant un point courant de la courbe MN, on fixe sur l'axe AH un point Γ (que dans la figure 2 on identifiera avec le point G), et on pose $\mathsf{A}\Gamma = v_*$ et $\mathsf{M}\Gamma = s_*$. Grâce au théorème de Pythagore, on aura alors

$$s_*^2 = y^2 \sin^2 \varrho + (v_* - x - y \cos \varrho)^2 \tag{3.104}$$

où ce qu'on a indiqué ici par "$\sin \varrho$" et "$\cos \varrho$" ne sont que des rapports constants qu'on aurait bien pu indiquer d'une autre manière.

Si on reste à la version de van Schooten de la méthode de Fermat, pour trouver la valeur de x (ou de y) qui rend s_* un *minimum*, et déterminer ainsi les points de la courbe donnée tels que la droite qui joint ces points au point Γ est une normale à cette même courbe, il faut pouvoir éliminer soit x soit y de cette équation. Si l'équation de la courbe donnée ne nous permet pas de parvenir à faire ceci, l'application de cette méthode est d'emblée bloquée. De ce point de vue, cette méthode ne diffère pas de celle de Descartes, qui dépend aussi de la possibilité de parvenir à l'élimination d'une coordonnée. La possibilité de parvenir à cette élimination n'est pourtant qu'une condition nécessaire, mais non suffisante, pour l'application de cette méthode. En effet, une fois qu'on ait transformé l'expression de s_*^2 en une expression où n'apparaît qu'une seule des variables x et y, et qu'on ait égalisé cette expression à celle qui en dérive en posant soit $x + e$ à la place de x, soit $y + e$ à la place

[49] Cf. la note (47), ci-dessus.

[50] Cf. par exemple celle toute récente de M. Blay : Blay (1999), où cette méthode est comparée à d'autres à lui contemporaines.

de y, il faut encore — pour pouvoir agir par simplification, division par e, et omission des termes où e apparaît à une puissance d'ordre supérieur — réécrire l'équation obtenue sous la forme $P(e) = 0$, où $P(e)$ est un polynôme en e, ce qui, sans disposer d'un analogue du développement binomiale pour un exposant rationnel quelconque peut être fort pénible.

Il s'ensuit que, de même que celle de Descartes, dans sa version originale, la méthode proposée par van Schooten et inspirée par Fermat, n'est applicable effectivement qu'à des courbes exprimées par des équations assez simples. Elle ne pouvait donc qu'être pensée que comme un artifice qui pouvait, dans certains cas, conduire aux résultas correctes. C'est d'ailleurs ainsi que van Schooten présente cette méthode. Lorsque elle est applicable, cette dernière conduit pourtant au résultat cherché bien plus aisément que la méthode de Descartes, même si cette dernière est modifiée selon les suggestions de Florimond. On pourra le vérifier, par exemple, en appliquant la méthode de Fermat à la recherche des normales à une courbe exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes quelconques, par une équation de la forme (3.49).

3.5 Le théorème de van Heuraet sur quadratures et rectifications

Tout de suite après la lettre de Hudde du 6 février 1558, van Schooten inséra, parmi les annexes à la deuxième édition latine de la *Géométrie*, une autre lettre qui lui avait été adressée, onze mois plus tard, le 13 janvier 1659, par H. van Heuraet[51]. C'est une autre des sources fondamentales pour les futures recherches de Newton et il convient donc d'en exposer et d'en discuter le contenu.

De même que la deuxième lettre de Hudde, ainsi celle de van Heuraet est très brève et essentielle ; elle ne se compose que de l'énoncé et de la preuve d'un théorème, suivie par la présentation de deux exemples.

3.5.1 Le théorème de van Heuraet

Voici, tout d'abord, le théorème énoncé par van Heuraet : si deux courbes quelconques AML et END (fig. 5) sont rapportées à la même axe AH, et sont telles que, quel que soit le point P pris sur cette axe, la perpendiculaire PW à cette axe tirée du point P rencontre ces courbes respectivement en deux points M et N, tels que

$$\mathsf{PM} : \mathsf{MG} = K : \mathsf{PN} \tag{3.105}$$

MG étant la normale à la première de ces courbes dans le point P, et K un segment constant quelconque, alors la "surface" ABDNC délimitée par la deuxième de ces courbes est égale à un rectangle construit sur le segment K et un autre segment de longueur égale à l'arc AML pris su la première courbe, en correspondance de l'arc CND de la deuxième.

L'argument par lequel van Heuraet démontre ce théorème se fonde (implicitement) sur la méthode des indivisibles de Cavalieri et il ne fait pas usage des équations des deux courbes.

[51]Cf. van Heuraet (1659). Sur van Heuraet et son œuvre mathématique, cf. van Maanen (1984) ; un *post-script* à la lettre publiée par van Schooten, où van Heuraet présente à celui-ci les salutations de Hudde, témoigne des liens entre ces deux mathématiciens.

Rien, dans cet argument, ne nous oblige à supposer que les deux courbes sont séparément définies d'une manière particulière, par rapport au système de coordonnées constitué par l'axe AH, une origine quelconque — qu'il est fort naturel d'identifier avec le point A — et des ordonnées orthogonales telles que PM et PM. Ce système de coordonnées n'intervient que dans la caractérisation des relations que ces deux courbes ont entre elles, et n'intervient ainsi dans la définition d'une d'entre elles que si cette courbe est définie comme un lieu géométrique qui se rapporte à la donnée de l'autre. Si la courbe donnée est la courbe AML, alors une telle définition de la courbe END suppose la considération de la normale à la courbe AML dans tous ses points. De cette manière la courbe END n'est donc pas donnée comme telle ; elle est seulement définie comme une courbe qui satisfait une certaine condition, et cela pour deux raisons : d'abord parce que la définition en question est celle d'un lieu géométrique, ensuite parce que la normale MG n'est pas donnée, en général, lorsque la courbe AML est donnée. Si de cette dernière courbe on ne savait rien d'autre sinon qu'elle satisfait à son tour à une certain condition, alors la définition la courbe ANL porterait sur la présentation de trois conditions : une qui caractérise l'ordonnée PM de la courbe AML ; une autre qui caractérise sa normale MG ; une troisième qui tient à la proportion (3.105). Si, en revanche, la courbe donnée est la courbe END, alors la définition de la courbe AML se réclame d'une proportion où interviennent deux inconnues ; ce serait ainsi seulement la détermination des relations entre ces inconnues, et donc la définition d'une de celles-ci en termes de l'autre, qui rendrait cette définition viable. Si de la courbe END on ne savait rien d'autre sinon qu'elle satisfait à son tour à une certain condition, alors la définition de la courbe AML porterait encore sur la présentation de trois conditions : une qui caractérise l'ordonnée PN de la courbe AND ; une autre qui caractérise la normale MG à la courbe AML ; une autre encore qui tient à la proportion (3.105). Néanmoins, dans ce cas, il faudrait déterminer MG comme une normale à une courbe dont l'ordonnée est inconnue et n'est donnée que par supposition.

On comprend alors que le seul énoncé du théorème de van Heuraet fait un usage massif de démarches analytiques. Il reste néanmoins dans un cadre géométrique classique : si sa preuve s'appuie sur la méthode des indivisibles, le théorème reste, en tant que tel, parfaitement indépendant de cette méthode, et, de même que sa preuve, ne demande guère de recours à une Algèbre. Pour énoncer le théorème et le prouver n'est non plus nécessaire de supposer de savoir résoudre les problèmes des normales, des rectifications ou de la quadrature. C'est seulement une fois que ce théorème a été démontré qu'on peut s'en réclamer pour résoudre un de ces problèmes à partir de la supposition d'une solution déjà donnée pour les deux autres. Et c'est à ce point qu'on pourra alors faire intervenir (et que van Heuraet fait effectivement intervenir) l'Algèbre de Descartes et la méthode des normales de ce dernier. Cette intervention comporte pourtant une perte de généralité, car elle demande nécessairement que la courbe sur laquelle on veut faire porter cette méthode est exprimée par une équation Algébrique et est pourtant une courbe géométrique, alors que dans le théorème de van Heuraet et dans sa preuve, rien n'oblige à supposer que les courbes en question sont géométriques.

Ceci étant dit, venons à l'argument que van Heuraet présente en guise de preuve pour son théorème[52]. On suppose que la courbe AML est donnée et qu'on connaît sa tangente, et donc sa normale, dans tous ses points. Soit M un de ces points, et P le pied de la

[52] Cf. van Heuraet (1659), 518-519.

perpendiculaire à l'axe AH tirée de M. Soit de surcroît MF la tangente à cette courbe au point M et MG la normale correspondante. Quels que soient les points O et Q, pris sur l'axe AH respectivement des deux côtés de P, si la tangente MF coupe les perpendiculaires OU et QV à l'axe AH tirées de ces points respectivement dans les points I et T, et que IJ est à son tour perpendiculaire à OU, alors on aura la proportion

$$\mathsf{FP} : \mathsf{FM} = \mathsf{IJ} : \mathsf{IT} \tag{3.106}$$

qui, comparée avec l'autre proportion

$$\mathsf{PM} : \mathsf{MG} = \mathsf{FP} : \mathsf{FM} \tag{3.107}$$

permet de tirer la nouvelle proportion

$$\mathsf{PM} : \mathsf{MG} = \mathsf{IJ} : \mathsf{IT} \tag{3.108}$$

Cette dernière proportion, comparée à la proportion (3.105) nous conduit enfin à la proportion

$$\mathsf{IJ} : \mathsf{IT} = K : \mathsf{PN} \tag{3.109}$$

d'où il s'ensuit, selon la proposition VI.16 des *Éléments*, que le rectangle QVUO construit sur $\mathsf{OQ} = \mathsf{IJ}$ et PN est égal au rectangle construit sur IT e K :

$$R(\mathsf{OQ}, \mathsf{PN}) = R(\mathsf{IT}, K) \tag{3.110}$$

Comme les points O et Q sont deux points quelconques de l'axe AH, pris respectivement des deux côtés de P, rien n'empêche de prendre la distance OQ aussi petite que la portion IT de la tangente en M se confonde avec la portion correspondante de la courbe ALM et le rectangle QVUO se confonde avec la portion correspondante du trapézoïde BDNCA . En considérant alors la courbe AML comme la somme (infinie) de toutes les portions de ses tangentes qui se confondent avec elle, et le trapézoïde BDNCA comme la somme (infinie) de tous les rectangles construits sur des portions de sa base qui se confondent avec des portions de ce même trapézoïde, on en conclut, selon les principes de la méthode des indivisibles de Cavalieri, que le trapézoïde BDNCA est égal au rectangle construit sur K et sur un segment de longueur égale à l'arc de courbe AML, ce qu'il fallait démontrer.

Mise à part sa dernière étape, qui se justifie grâce à la méthode des indivisibles[53], cette preuve tient à un argument géométrique fort simple consistant dans la comparaison de trois proportions. La comparaison des proportions (3.106) et (3.107) permet d'abord de montrer que le rapport entre la normale et l'ordonnée d'une courbe quelconque est égal au rapport entre une portion quelconque de la tangente à cette courbe et sa projection sur l'axe (pourvu que les coordonnées soient orthogonales). Ce premier pas de la démonstration permet de remplacer par la suite le rapport $\frac{\mathsf{PM}}{\mathsf{MG}}$ entre l'ordonnée et la normale de la courbe AML par le rapport $\frac{\mathsf{IJ}}{\mathsf{IT}}$ entre la base et l'hypoténuse d'un triangle auxiliaire IJT, qui fonctionne ici comme le triangle AFK (fig. 2) dans l'argument de Florimond. Ensuite, la comparaison entre les proportions (3.108) et (3.105) permet de montrer l'égalité de ce dernier rapport avec le rapport entre K et l'ordonnée PN de la courbe END. À ce point le jeu est fait, et il suffit de se réclamer de la méthode des indivisibles pour conclure la preuve.

[53]Cf. la note (7), du chapitre 2.

Avant de conduire à la démonstration de son théorème, l'argument de van Heuraet montre ainsi que le rapport $\frac{\mathsf{PM}}{\mathsf{MG}}$ est égal à un autre rapport, le rapport $\frac{\mathsf{IJ}}{\mathsf{IT}}$; elle fait émerger ce dernier rapport comme un invariant géométrique. C'est sur cette invariante géométrique qui porte au fond le théorème.

Parmi le trois problèmes sur lesquels porte ce théorème, seulement celui des normales a une nature géométrique claire : il s'agit de déterminer une droite passant par un point donné, c'est-à-dire un autre point. La nature géométrique des problèmes des quadratures et des rectifications est de loin plus incertaine. S'il est clair en effet que ces deux problèmes demandent respectivement de déterminer un carré égal à un trapézoïde donnée, et un segment égal à un arc de courbe donné, ce qui pose problème est la définition de la relation d'égalité entre une figure curviligne et un carré, d'une part, et entre un arc de courbe et un segment d'autre part. En absence d'une définition générale de cette relation, les différentes solutions de ces problèmes, loin de se limiter à fournir une réponse à la question posée, fournissent en même temps le critère d'égalité qui justifie cette réponse. Cela est particulièrement clair pour les solutions tirées d'une application de la méthode des indivisibles, sous une de ses nombreuses versions.

De même que Wallis avait résolu le problème de la quadrature d'une certaine classe de trapézoïdes, en supposant que le rapport d'un trapézoïde à un parallélogramme construit de manière standard à partir de ce même trapézoïde est égal au rapport de deux séries numériques divergentes, dont les termes varient respectivement comme les cordes de ce trapézoïde et de ce parallélogramme, van Heuraet suppose qu'une trapézoïde est égale à la somme des rectangles infiniment petits qu'on peut confondre avec des portions parallèles de ce trapézoïde. Comme ces rectangles sont tous respectivement égaux (dans un sens qui est, en revanche, géométriquement parfaitement clair) à d'autres rectangles construits tous sur la même base (le segment K), il s'ensuit, en distribuant la somme, que le problème de la quadrature d'un trapézoïde se réduit au problème de la somme d'un nombre infini de rectangles, tous construits sur une base commune. Comme cette somme est naturellement donnée par un rectangle construit sur cette même base, il s'ensuit que le trapézoïde en question sera carré, au sens de van Heuraet, lorsqu'on aura construit un rectangle qui est égale à la somme des rectangles infiniment petits dont on peut supposer que ce trapézoïde est composé.

Il y a ainsi une différence essentielle entre les solutions de Wallis et de van Heuraet au problème de la quadrature d'un trapézoïde donné. Conformément à la solution du premier, une fois que la méthode des indivisible a permis de déterminer le rapport entre ce trapézoïde et le parallélogramme qui lui est associé, la construction du carré égal à ce trapézoïde ne pose aucune difficulté, se réduisant à la solution d'une problème standard de géométrie classique. Conformément à la solution du deuxième, une fois que la méthode des indivisibles a permis de conclure que ce trapézoïde est égale à une somme infinie de rectangles, se pose un problème nouveau, autant difficile que le premier, celui de la somme de ces rectangles. En tant que construits sur une base commune, ces rectangles se trouvent à être séparément déterminés par la détermination de leur côté restant. Ce côté est, dans chaque cas, une portion infiniment petite d'une tangente à la même courbe en un point de celle-ci qui est dans chaque cas différent, mais est censé être infiniment proche au point en lequel on a pris la tangente dont une portion infiniment petite fournit un côté du rectangle précédent. Les rectangles infiniment petits qu'il faut sommer entre eux sont donc rangés conformément à un certain ordre. Et cet ordre est donné par l'ordre de la progression infinie des points, infiniment proches l'un de l'autre, qu'on peut prendre sur la courbe donnée.

C'est bien en s'appuyant implicitement sur cet ordre que van Heuraet conclut que la somme de ces portions infiniment petites de tangentes n'est rien d'autre qu'un segment égal à l'arc de courbe en question. De cette manière, il fournit implicitement un critère d'égalité entre un arc de courbe et un segment : un arc de courbe est égal au segment qui résulte de la somme d'une infinité de portions infiniment petites de différentes tangentes, dont chacune est prise dans un point de la courbe, infiniment proche du point où est prise la tangente précédente, et ceci jusqu'à épuiser l'arc de courbe donné. Ce n'est pas un critère bien clair, mais ceci au fond n'a guère d'importance, dans la démarche de van Heuraet, car le parcours qu'on vient d'esquisser n'est pour lui que celui de l'analyse : ce parcours devra, lors de la synthèse, être renversé. Ainsi, loin de constituer la source de la solution du problème de la quadrature d'un trapézoïde donné, le problème de la rectification d'un arc de courbe donné se présente comme un problème qui est résolu lorsque le problème de la quadrature d'un trapézoïde donné est résolu.

Pour aller de la solution du premier problème à la solution du deuxième, il faut, conformément au théorème de van Heuraet, passer par la solution du problème des normales référé à la courbe qu'on veut rectifier. Si on suppose que cette courbe est donnée, il s'agit, d'abord d'en construire la normale en un point quelconque ; ceci étant fait, on exploite la proportion (3.105) pour définir un autre courbe ; si on sait carrer cette deuxième courbe, alors l'analyse nous dit qu'on sait aussi rectifier la courbe donnée. Le théorème de van Heuraet se présente alors comme un théorème qui participe d'une analyse indiquant la voie à suivre dans une synthèse qui vise la rectification d'un arc de courbe donnée. Or, bien que l'analyse n'ait aucun recours à la nouvelle géométrie cartésienne et à l'Algèbre dont elle relève, le parcours de la synthèse résulte largement facilité si on se sert de cette géométrie et de cette Algèbre. Mais, en participant de cette manière à la solution d'un problème de rectification, la géométrie cartésienne se sert à son tour du théorème de van Heuraet pour se montrer apte à la solution d'un nouveau problème. Il s'ensuit que ce théorème, tout en restant, en tan que tel, à l'écart de la géométrie cartésienne, marque une nouvelle étape dans le développement de celle-ci.

3.5.2 Les applications du théorème de van Heuraet : la géométrie cartésienne appliquée à la solution du problème de la rectification

Pour comprendre ce dernier point, supposons que la courbe AML est exprimée, par rapport à l'axe AH, à l'origine A, et à des ordonnées orthogonales à cet axe, par une équation Algébrique quelconque, $F(x, y) = 0$. Soit M un point courant de cette courbe de coordonnées $\mathsf{AM} = x$ et $\mathsf{MP} = y$. On suppose qu'on sache déterminer la normale MG relative à ce point et posons $\mathsf{MG} = n.[y]_x$[54]. Si on rapporte aussi la courbe END au même système de coordonnées, et on pose de surcroît $\mathsf{PN} = z$, on obtient, selon la proportion (3.105),

$$z = K\frac{n.[y]_x}{y} \tag{3.111}$$

[54]Cf. la note (21), ci-dessus.

Pour obtenir l'équation $G(x,z) = 0$ qui exprime la courbe END par rapport au même système de coordonnées auquel on rapport la courbe AML, il faudra alors poser

$$z - K\frac{n.[y]_x}{y} = 0 \tag{3.112}$$

et éliminer y par comparaison avec l'équation $F(x,y) = 0$ de la courbe AML. Comme le trapézoïde ABDC délimité par la courbe END s'étend du point A, d'abscisse $x = 0$, jusqu'à un pont quelconque B, auquel on pourra assigner l'abscisse $x = \xi$, et comme van Heuraet semble le penser comme une somme de rectangles infiniment petits, on pourra l'indiquer avec le symbole "$\sum_0^\xi [z]$". De même, on pourra indiquer le segment égal à l'arc AL de la courbe AML par le symbole "$\Lambda_0^\xi [y]$". L'égalité établie par le théorème de van Heuraet pourra alors s'exprimer ainsi :

$$\sum\nolimits_0^\xi [z] = \sum\nolimits_0^\xi \left[K\frac{n.[y]_x}{y}\right] = R\left(K, \Lambda_0^\xi [y]\right) \tag{3.113}$$

Si on note de surcroît par le symbole "$\Phi [\mathcal{A}]$" l'expression Algébrique qui exprime l'objet géométrique $\mathcal{A}$ et qu'on suppose que deux expressions Algébriques sont égaux si et seulement si elles expriment des objets égaux, alors de là il s'ensuit :

$$\Phi\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[K\frac{n.[y]_x}{y}\right]\right] = \Phi\left[R\left(K, \Lambda_0^\xi [y]\right)\right] \tag{3.114}$$

Si on suppose finalement que

$$\Phi [R(\alpha, \beta)] = \Phi [\alpha] \Phi [\beta] \tag{3.115}$$

quels que soient les segments α et β — c'est-à-dire que l'on suppose que le rectangle $R(\alpha, \beta)$ construit sur les segments α et β est exprimé par le produit des expressions de ces deux segments — on en tire :

$$\Phi\left[\Lambda_0^\xi [y]\right] = \frac{\Phi\left[\sum_0^\xi \left[K\frac{n.[y]_x}{y}\right]\right]}{\Phi [K]} \tag{3.116}$$

Ceci est exactement le parcours suivit par van Heuraet dans le traitement du premier de ses exemples[55]. Comme le théorème de van Heuraet ne conduit à la rectification d'un arc de courbe qu'à condition qu'on sache résoudre les problèmes des normales pour cette même courbe et celui des quadratures pour une courbe qui est liée à celle-ci par la condition exprimée par la proportion (3.105), il n'est pas surprenant que van Heuraet choisisse un exemples *ad hoc*. Il suppose que la courbe AML est exprimée, par rapport au système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'axe AH et origine A, par l'équation

$$y^2 = \frac{x^3}{a} \tag{3.117}$$

En appliquant la méthode des normales de Descartes, dans sa version originale, on a, d'après l'une ou l'autre des équations (3.2),

$$\frac{x^3}{a} = s^2 - v^2 + 2xv - x^2 \tag{3.118}$$

[55]Cf. van Heuraet (1659), 519-520.

Si on suppose que $\mathsf{AP} = X$, pour déterminer le segment MG, il s'agit de tirer de cette équation la valeur de s sous la condition que cette même équation ait une racine double $x = X$. En appliquant le théorème de Hudde, pour le choix de la progression arithmétique $\{\tau_i\}_{i=0}^3 = \{i\}_{i=0}^3$, on tire l'égalité

$$3X^3 = 2aXv - 2aX^2 \tag{3.119}$$

qui donne sur le champ

$$v = \mathsf{AG} = X + \mathsf{PG} = X + \frac{3X^2}{2a} \tag{3.120}$$

et donc

$$s = n.[y]_X = \mathsf{MG} = \sqrt{\frac{9X^4}{4a^2} + \frac{X^3}{a}} \tag{3.121}$$

Si l'on prend, pour faire simple, $K = \frac{a}{3}$, l'équation (3.112), exprimant la courbe END, sera alors la suivante

$$z = \sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{a^2}{9}} \tag{3.122}$$

Cette courbe est donc une parabole dont le sommet E est tel que $\mathsf{EA} = \frac{4}{9}a$. D'ici van Heuraet tire, sans autre justification, que la "longueur" de l'arc AML est égale à

$$\sqrt{\frac{\chi^3}{a}} - \frac{8}{27}a \tag{3.123}$$

où on aura posé $\chi = \mathsf{EB} = \mathsf{EA} + \mathsf{AB}$.

Pour obtenir ce résultat, en suivant la voie indiquée par le théorème de van Heuraet, il faut d'abord exprimer le trapézoïde ABDC par une expression Algébrique, c'est-à-dire qu'il faut déterminer l'expression Algébrique

$$\Phi\left[\sum\nolimits_0^\xi [z]\right] = \Phi\left[\sum\nolimits_0^\xi \sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{a^2}{9}}\right] \tag{3.124}$$

Van Heuraet n'explique pas comment il parvient à déterminer cette expression, mais il est clair du résultats qu'il énonce qu'il parvient, de quelque manière que ce soit, à exprimer le trapézoïde $\sum_0^\xi \sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{a^2}{9}}$ par l'expression "$\frac{a}{3}\left(\sqrt{\frac{\chi^3}{a}} - \frac{8}{27}a\right)$", car de là, conformément à l'égalité (3.116), il suit justement

$$\Phi\left[\Lambda_0^\xi [y]\right] = \frac{\Phi\left[\sum_0^\xi \left[\sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{a^2}{9}}\right]\right]}{\Phi\left[\frac{a}{3}\right]} \tag{3.125}$$

d'où van Heuraet conclut :

$$\Lambda_0^\xi [y] = \sqrt{\frac{\chi^3}{a}} - \frac{8}{27}a \tag{3.126}$$

$* \quad * \quad *$

Si on l'interprète ainsi, le résultat de van Heuraet, nous dit que l'expression Algébrique "$\sqrt{\frac{\chi^3}{a} - \frac{8}{27}a}$" exprime, dans le formalisme de l'Algèbre des segments de Descartes, le segment $\Lambda_0^{\xi}[y]$ égal à l'arc AL de la courbe AML, c'est-à-dire que ce dernier segment est le segment $\sqrt{\frac{\chi^3}{a} - \frac{8}{27}a}$. Il s'agit de comprendre et justifier ce résultat. D'abord, il s'agit de comprendre comment van Heuraet parvient à exprimer le trapézoïde $\sum_0^{\xi}\sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{a^2}{9}}$ par l'expression "$\frac{a}{3}\left(\sqrt{\frac{\chi^3}{a} - \frac{8}{27}a}\right)$". Ensuite, il s'agit de comprendre comment il passe de là à l'égalité (3.126).

Si a, χ, α et β sont des segments, alors les expressions "$\frac{a}{3}\left(\sqrt{\frac{\chi^3}{a} - \frac{8}{27}a}\right)$" et "$\alpha\beta$" expriment, dans le formalisme de l'Algèbre des segments de Descartes, d'autres segments et non pas, respectivement, un trapézoïde ou un rectangle. Donc, ou bien on suppose que van Heuraet propose, subrepticement, de passer de l'Algèbre des segments à une nouvelle Algèbre — mais alors il lui faudrait donner des règles pour ce passage et expliciter la nature de cette nouvelle Algèbre —, ou bien on admet, comme je l'ai fait ci-dessus, que l'expression d'un segment dans l'Algèbre des segments de Descartes puisse aussi exprimer une figure à deux dimensions. Si on compare la définition de la multiplication dans l'Algèbre de Descartes à la proposition VI.16 des *Éléments*, on comprend que le segment $\alpha\beta$, exprimé dans le formalisme de cette Algèbre, par l'expression "$\alpha\beta$", se comporte, par rapport à tout autre segment qu'on puisse considérer comme le produit de deux autres segments α' et β', comme le rectangle $R(\alpha, \beta)$ se comporte par rapport au rectangle $R(\alpha', \beta')$. Ce segment peut donc être pris comme une sorte de représentant de ce rectangle parmi les segments, comme une mesure de ceci donnée par un segment. Les segments se présentent alors comme des grandeurs aptes à en représenter d'autres, et cette représentation peut être pensée comme une mesure. D'après ce point de vu, l'égalité (3.115) nous dit que le rectangle $R(\alpha, \beta)$ est représenté parmi les segments par le segment $\alpha\beta$, c'est-à-dire que ce dernier segment mesure le rectangle $R(\alpha, \beta)$ dans le domaine des segments.

Le symbole "Φ" qui intervient dans l'égalité (3.115) peut alors être lu comme une sorte d'opérateur de mesure : l'écriture "$\Phi[\mathcal{A}]$", où $\mathcal{A}$ est un rectangle, indique l'expression Algébrique qui dans le formalisme de l'Algèbre des segments exprime le segment qui fournit la mesure de $\mathcal{A}$ dans le domaine des segments, et l'égalité (3.115) ne fait alors que nous dire que ce segment est le produit des côtés de ce rectangle.

Une fois que cette interprétation est établie, on pourra, pour simplicité, faire l'économie du symbole "Φ" et écrire directement

$$R(\alpha, \beta) = \alpha\beta \tag{3.127}$$

mais il faudrait alors comprendre cette égalité non pas comme une égalité propre à l'Algèbre des segments, mais comme une assignation d'une mesure, exprimée dans le formalisme de cette Algèbre, à un objet qui est, en tant que tel, étranger à cette même Algèbre. Cette égalité est donc une égalité d'un type nouveau, elle est, par sa nature intrinsèque, différente de toute égalité qu'on a considéré jusqu'ici. Si on voulait éviter d'employer le symbole "=" pour indiquer une relation de cette nature entre une grandeur géométrique outre qu'un segment et un segment, c'est-à-dire qu'on voulait éviter d'employer ce symbole pour indiquer une relation qui est essentiellement distincte d'une égalité, au sens courant de ce terme, il faudrait plutôt écrire :

$$s\,[R(\alpha,\beta)] = \alpha\beta \tag{3.128}$$

où le symbole "$s\,[R(\alpha,\beta)]$" indique le segment qui représente le rectangle $R(\alpha,\beta)$ parmi les segments, ou, si on veut s'exprimer différemment, le segment qui mesure ce rectangle dans le domaine des segments. Pour des raisons de clarté je ne vais pas employer par la suite des égalités *suis generis* telle que l'égalité (3.127), en écrivant à la place des égalités telle que l'égalité (3.128).

On peut généraliser cette interprétation à toute sorte d'objet géométrique qu'on peut traiter comme une grandeur : l'écriture "$s\,[\mathcal{A}]$", où $\mathcal{A}$ est une grandeur géométrique quelconque indique le segment qui fournit la mesure de $\mathcal{A}$ dans le domaine des segments. Il s'ensuit que si a est un segment, alors l'égalité $s\,[\mathcal{A}] = a$ nous dit que le segment a mesure la grandeur $\mathcal{A}$ dans le domaine des segments ; donc l'expression qui exprime le segment a dans le formalisme de l'Algèbre des segments exprime ainsi, dans ce même formalisme — mais d'une manière pour ainsi dire indirecte —, la grandeur $\mathcal{A}$.

Dire que le trapézoïde $\sum_0^\xi \sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{a^2}{9}}$ est exprimé par l'expression "$\frac{a}{3}\left(\sqrt{\frac{\chi^3}{a}} - \frac{8}{27}a\right)$" ne revient alors qu'à établir l'égalité :

$$s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{a^2}{9}}\right]\right] = \frac{a}{3}\left(\sqrt{\frac{\chi^3}{a}} - \frac{8}{27}a\right) \tag{3.129}$$

L'égalité (3.125) revient alors à la suivante

$$\Phi\left[\Lambda_0^\xi\,[y]\right] = \frac{\frac{a}{3}\left(\sqrt{\frac{\chi^3}{a}} - \frac{8}{27}a\right)}{\Phi\left[\frac{a}{3}\right]} \tag{3.130}$$

Et comme tout segment ne peut être mesuré dans le domaine des segments que par soi même, de là l'égalité (3.126) suit sans aucune difficulté.

Pour justifier cette dernière égalité, il n'y alors qu'à établir l'égalité (3.129). Il s'agit de comprendre comment van Heuraet y soit parvenu.

Pour travailler de manière plus aisée sur la courbe END, il convient déplacer l'origine de l'axe de l'abscisse et supposer qu'elle coïncide avec le point E. Comme on a montré que $\mathsf{EA} = \frac{4}{9}a$, il suffira d'opérer la substitution $x \to \varkappa - \frac{4}{9}a$ dans l'équation (3.122). On obtiendra ainsi la nouvelle équation

$$z = \left(\frac{1}{4}a\varkappa\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.131}$$

qui exprime cette courbe par rapport à l'abscisse $\varkappa$, prise sur l'axe AH à partir de l'origine E et à l'ordonnée z, orthogonale à cette abscisse. Cette équation est clairement celle d'une courbe (une parabole) qui appartient à la classe des courbes étudiées par Wallis dans la première partie de l'*Arithmetica infinitorum*[56]. Or, conformément aux résultats de ce

[56]Cf. la section 2.1.

dernier, quel que soit le point B pris sur l'axe AH, on aura

$$\frac{\mathsf{EAC}}{R(\mathsf{EA},\mathsf{AC})} = \frac{\mathsf{EBD}}{R(\mathsf{EB},\mathsf{BD})} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} \tag{3.132}$$

ou bien :

$$\begin{aligned} \mathsf{EAC} &= \frac{2}{3}R(\mathsf{EA},\mathsf{AC}) \\ \mathsf{EBD} &= \frac{2}{3}R(\mathsf{EB},\mathsf{BD}) \end{aligned} \tag{3.133}$$

EAC et EBD étant évidemment les triangles curvilignes délimités par les portions EC et ED de la courbe END.

Ces égalités (3.133) nous disent que les triangles curvilignes EAC et EBD sont respectivement égaux à deux rectangles dont un est deux tiers de $R(\mathsf{EA},\mathsf{AC})$ et l'autre est deux tiers de $R(\mathsf{EB},\mathsf{BD})$. Leur différence $\mathsf{EBD}-\mathsf{EAC}$, c'est à dire le trapézoïde ACDB, sera donc égale à un rectangle qui est à son tour égal à la différence entre un rectangle qui est deux tiers de $R(\mathsf{EB},\mathsf{BD})$ et un rectangle qui est deux tiers de $R(\mathsf{EA},\mathsf{AC})$. Si on suppose que les égalités géométriques sont conservées en passant aux mesures, et que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux grandeurs quelconques et p et q deux nombres quelconques, alors

$$s\left[p\mathcal{A} \pm q\mathcal{B}\right] = p\alpha \pm q\beta \tag{3.134}$$

on aura ainsi :

$$s\left[\mathsf{ACDB}\right] = \frac{2}{3}\left[s\left[R(\mathsf{EB},\mathsf{BD})\right] - s\left[R(\mathsf{EA},\mathsf{AC})\right]\right] \tag{3.135}$$

Mais, comme $\mathsf{EA} = \frac{4}{9}a$ et $\mathsf{EB} = \xi + \frac{4}{9}a = \chi$, on aura aussi

$$\begin{aligned} \mathsf{AC} &= \left[\frac{1}{4}a\left(\frac{4}{9}a\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}a \\ \mathsf{BD} &= \left(\frac{1}{4}a\chi\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.136}$$

Et donc, conformément à l'égalité (3.128),

$$\begin{aligned} s\left[R(\mathsf{EA},\mathsf{AC})\right] &= \frac{4}{27}a^2 \\ s\left[R(\mathsf{EB},\mathsf{BD})\right] &= \sqrt{\frac{1}{4}a\chi^3} \end{aligned} \tag{3.137}$$

et de là, selon l'égalité (3.135) :

$$s\left[\mathsf{ACDB}\right] = \frac{2}{3}\left[\sqrt{\frac{1}{4}a\chi^3} - \frac{4}{27}a^2\right] = \frac{1}{3}\sqrt{a\chi^3} - \frac{8}{81}a^2 \tag{3.138}$$

qui est équivalente à l'égalité (3.129).

Dans l'*Arithmetica infinitorum*, Wallis ne cherche que des rapports numériques entre trapézoïdes et parallélogrammes, et il écrit fort rarement des égalités telles que les égalités

(3.133)[57]. Pourtant, le passage des égalités (3.132) aux égalités (3.133) ne comporte pas de difficultés dans le contexte géométrique qui est le sienne. En revanche, Wallis n'accomplie pas le pas qui conduit d'égalités telles que ces dernières à des égalités telles que

$$\begin{aligned} s\,[\mathsf{EAC}] &= \tfrac{2}{3}\,(\mathsf{EA})\,(\mathsf{AC}) \\ s\,[\mathsf{EBD}] &= \tfrac{2}{3}\,(\mathsf{EA})\,(\mathsf{AC}) \end{aligned} \tag{3.139}$$

La démarche que van Heuraet n'explicite pas dans sa lettre, qui conduit de l'équation (3.122) à l'égalité (3.126), comporte ainsi une interprétation fort novatrice des résultas de Wallis. Van Heuraet était probablement conscient de cette nouveauté et probablement il était aussi loin de disposer d'une justification qu'il aurait pu tenir pour rigoureuse pour sa démarche. On comprend alors qu'il n'ait pas explicité cette démarche. Qu'il ait ou pas lu la lettre de van Heuraet, avant sa lecture de l'*Arithmetica infinitorum*, il est un fait que Newton interprétera les résultats de Wallis de la même manière.

* * *

Le deuxième exemple considéré par van Heuraet[58] confirme, en négatif, l'interprétation que je viens de donner pour le premier. Dans ce cas, la courbe AML est identifiée avec une parabole de diamètre AC et *latus rectus* a, ce qui donne l'équation $ay = x^2$, et donc la sous-normale $sn._x = \frac{2}{a^2}x^3$, d'où, en posant $K = a$, on tire l'équation

$$z = \sqrt{4x^2 + a^2} \tag{3.140}$$

pour la courbe END. La courbe à carrer est donc une hyperbole, c'est-à-dire une courbe que van Heuraet ne sait pas carrer. Il se limite donc à observer que la parabole ne peut être rectifiée qu'à condition de savoir carrer l'hyperbole, ce qui, en passant, sonne comme une réfutation de la conclusion de Wallis, d'après laquelle le trapézoïde délimité par une hyperbole a un rapport infini avec le parallélogramme inscrit[59].

3.5.3 Une adaptation possible du théorème de van Heuraet

Comme on l'a déjà observé, la réduction accomplie par van Heuraet du problème des rectifications aux problèmes des normales et des quadratures ne dépende d'aucune manière de la méthode (géométrique ou algorithmique) par laquelle on envisage de résoudre ces deux derniers problèmes. Cette observation nous aide a comprendre que l'argument de van Heuraet en suggère un autre — qui est lui aussi indépendant de toute méthode qu'on pourrait envisager pour résoudre les problèmes des normales et des quadratures — et qui conduit à un nouveau théorème, qui n'est en fait qu'una version adaptée du théorème précédent. La suggestion est d'ailleurs si ouverte qu'on a du mal a penser que ce nouveau théorème n'ait pas été saisi par le même van Heureat et par tout lecteur averti de sa lettre.

[57] Cf. la note (24) du chapitre 2.

[58] Cf. van Heuraet (1659), 520. Avant de présenter cet exemple, van Heuraet observe qu'avec le procédé par lequel il a rectifié la courbe exprimée par l'équation $y^2 = \frac{x^3}{a}$, permet aussi de rectifier toute courbe exprimée par une équation de la forme $y^{2n} = \frac{x^{2n+1}}{a}$ (ou n est un nombre entier positif).

[59] Cf. la section 2.1, en particulier pp. 88-90.

Ce qui est certain est que Newton sut lire ce théorème dans cette lettre et s'en servit ensuite comme d'un outil fondamental[60].

Si au lieu de considérer le rapport entre l'ordonnée PM et la normale MG de la courbe AML, on considère le rapport entre l'ordonnée PM et la sous-normale PG, ou celui, égal à celui-ci, entre la sous-tangente FM et l'ordonnée PM de cette même courbe, et qu'on fait l'hypothèse que l'ordonné PN de la courbe END satisfait la proportion

$$\mathsf{PM} : \mathsf{PG} = \mathsf{FP} : \mathsf{PM} = K : \mathsf{PN} \tag{3.141}$$

qui se transforme aisément dans la proportion

$$\mathsf{IJ} : \mathsf{JT} = K : \mathsf{PN} \tag{3.142}$$

on prouve sans aucune difficulté, en répétant pas à pas l'argument de van Heuraet, que le trapézoïde ABDC est égale à un rectangle construit sur K et un segment égal à la somme de tous les segments tels que JT, relatifs à tous les points infiniment proches qu'on peut prendre sur la courbe AML.

Si la portion de cette courbe qu'on considère, et qui correspond aux limites du trapézoïde ABDC, commence où cette courbe coupe l'axe des abscisses et que cette courbe est monotone[61] ce segment n'est rien d'autre que l'ordonné de cette même courbe AML, évaluée au point qui constitue l'extrémité de cette portion. Il s'ensuite (en restant à la figure 5) que

$$\mathsf{ABDC} = R(K, \mathsf{BL}) \tag{3.143}$$

et, donc, en raisonnant comme ci-dessus,

$$s\,[\mathsf{ABDC}] = s\left[\sum\nolimits_0^{\xi}[z]\right] = K\,(y_\xi) \tag{3.144}$$

où y_ξ est la valeur de l'ordonnée y de la courbe AML au point d'abscisse $x = \xi$.

En revanche, si on considère une portion de la courbe AML qui commence en un point quelconque de celle-ci, par exemple d'abscisse $x = \mathsf{AX} = \kappa$, et que cette portion est monotone, alors (que cette courbe coupe ou pas l'axe des abscisse dans ce point) la somme de tous les segments tel que JT est égale à la différence entre la plus grande et la plus petite parmi les valeurs y_ξ et y_κ que l'ordonnée y prend dans les points d'abscisse $x = \xi$ et $x = \kappa$. Le rectangle construit sur cette différence et sur le segment K est donc égal au trapézoïde XBDZ. L'égalité (3.144) se change alors dans l'égalité plus générale :

$$s\,[\mathsf{XBDZ}] = \left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = K\,|y_\xi - y_\kappa| \tag{3.145}$$

(où le symbole de valeur absolue indique que la différence en question doit être prise avec le signe positif).

[60] Cf. la section 5.1.2.

[61] La condition de monotonie de la portion considérée de la courbe AML garantie que le rapport entre PM et PG, et donc l'ordonné PN, ne changent pas de signe, c'est-à-dire que la portion correspondante de la courbe END reste constamment d'un côté de l'axe, de sorte que le trapézoïde correspondant est bien défini géométriquement.

Si l'argument originale de van Heuraet montre ainsi la réductibilité du problème des rectifications aux problèmes des normales et des quadratures, ce nouveau argument, qui en dérive par analogie, montre la relation entre le problème des quadrature et celui des normales[62]. En effet, conformément aux proportions (3.141), la courbe END répond aux équations équivalentes

$$z = K\frac{sn.[y]_x}{y} \qquad ; \qquad z = K\frac{y}{stg.[y]_x} \tag{3.146}$$

où $sn.[y]_x$ et $stg.[y]_x$ sont respectivement la sous-normale et la sous-tangente de la courbe AML, prises sur l'axe des abscisses, au point de coordonnées cartésiennes orthogonales génériques x et y.

La considération du rapport entre la sous-tangente et l'ordonnée permet de surcroît d'appliquer l'argument de van Heuraet à des courbes référées à n'importe quel système de coordonnées cartésiennes. En effet, si on supposait que les ordonnées $\mathsf{RM} = y$ et $\mathsf{RN} = z$ des courbes AML et END relatives à l'abscisse $\mathsf{AR} = x$ (fig. 6) forment avec l'axe AH un angle quelconque $\mathsf{H\hat{R}M} = \varrho$, et que la deuxième de ces ordonnées est liée à la première par la proportion

$$\mathsf{FR} : \mathsf{RM} = K : \mathsf{RN} \tag{3.147}$$

alors on pourrait tirer, comme ci-dessus, la proportion :

$$\mathsf{IJ} : \mathsf{JT} = K : \mathsf{RN} \tag{3.148}$$

Comme l'angle ϱ n'est pas nécessairement un angle droit, de là on tirerait l'égalité

$$R(\mathsf{IJ}, \mathsf{RN}) = \frac{1}{\sin\varrho} R(\mathsf{SJ}, \mathsf{PN}) = \frac{1}{\sin\varrho} (\mathsf{OQVU}) = R(K, \mathsf{JT}) \tag{3.149}$$

où SJ est la hauteur du parallélogramme OQVU. En appliquant la méthode des indivisibles, on en conclurait alors que

$$s\,[\mathsf{XBDZ}] = s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = K\,(\sin\varrho)\,|y_{\xi} - y_{\kappa}| \tag{3.150}$$

où la courbe END répond à la première des équations (3.146), et le symbole "sin ϱ" indique, comme ci-dessus, un rapport constant qu'on aurait pu indiquer de n'importe quelle autre manière.

[62]Le fait que l'argument qui conduit à l'égalité (3.145) est indépendant de la méthode (géométrique ou algorithmique) par laquelle on envisage de résoudre les problèmes des normales montre que la relation, entre ce problème et celui des quadratures, ne tient qu'à la nature géométrique de ces problèmes et non pas aux outils Algébriques ou arithmétiques qu'on emploie pour exprimer cette nature. Cette observation est suffisante pour indiquer que cette relation n'a rien à voir avec le théorème fondamental du *calcul*, qui concerne plutôt les liens entre la dérivée d'une fonction et son intégrale défini, pourvu que ces objets soient définis de deux manières indépendantes : par exemple, la dérivée d'une fonction comme la limite du rapport incrémentale et son intégrale défini comme la limite de la série de Cauchy-Riemann associée à cette fonction. En qualifiant ainsi le théorème de van Heuraet dans sa forme adaptée, ou n'importe quel autre théorème analogue (tel que celui démontré par Barrow par le biais d'un argument similaire [cf. la section 5.1.2, en particulier la note (29)], de version primordiale du théorème fondamentale du *calcul*, on commet un contre-sens.

Comme l'égalité (3.150) ne diffère de l'égalité (3.145) que par la présence d'un facteur constant, il est clair que le passage à des coordonnées cartésiennes quelconques ne modifie en rien la nature de la relation entre le problème des tangentes et le problème des quadratures qui est indiquée par la version adaptés du théorème de van Heuraet. La manière dans laquelle cette relation peut être exploitée pour résoudre un de ces problèmes, à partir d'une solution préalable de l'autre, sera discutée lorsqu'il sera question des recherches de Newton sur cette matière. Ce sera l'objets des chapitres (5) et (6).

Troisième partie

Newton lisant et devançant ses sources

Les premières lectures mathématiques de Newton[63] furent accompagnées par des notes, qui sont, du moins en partie, conservées. D. T. Whiteside les a publiées dans le premier volume des *Mathematical Papers of Isaac Newton*. Il les a partagées en sept groupes différents.

Le premier de ces groupes[64] est composé par des notes d'origines diverses : d'abord, les notes contenues dans un cahier, conservé aujourd'hui au *Fitzwilliam museum* de Cambridge[65], consacrées à quelques théorèmes sur les triangles rectangles, à différentes méthodes pour construire les coniques, et à certaines propriétés de celles-ci ; ensuite, une courte note généralisant un résultat du II$^{\text{ème}}$ livre des *Exercitationes* de van Schooten, concernant la construction d'une suite d'angles en proportion continue[66] ; plus loin, les remarques accompagnant la lecture du V$^{\text{ème}}$ livre des mêmes *Exercitationes*, consacré à des questions de computation numérique[67] ; enfin, des remarques accompagnant la lecture du *De ratiociniis in ludo aleæ* de Huygens[68].

Le deuxième groupe[69], plus homogène, contient les notes par lesquelles Newton a accompagné ses lectures de l'*Opera Mathematica* de Viète et de la *Clavis* de Oughtred.

Le troisième groupe[70], également homogène, est composé par les notes accompagnant la lecture de l'*Arithmetica infinitorum* de Wallis.

Le quatrième groupe[71] relève des plusieurs essais d'application de méthodes et d'algorithmes propres à la géométrie cartésienne et à son Algèbre.

Viennent enfin trois autres groupes : les notes du cinquième et du septième groupe[72] sont toutes concernées par la méthode des normales et des tangentes des Descartes ; celles du sixième[73] ont des origines diverses, mais elles portent toutes sur des applications particulières des méthodes et des résultats acquis lors de la lecture de l'*Arithmetica infinitorum* et de la réflexion sur la méthode des normales et des tangentes des Descartes.

[63] Cf. l'introduction à la partie II, ci-dessus.
[64] Cf. Newton (MP), I, **1**, 1, 25-62 ("Annotations from Oughtred, Descartes, Schooten and Huygens").
[65] Cf. Newton (MP), I, **1**, 1, § 1, 25-45.
[66] Cf. Newton (MP), I, **1**, 1, § 2, 46.
[67] Cf. Newton (MP), I, **1**, 1, § 3, 47-57.
[68] Cf. Newton (MP), I, **1**, 1, § 4, 58-62.
[69] Cf. Newton (MP), I, **1**, 2, 63-88 ("Annotations from Viète and Oughtred").
[70] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, 89-142 ("Annotations from Wallis").
[71] Cf. Newton (MP), I, **2**, 1, 155-212 ("Early notes on Analytical Geometry").
[72] Cf. respectivement Newton (MP), I, **2**, 2, 213-233 ("Work on the Cartesian Subnormal"), et I, **2**, 4, 245-297 ("Normals, Curvature and the Resolution of the General Problem").
[73] Cf. Newton (MP), I, **2**, 3, 234-244 ("Miscellaneous Problems in Analytical Geometry and Calculus")

* * *

Parmi les notes du premier groupe, seulement celles contenues dans le cahier conservé au *Fitzwilliam museum* méritent quelques attentions. Elles s'attachent d'abord à deux propositions des *Éléments*[74] : la proposition I.47, énonçant le théorème de Pythagore, et la proposition VI.8, énonçant la similarité entre un triangle rectangle quelconque et les deux triangles dans lesquels celui-ci est partagé lorsqu'on trace la hauteur relative à l'hypoténuse. Les énoncés annotés par Newton ne sont pourtant pas ceux d'Euclide, et la différence est dans les deux cas essentielle. Là où Euclide parle de carrés construits sur les côtés d'un triangle rectangle, Newton n'hésite pas à parler de segments, de sorte que le premier de ces théorèmes n'énonce pas, dans la version de Newton, l'égalité d'un carré à la somme de deux autres, mais une relation entre les trois côtés d'un triangle rectangle : $bq + cq = hq$, ce qui, dans la notation de Oughtred, correspond à l'égalité $b^2 + c^2 = h^2$ (b, c et h étant respectivement les côtés et l'hypoténuse d'un triangle rectangle)[75]. De plus, là où Euclide parle de similarité entre triangles et, par l'intermédiaire implicite de la définition VI.1, de proportion, Newton parle d'égalité, de sorte que le deuxième théorème énonce, dans la version de Newton, l'égalité entre l'hauteur d'un triangle rectangle relative à l'hypoténuse et le quotient du produit des côtés de ce triangle et de cette hypoténuse : $\frac{b \times c}{h} = p$ (où b, c et h sont, comme ci-dessus, respectivement les côtés et l'hypoténuse d'un triangle rectangle, et p est la hauteur de ce même triangle rectangle relative à l'hypoténuse).

Les deux théorèmes d'Euclide sont devenus donc, dans la lecture de Newton, deux égalités propres à l'Algèbre des segments de Descartes : cela témoigne du fait que la formation mathématique de ce dernier s'accomplit dès le début à l'intérieur du cadre cartésien.

Interprétés comme l'on vient de voir, ces deux théorèmes s'appliquent de manière directe à la démonstration des certaines propriétés des coniques, concernant les relations qui s'établissent entre des segments déterminés par celles-ci. Ce n'est donc pas surprenant que, après avoir annoté des simples conséquences de ces théorèmes[76], Newton note dans son cahier des procédures constructives et des propriétés des coniques[77]. Il s'agit d'une sorte de *memorandum* sur les coniques, que le jeune étudiant avait extrait de différentes lectures : celle du IV$^{\text{ème}}$ livre des *Execitationum Mathematicarum* de van Schooten, celle du commentaire du même van Schooten à la *Géométrie* de Descartes[78], celle des *Elementa Curvarum* de de Witt[79], et celles de la *Dioptrique* et de la *Géométrie* de Descartes lui-même.

Comme celles du premier, aussi les notes du deuxième et du quatrième groupes ne témoignent que d'un effort d'apprentissage de certaines techniques mathématiques.

Loin d'être attirée par le programme de réforme de la méthode de l'analyse et de la synthèse proposée par Viète dans l'*Isagoge* et dans les *Zeteticorum libri*, l'attention de Newton est d'abord attirée par l'arithmétique et la géométrie de celui-ci. Les notes du deuxième groupe portent en effet d'abord[80] sur le *De numerosa potestatum*[81], et en particulier sur les

[74]Cf. Newton (MP), I, **1**, 1, § 1, [1], I et II, 25-26.

[75]Cf. Oughtred (1631). Pour le passage du théorème de Pythagore, dans le version d'Euclide, à une telle relation entre les trois côtés d'un triangle rectangle, cf. le chapitre 3 ci-dessus, pp. 112-112

[76]Cf. *ibid.* Newton (MP), I, **1**, 1, § 1, [1], III-VIII, et [2], th. 1-3, 26-28.

[77]Cf. *ibid.* [2], th. 4 et [3]-[8], 28-45.

[78]Cf. Descartes (GvS, II), vol. I, 143-344.

[79]Cf. Descartes (GvS, II), vol. II, 153-340.

[80]Cf. Newton (MP), I, **2**, § 1, 62-71.

[81]Cf. Viète (1600), réédité *in* Viète (OPvS), 163-228. Cf. aussi Oughtred (1631), II$^{\text{ème}}$ et III$^{\text{ème}}$ éditions,

problèmes de l'extraction des racines d'un nombre et de la solution d'une équation cubique à coefficients numériques, et ensuite[82] sur des théorèmes à propos du cercle et de différentes figures qu'on peut y inscrire, tirés du *Suppelementum Geometriæ*[83], du *Pseudo-Mesolabum*[84], des *Ad Angulares Sectiones Theoremata*[85] et des *Variorum de Rebus mathematicis Responsorum*[86].

En revanche, les notes du quatrième groupe montrent Newton en train de se familiariser successivement avec les techniques pour la transformation des coordonnées[87] et la recherches des axes, des diamètres, des sommets, des centres et des asymptotes d'une courbe exprimée par une certaine équation[88].

* * *

Bien qu'elles ne soient pas dénuées de remarques originales, les notes de ces trois groupes, étalées pour l'essentiel entre le début et l'automne 1664, doivent leur intérêt principal au fait d'être une trace de la très courte et très limitée formation mathématique de Newton.

Le jugement doit être en revanche très différent pour les notes des autres quatre groupes. Si elles témoignent fort clairement d'une lecture attentive de l'*Arithmetica Infinitorum* et de la deuxième édition latine de la *Géométrie* — et en particulier des parties de cet œuvre composite concernant la méthode des normales et des tangents —, elles témoignent aussi d'un effort d'élaboration originale qui conduit rapidement Newton à devancer ses maîtres. On peut même distinguer, parmi ces notes, certaines où les efforts de Newton visent à acquérir, à interpréter de manière originale, et à développer les méthodes étudiées, et d'autres où ses efforts visent désormais une élaboration autonome, seulement suggérée par les lectures précédentes.

C'est à ces notes que seront consacrés les deux chapitres suivants.

---

où on retrouve un résumé de l'œuvre de Viète [cf. Newton (MP), I, 2, note (1), 63].

[82] Cf. Newton (MP), I, **2**, § 2, 72-88.

[83] Cf. Newton (MP), I, **2**, § 2, [1] 72-75 et Viète (1593*a*), réédité *in* Viète (OPvS), 240-257.

[84] Cf. Newton (MP), I, **2**, § 2, [2] 76-77 et Viète (1595), réédité *in* Viète (OPvS), 258-274.

[85] Cf. Newton (MP), I, **2**, § 2, [3] 78-84 et Viète (1615*b*), réédité *in* Viète (OPvS), 287-304.

[86] Cf. Newton (MP), I, **2**, § 2, [4] 84-88 et Viète (1593*b*), réédité *in* Viète (OPvS), 347-435.

[87] Cf. Newton (MP), I, **2**, 1, § 1-2, 155-162.

[88] Cf. Newton (MP), I, **2**, 1, § 3-7, 163-212.

Chapitre 4

Newton et Wallis : quadratures et développements en séries entières (début 1664 - été 1665)

Newton[1] ne lut d'un seul trait l'*Arithmetica infinitorum* : la section **1**, 3 du premier volume des *Mathematical Papers of Isaac Newton* contient — sous le titre d' "Annotations from Wallis" — cinq fragments. Les trois premiers consistent pour l'essentiel de comptes rendus de cette lecture et remontent à deux périodes différentes[2] : le début de 1664, pour le premier et le deuxième[3] ; le début de 1665, pour le troisième[4]. Le quatrième et le cinquième fragments[5] appartiennent à une période encore successive. Whiteside propose de les dater de l'automne 1665 (bien qu'il fasse remarquer qu'il s'agit d'une date limite, la plus tardive parmi celles qu'on peut raisonnablement leur attribuer[6]). Je pense qu'il est plus probable que ces fragments remontent à une période comprise entre le printemps et l'été de la même année. Parmi ceux-ci, seulement le quatrième mérite une attention particulière[7]. Il est composé de deux parties : d'abord Newton y reformule les arguments et les résultats

[1]Le présent chapitre est une version ajournée des sections 4 et 5 (176-218) de Panza (1995*c*).

[2]Cf. Westfall (1980), 131 et Hall (1992), 19.

[3]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, respectivement, § 1, 89-90 et § 2, 91-95. Au début du deuxième fragment Newton e écrit une date : "$166\frac{3}{4}$ January". Cette annotation est pourtant séparée du texte par un espace blanc et pourrait ne pas indiquer la date effective de rédaction de la note qui suit [cf. *ibid.*, § 1, note (1), 91]). Au XVII[ème] siècle, l'Angleterre n'avait pas encore adopté le calendrier grégorien : l'année commençait officiellement le 25 mars, et les dates étaient décalées de dix jours par rapport au calendrier en usage dans le continent. Le 1[er] janvier 1663 en Angleterre était ainsi le 11 janvier 1664 sur le continent. La notation "$166\frac{3}{4}$ January", indique le mois de janvier de 1663 selon le calendrier Anglais, c'est-à-dire un mois à cheval entre le mois de janvier et le mois de février 1664 selon le calendrier en usage sur le continent. Lorsque j'indiquerai des années, par la suite, je le ferai selon le calendrier grégorien ; quant aux jours, je n'en ferai référence que lorsque Newton les avait lui-même indiqués dans ses notes, et je me tiendrai alors à la convention suivie par Newton.

[4]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3,§ 3, 96-121.

[5]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, respectivement, § 4, 122-134, et § 5, 134-142.

[6]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, respectivement, § 4, note (1), 122-123.

[7]Le cinquième fragment ne contient que des calculs relatifs à l'approximation numérique de la série logarithmique.

auxquels il était parvenu à la suite de sa deuxième lecture de l'*Arithmetica infinitorum* ; puis, il essaie de rédiger un véritable petit traité où ces arguments et ces résultats sont présentés dans un cadre nouveau et organique, comme étant les éléments d'une nouvelle théorie des quadratures[8].

4.1 Au début de 1664, la première lecture de l'*Arithmetica infinitorum* : la quadrature de la parabole et la recherche d'une quadrature de l'hyperbole

Le premier de ces cinq fragments ne contient que quelques remarques très succinctes, extraites d'un cahier de poche, au sujet d'indivisibles et d'angles de contact, probablement suggérées par les premières propositions de l'*Arithmetica infinitorum* et par le traité *De Angulo Contactus* — un court traité que Wallis avait publiée, en même temps que l'*Arithmetica infinitorum*, dans son *Operum Mathematicorum Pars Altera*[9].

Les deux fragments suivants sont en revanche bien plus intéressants. Tout en confirmant, pour l'essentiel, le compte-rendu que Newton a fait de sa découverte des développements du binôme et du logarithme, tel qu'on le trouve dans la lettre célèbre du 24 octobre 1676 adressée à Leibniz par l'intermédiaire de H. Oldenburg[10], ces fragments jettent une lumière nouvelle sur le parcours qui conduit Newton à ces résultats.

À en juger le deuxième fragment, Newton ne s'intéressa d'abord qu'à la première partie de l'*Arithmetica infinitorum*, et, en particulier, à la partie concernant la quadrature de la parabole et de hyperbole. Son but n'est certes pas de répéter à la lettre les arguments de Wallis ; il vise à tirer de ces arguments des suggestions pour résoudre d'une manière nouvelle deux problèmes qu'il énonce ainsi : "to square the Parabole" ; "to square the Hyperbola"[11]. La solution qu'il avance pour ces problèmes découle de deux lemmes qui reposent sur des principes que Wallis avait énoncé dans sont traité *De Sectionibus Conicis,* publié lui aussi

[8]Newton ne rédige que les quatre premières propositions de ce traité. Celles-ci tiennent toutes, d'une manière ou d'une autre, à une nouvelle interprétation des méthodes de Wallis. Ceci fait penser que cette première esquisse d'un traité sur les quadratures précède (ne serait-ce que de quelques jours) une autre esquisse d'un traité qui porte sur le même argument, et que je discuterai dans la section 6.1. Entre la troisième et la quatrième proposition de la première esquisse, on trouve cependant les énoncés de deux autres propositions, ensuite effacées, qui correspondent à la troisième et à la quatrième propositions contenues dans la deuxième esquisse. Il est ainsi possible qu'au moins une partie de la première esquisse ait été écrite après que Newton ait rédigé la deuxième. Quoi qu'il en soit, j'ai décidé de discuter la première esquisse dans le présent chapitre en raison de ses liens avec les méthodes de Wallis, et la deuxième dans le chapitre 6 en raison de ses liens avec le théorème de van Heuraet.

[9]Cf. Wallis (1656*c*). Sur ce traité de Wallis, dans le contexte de querelle à propos de la nature de l'angle de contact, cf. Maieru (1991) et Loget (2000), quatri'eme partie, ch. 2, sect. 3

[10]Pour des différentes éditions de cette lettre, cf. Collins (1712), 67-86, Leibniz (GM), I, 122-147 et Newton (C), II, 110-161. Pour l'indication d'autres comptes-rendus similaires, cf., en revanche, Whiteside (1961), 175-176. La seule différence significative entre la reconstruction de Newton et celle que ces fragments autorisent tient au fait que dans les notes de 1664-1665, Newton ne remarque pas explicitement que la série qui exprime la quadrature de l'hyperbole donne aussi le développement du logarithme. Ceci sera par contre remarqué, de manière encore assez obscure, par Mercator trois ans plus tard : cf. Mercator (1668), prop. XIX, 34, et, pour un commentaire, Hofmann (1638), 459-464, et Naux (1966-1971), II, 65-66.

[11]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 2, respectivement, 93 et 94-95.

dans l'*Operum Mathematicorum Pars Altera*[12]. Newton énonce ces lemmes avant d'aborder ces problèmes[13]. Leur contenu deviendra plus clair si nous les étudions à la lueur de leur application à la solution de ces dernières. C'est pourquoi on reviendra sur ces lemmes plus tard.

Newton ne considère, en réalité, que deux paraboles et une hyperbole particulières, exprimées par des équations Algébriques référées à un certain système de coordonnées cartésiennes. Ces courbes étant des coniques, le passage de telles équations à des constructions par règle, compas et réitération[14] n'aurait été nullement problématique. Le passage de ces équations à un système de proportions caractérisant les courbes en question à la manière de Wallis aurait été encore plus facile. Néanmoins, le fait que Newton introduit ses courbes en écrivant des équations Algébriques (homogènes) montre qu'à l'époque de sa première lecture de l'*Arithmetica infinitorum*, il est déjà familier avec les principes fondamentaux de la géométrie cartésienne. C'est justement à la lumière de ces principes qu'il cherche à comprendre (et à reformuler) la méthode et les résultats de Wallis.

4.1.1 "To square the Parabole"

Voici comment Newton énonce et résout le problème de la quadrature de la première de ses deux paraboles[15] :

> In the Parabole MAN [fig. 1.a] suppose the Parameter AH $= a$. AD $= y$. DM $= x$ and $ay = xx$ or $\frac{xx}{a} = y$. Now suppose the lines called x doe increase in arithmetical proportion all the x's taken together make the superficies DMK which is halfe a square. let every line drawne from MD to KD be square and they produce a Pyramid equall to every $xx = \frac{x^3}{3}$. which if divided by a there remains $\frac{x^3}{3a} = \frac{yx}{3}$ equall to every $\frac{xx}{a}$ equall to every (y) or all the lines drawne from AP to AMMM equall to the superficies APM equall to a 3^d^ parte of the superficies ADMP et the superficies AMD $= \frac{2yx}{3}$.

Comme on l'a déjà dit, Newton ne cherche pas à reconstruire la démarche de Wallis. Même si sa figure ne diffère pas de celles de Wallis, l'interprétation qu'il en donne est bien différente : là où Wallis ne voyait qu'un triangle curviligne inscrit dans un parallélogramme, Newton voit une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes (d'axe AH et origine A). Cette courbe est caractérisée par le bais d'une équation, plutôt que par un système de proportions, et c'est exactement la considération de cette équation qui conduit rapidement à sa quadrature. Cette dernière ne tient pas à la détermination du rapport entre le triangle curviligne AMD et le rectangle APMD, mais à la détermination d'une expression Algébrique exprimant la "surface AMD", une expression à laquelle Newton parvient en suivant une procédure qui ne s'appuie pas sur une connaissance préalable de ce rapport.

Tout en se rapportant, comme Wallis, à la méthode des indivisibles, la procédure de Newton ne se réclame pas des séries numériques de Wallis. Ce dernier avait employé ces séries pour exprimer les modalités de variations de certaines cordes de ses figures curvilignes, en particulier les cordes parallèles au diamètre de la courbe délimitant ces mêmes figures.

[12] Cf. Wallis (1665) et, pour des références précises, Newton (MP), I, **1**, 3, § 2, notes (6), (8) et (10), 92.
[13] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3,2, 91-92.
[14] Cf. la section 1.4.2.
[15] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 2, 93.

En pensant ces mêmes cordes étant comme des ordonnées, Newton lit leur modalité de variation sur l'équation qui exprime la parabole en question. Ceci est rendu possible grâce à la transformation de l'équation entière donnée en une équation de la forme $y = f(x)$, où "$f(x)$" est une expression Algébrique dans laquelle intervient la variable x. Par cette transformation, Newton introduit une asymétrie entre les coordonnées et fixe l'attention du mathématicien, non plus sur la relation entre les coordonnées qui définit le lieux géométrique, mais sur la nature d'un segment variable (l'ordonnée), et en particulier sur les modalités de sa variation. Le deuxième segment variable qui intervient dans cette équation (l'abscisse) fonctionne comme un paramètre, comme un repère auquel l'ordonnée est comparée ; c'est justement par le truchement de cette comparaison que cette dernière révèle sa nature, dont l'équation est l'expression.

* * *

En regardant les choses d'un point de vue moderne, enrichi par l'acquisition de la notion de fonction, on pourrait penser que Newton considère ici la courbe comme étant la représentation d'une fonction explicite, tandis que Descartes la considérait comme étant la représentation d'une fonction implicite. Pourtant, en absence d'une notion analogue à celle moderne de fonction, la courbe n'est pas pensée comme étant la représentation d'un autre objet mathématique déjà donné en tant que tel, sur lequel porte l'attention du mathématicien — ce qui serait justement la fonction —, mais est plutôt l'objet mathématique étudié. Celle que nous pensons comme étant la différence entre une fonction explicite et une fonction implicite n'est donc qu'une différence entre deux formes dans lesquelles une équation Algébrique exprimant une courbe peut être écrite. Dans le cas en question, cette dernière différence est de surcroît banale, car le passage de $ay - x^2 = 0$ à $y = \frac{x^2}{a}$ ne tient qu'à déterminer de la racine d'une équation de premier degré. Si on n'insiste que sur cette différence, on risque de ne pas voir l'essentiel de la question. Ce qui est en cause ici n'est pas la différence entre deux manières d'écrire une équation, l'une indiquant l'équation comme telle, et l'autre en exprimant la racine, mais la différence entre deux modalités distinctes d'expression d'une courbe par le biais d'une équation.

Essayons de comprendre cette différence.

Comme les équations de Descartes, l'équation écrite par Newton emploie des symboles atomiques (les lettres "x" et "y") pour indiquer des objets que l'on considère tantôt comme des segments variables (pris respectivement comme une abscisse et une ordonnée), et tantôt comme des pluralités de segments (les valeurs des segments variables, c'est-à-dire les ordonnées et les abscisses des différents points de la courbe), et que l'on suppose donnés avant que la courbe exprimée par cette équation soit donnée. La notion de coordonnée et l'interprétation d'une courbe comme un lieu géométrique référé à un système de coordonnées ouvrent la voie à la considération de classes d'équivalence de segments (qu'on n'a guère besoin de dessiner un par un ou de référer à une courbe déjà donnée) qui peuvent, à leur tour, être prises comme des segments uniques. Il est important de comprendre que cette acquisition de la géométrie cartésienne ne dépend pas, en tant que telle, de l'introduction de l'Algèbre des segments. À la rigueur, un système de proportions aurait pu substituer une équation (homogène) même sans avoir recours à l'introduction d'un segment unité. Dans le cas considéré par Newton, l'équation $ay = x^2$ aurait pu être remplacée par la proportion $y : x = x : a$. C'est le fait de rapporter cette équation, ou éventuellement cette proportion, à un système de coordonnées fixé *a priori*, plutôt qu'à une courbe déjà donnée, qui permet de considérer x et y comme étant des segments variables dont cette équation ou cette proportion expriment la relation.

Ce que l'Algèbre des segments permet de faire, et qui ne peut pas être fait moyennant l'usage des proportions, c'est de passer de l'expression de la relation entre deux coordonnées à l'exhibition de l'expression de l'un de ces segments en termes de l'autre. Dans l'équation écrite par Newton, l'expression Algébrique "$\frac{x^2}{a}$" exprime bien une relation (en tant qu'elle intervient dans l'égalité $y = \frac{x^2}{a}$), mais elle ne le fait qu'en exprimant un pôle de cette relation ; elle n'est donc l'expression d'une relation qu'entretiennent deux segments que parce qu'elle est l'expression de l'un de ces segments en termes de l'autre. Encore que cette possibilité n'est pas exploitée par Descartes lorsqu'il est question d'exprimer des courbes elles est inscrite dans sa géométrie[16]. Newton ne fait alors que l'exploiter. Il écrit d'emblée son équation de telle sorte qu'elle exprime la relation qui est censée lier l'abscisse et l'ordonnée en exhibant en même temps une expression Algébrique, "$\frac{x^2}{a}$", qui exprime directement l'ordonnée en termes de l'abscisse. De manière analogue, les séries $\sum_r$ de Wallis exprimaient, par rapport à la série U_r, la totalité des cordes considérées par ce dernier. Il y a pourtant une différence essentielle entre une expression Algébrique, telle que "$\frac{x^2}{a}$", qui exprime une ordonnée relevant d'un système de coordonnées cartésiennes fixé, et des séries, telles que $\sum_r$, employées par Wallis. Cette différence est encore une fois l'effet de l'introduction de l'Algèbre des segments : une telle expression Algébrique n'exprime pas une pluralité d'objets géométriques par une pluralité des termes Algébriques (ou arithmétiques), mais fonctionne comme une description compacte d'un élément d'une espèce (un segment), qui est en même temps un individu et un caractère commun à plusieurs individus[17]. Il n'y a certes rien de nouveau dans l'approche de Newton, consistant à traiter une collection d'individus comme étant un seul individu, celle-ci étant une condition même de la pensée (ou du moins de la pensée abstraite). Ce qui est caractéristique dans la démarche suivie par Newton est que la collection en question reste une collection, se donne comme une pluralité, même lorsque elle est traitée comme un individu. Cela est rendu possible grâce à l'exploitation d'un double registre : celui de l'Algèbre — fixant l'individualité d'une expression (qui peut se réduire, comme dans le cas d'une variable indépendante[18], à un simple symbole atomique) — ; et celui de la géométrie classique — exhibant la pluralité des objets que cette expression est censée exprimer.

Dans ce contexte, c'est la notion même de variation qui acquiert une signification particulière. On ne peut parler de variation de quelque chose que si l'on peut comparer un changement (qu'on prend d'habitude comme le changement d'une forme) avec une persistance (qu'on prend comme la persistance du substrat). Dans la géométrie classique la

[16]C'est exactement cette possibilité qui permet, dans certains cas, de lire dans l'équation d'une courbe une indication pour parvenir à la construction de n'importe lequel de ses points.

[17]En termes purement linguistiques, cette différence se manifeste ainsi : l'expression "$\frac{x^2}{a}$" exprime un objet dont elle peut être considéré comme étant un nom propre, ou, plus précisément, une description définie ; une série $\sum_r$, de même qu'une équation Algébrique, $F(x, y) = 0$ ou $y = f(x)$, exprime un objet géométrique qu'elle ne nomme pas, et qu'à la rigueur, elle ne décrit pas non plus. Dans le premier cas, la relation d'expression se réduit à la relation de référence (sous l'acception que ce terme prend en philosophie du langage) ; dans le deuxième cas, elle est une relation d'une autre nature : la série $\sum_r$ et les équations $F(x, y) = 0$ et $y = f(x)$ fixent, par leurs mêmes propriétés mathématiques, les propriétés des objets qu'elles expriment. Cela explique, entre autre, mon usage, apparemment asymétrique, des guillemets.

[18]Cf. ci-dessous.

notion de variation d'un segment renvoie à la permanence de la figure déjà tracée et à une attitude changeante de l'observateur, qui prend (ou imagine prendre), par exemple, des points différents sur cette figure en tant qu'extrémités d'éléments distincts d'une classe d'équivalence de segments ; cette classe est prise comme un seul segment, toujours le même et toujours changeant. Un certain système de proportion peut ensuite indiquer une relation invariante entre deux segments variables. La figure représente les segments variables dans leur individualité de segments particuliers, et le système de proportions exprime la nature de leur relation. Lorsqu'on écrit, comme Newton, une équation Algébrique sous la forme $y = f(x)$, et qu'on la réfère à un système de coordonnées fixé à l'avance, la figure n'a plus cette fonction : la persistance qui nous donne le droit de parler de variation est la persistance de l'expression Algébrique et non pas celle de la figure. Quant au changement, il peut bien être conçu comme une variation au sens de la géométrie classique, mais il peut aussi être conçu comme l'effet d'une simple indétermination, c'est-à-dire comme la possibilité de différentes déterminations. Il suffit alors de remarquer que l'on dispose de différentes expressions Algébriques possibles, toutes susceptibles d'exprimer un segment variable, pour comprendre qu'il devient possible de penser la variation d'un segment comme un phénomène qui peut prendre des formes différentes.

La différence entre une équation de la forme $F(x, y) = 0$ et une équation de la forme $y = f(x)$, en tant qu'expressions d'une courbe peut alors être présentée ainsi : de même qu'un système de proportions, une équation de la forme $F(x, y) = 0$ n'exprime que la forme d'une relation possible entre deux segments variables ; en revanche, une équation de la forme $y = f(x)$ exprime aussi une modalité de variation d'un de ces segments. La courbe exprimée par une équation de la forme $y = f(x)$ se présente alors, avant que comme un lieu géométrique satisfaisant à une certaine condition, comme une représentation de quelque chose. Mais ce quelque chose n'est pas un objet mathématique déjà donné, c'est plutôt une modalité possible de variation d'un segment exprimée à son tour par un invariant Algébrique. Il s'ensuit qu'une équation de la forme $y = f(x)$ exprime une courbe parce qu'elle exhibe cet invariant Algébrique, qui est à son tour l'expression d'une modalité de variation.

Mais cela n'est pas tout. Car il n'est pas uniquement possible de distinguer entre différentes modalités de variations d'un segment ; il est possible aussi d'ordonner ces modalités.

Que des changements de nature différente sont possibles était déjà à l'époque des premières réflexions de Newton une idée ancienne, au moins aussi ancienne que la physique aristotélicienne. À cette même époque, les développements de cette dernière avaient déjà conduit à distinguer les mouvements — ou, pour être plus précis, les "mouvements selon le lieu" — relativement à leur uniformité ou à la nature de leur difformité ; depuis Oresme et les Mertoniens, on distinguait les mouvements uniformes, les mouvements uniformément difformes, et les mouvements difformement difformes. Ces mouvements étaient pourtant des phénomènes naturels quel'on pouvait observer, et dans lesquels on pouvait détecter autant de différences que de similarités de forme ; leur uniformité ou difformité étaient mesurées par rapport à un mouvement de même nature, celui des astres, qui scandait le temps et qu'Aristote avait reconduit au "premier mouvement", celui du premier ciel[19].

Cela n'est pas le cas pour la variation d'un segment, qui est plutôt un phénomène que l'on doit imaginer, supposer, rendre possible à l'intérieur d'un domaine d'objets mathématiques.

[19] J'ai discuté cet aspect de la physique d'Aristote en Panza (1989), ch. 2 et en Panza (1992*b*).

Pour pouvoir concevoir son uniformité ou difformité, il fallait d'abord construire, ou du moins identifier, un paramètre auquel cette uniformité ou difformité se rapportent. L'idée que Newton semble préconiser, dès ses premiers pas de mathématicien, ou du moins celle qu'il voit à l'œuvre derrière les arguments de Wallis, est que rien n'exige que ce paramètre soit un paramètre universel, fixé une fois pour toutes. Il suffit de disposer d'un paramètre local ne fonctionnant qu'à l'intérieur d'un système fermé : un segment considéré comme variable qui joue, à l'intérieur du système auquel il participe, un rôle déterminé. Il faut tout simplement que sa variation soit celle à laquelle se rapportent les variations de tous les autres segments qui interviennent dans ce système. Dans l'Algèbre des segments, ceci se reflète d'une manière fort simple : il suffit que ce segment soit exprimé par une variable qui intervient (directement ou indirectement) dans l'expression de tout autre segment, que l'on suppose susceptible d'être déterminée à volonté. C'est une idée clef de l'*analyse* qui voit ici le jour, celle de variable indépendante. Et c'est justement cette idée qui permet à Newton d'ordonner les différentes modalités de variation d'un segment en plusieurs classes et d'associer à certaines de ces classes des figures géométriques exprimant la modalité dont il est question.

* * *

Le fait que Newton opère, au cours de ses premières notes de lecture relatives à l'*Arithmetica infinitorum*, sur une courbe exprimée par une équation de la forme $y = f(x)$, plutôt que sur une équation de la forme $F(x, y) = 0$, ne signifie évidemment pas qu'il ait désormais abandonné le point de vue de Descartes pour embrasser des conceptions nouvelles auxquelles il se tiendra par la suite. Sans doute, les différences que je viens de décrire n'étaient que très estompées dans sa conscience. Son choix tient certainement plus à la nature des arguments de Wallis, qu'il cherche à reformuler à sa manière, qu'à une décision réfléchie, visant à ouvrir de nouvelles perspectives mathématiques. Comme on le verra ci-dessous, Newton fera, dans ses recherches successives, un très large usage d'équations Algébriques de la forme $F(x, y) = 0$, et il restera très proche des conceptions de Descartes. Pour des raisons qui deviendront s'éclairciront au fur et à mesure que l'on avancera dans notre étude, il exprimera les courbes sur lesquelles il travaillera par des équations de la forme $y = f(x)$ lorsqu'il sera question de leur quadrature, et il les exprimera par des équations (entières) de la forme $F(x, y) = 0$ lorsqu'il sera question de leurs tangentes, normales, centres de courbure, etc. La procédure par laquelle il parvient, dans ses premières notes de lecture de l'*Arithmetica infinitorum*, à carrer deux paraboles, et par laquelle il cherche ensuite à carrer une hyperbole, fait néanmoins un large usage de la distinction entre différentes modalités possibles de variation de l'ordonnée d'une courbe, une distinction qu'on ne peut entendre, il me semble, qu'à la lumière des considérations précédentes. Cette procédure est exposée dans le court passage que l'on a cité ci-dessus.

L'objet de l'attention de Newton n'est pas la nature particulière de la succession des ordonnées PM de la courbe MAN, mais la suite ordonnée d'opérations qui amènent de la donation de x à la donation de y, en tant que cette dernière variable est exprimée une certaine expression Algébrique. Cette succession est la suivante : donation de x ; passage au carré ; division par la quantité a. En pensant la quadrature d'une courbe donnée comme étant la détermination d'une expression Algébrique qui exprime la totalité des ordonnées de cette courbe, il suppose que cette dernière expression n'est rien d'autre que l'expression qui exprime le résultat que l'on obtient lorsqu'on applique, à partir de la donation de la totalité des x, une suite de procédures associée à la suite d'opérations qui amènent de la donation de x à la donation de y.

Pour décrire en général la démarche de Newton, introduisons une notation convenable.

Supposons que μ et ν sont deux nombres entiers positifs, tels que $\mu \leq \nu$, ψ est un segment, et que O_i $(i = 1, 2, \ldots)$ sont des opérations Algébriques monadiques[20]. Indiquons par le symbole "$\langle_{\psi} O_\mu \rangle$" le résultat de l'application de l'opération O_μ à la grandeur ψ, et par le symbole "$\left\langle_{\psi} O_\mu^\nu \right\rangle$" le résultat de l'application réitérée des opérations formant la succession ordonnée d'opérations $\{O_i\}_{i=\mu}^{\nu}$, à partir de la grandeur ψ[21]. On stipule que, quelle que soit la quantité ψ, $\langle_{\psi} O_0 \rangle = \left\langle_{\psi} O_0^0 \right\rangle = \psi$, c'est-à-dire qu'on stipule que, quelle que soit la succession $\{O_i\}_{i=0}^{\nu}$, la première opération de cette succession consiste dans la simple donation de ψ.

Grâce à de cette notation, on pourra alors écrire une équation $y = f(x)$ qui exprime une courbe par rapport à un certain système de coordonnées cartésiennes, sous la forme

$$y = \langle_x O_0^\nu \rangle \tag{4.1}$$

Pour déterminer l'ordonnée y de cette courbe, il suffira alors de spécifier la succession ordonnée d'opérations Algébriques monadiques $\{O_i\}_{i=0}^{\nu}$ qui conduit du segment x, pris comme abscisse de cette courbe, au segment $\langle_x O_0^\nu \rangle$. Dans le cas de la courbe considérée par Newton, on aura par exemple, comme on l'a remarqué ci-dessus, la succession suivante : donation de x (O_0) ; passage au carré (O_1) ; division par la quantité a (O_2). Et donc : $\nu = 2$; $\langle_x O_0 \rangle = \left\langle_x O_0^0 \right\rangle = x$; $\langle_x O_1 \rangle = \left\langle_x O_0^1 \right\rangle = x^2$; $\langle_{x^2} O_2 \rangle = \left\langle_x O_0^2 \right\rangle = \frac{x^2}{2}$.

Conformément à la méthode de Newton, pour carrer la courbe exprimée par l'équation (4.1) il faut déterminer l'expression Algébrique exprimant le segment $s\left[\sum_\kappa^\xi [\langle_x O_0^\nu \rangle]\right]$ qui fournit la mesure dans le domaine des segments du trapézoïde $\sum_\kappa^\xi [\langle_x O_0^\nu \rangle]$ composé par la totalité des ordonnées y, prise entre les valeurs $x = \kappa$ et $x = \xi$ de x. Pour faire ceci, il faut associer à la succession de segments $\left\{\left\langle_x O_0^i \right\rangle\right\}_{i=0}^{\nu}$ une succession de grandeurs géométriques $\left\{\sum_\kappa^\xi \left[\left\langle_x O_0^i \right\rangle\right]\right\}_{i=0}^{\nu}$ dont chacune consiste de la totalité des grandeurs géométriques mesurées par les segments $\left\langle_x O_0^i \right\rangle$ et est obtenue par l'application d'une procédure géométrique convenable, permettant de passer de la donnée de la grandeur géométrique variable mesurée par le segment variable $\left\langle_x O_0^i \right\rangle$ à la totalité des grandeurs géométriques mesurées par les segments $\left\langle_x O_0^i \right\rangle$.

Pour suivre cette démarche, il faut d'abord déterminer cette dernière procédure géométrique pour toute valeur de i entre 0 et n. C'est la tâche que Newton assigne aux deux lemmes qu'il énonce au tout début de ses notes. Avant d'appliquer ces lemmes, il faut résoudre une difficulté qui concerne la première de ces procédures géométriques, celle qui permet de passer de la donnée du segment $\left\langle_x O_0^0 \right\rangle = x$ à la totalité des x.

[20]L'extraction d'une racine quelconque est en elle-même une opération monadique. L'addition, la soustraction, la multiplication et la division peuvent en revanche être rendues monadiques par la fixation de l'une des deux segments sur lesquels elles portent. Il s'ensuit qu'à chacune de ces opérations dyadiques correspondent une infinité d'opérations monadiques, selon le choix du segment fixe.

[21]L'opération O_μ est d'abord appliquée à ψ, ensuite l'opération $O_{\mu+1}$ est appliquée à $\left\langle_\psi O_\mu \right\rangle$, l'opération $O_{\mu+2}$ à $\left\langle_{\langle_\psi O_\mu \rangle} O_{\mu+1} \right\rangle = \left\langle_\psi O_\mu^{\mu+1} \right\rangle$ et ainsi de suite, jusqu'à l'opération O_ν qui est appliquée à $\left\langle_\psi O_\mu^{\nu-1} \right\rangle$ en donnant le résultat $\left\langle_\psi O_\mu^\nu \right\rangle$.

Cette procédure joue évidemment un rôle particulier dans la démarche suivie par Newton, non seulement parce qu'elle est toujours la même, quelle que soit la courbe considérée, mais surtout parce que la notion de totalité des abscisses se prête à une équivoque possible. Si l'on considère cette totalité comme étant le résultat de la composition de tous les segments AP que l'on peut prendre sur l'axe AH à partir de A, de sorte que le point P soit compris entre A et un autre point fixe sur cet axe, disons E, ces segments étant tous pris dans leur position respective, alors cette totalité ne sera donnée que par le segment AE. En revanche, si on considère cette totalité comme la somme géométrique de ces segments, alors elle ne peut qu'être un segment infini, car elle sera la somme d'un nombre infini de segments finis. Dans un cas comme dans l'autre, il ne semble pas que la totalité des x puisse jouer un rôle dans une démarche de quadrature.

Cette difficulté était absente de la démarche de Wallis, car cette démarche se réduisait à la comparaison de deux totalités d'ordonnées. En revanche, du fait qu'il cherche à déterminer la mesure d'un trapézoïde dans le domaine des segments — plutôt que le rapport entre une figure curviligne et un parallélogramme — Newton ne peut pas se limiter à comparer des totalités d'ordonnées. Il doit construire une totalité d'ordonnées à partir de la donnée d'une abscisse, en suivant les indications contenues dans l'équation donnée. Et c'est pour cette raison qu'il rencontre, dès le début, cette difficulté inédite.

Pour comprendre la manière dont Newton la résout, imaginons que dans l'équation (4.1) on pose $\nu = 0$; on aura alors l'équation :

$$y = \langle {}_x O_0^{\nu} \rangle = x \tag{4.2}$$

Si l'on veut prendre l'opération O_0 comme la première d'une succession d'opérations qui conduit de l'abscisse à l'ordonnée d'une courbe, il faut considérer la donation de x comme étant le passage de l'abscisse x à une ordonnée y qui est censée être égale à cette abscisse. Le premier pas dans la procédure qui amène de l'abscisse à l'ordonnée d'une courbe sera alors, quelle que soit cette courbe, le passage à une ordonnée égale à l'abscisse, ce qui, dans notre langage moderne, n'est rien d'autre que la considération de la fonction identité. La totalité des x ne sera pas la totalité des abscisses, mais la totalité des ordonnées égales à ces abscisses.

Ce point crucial ayant été éclairci, on peut en venir aux deux lemmes sur lesquels Newton s'appuie. Les voici :

> [Lemme 1] All the parallell lines which can be understoode to bee drawne uppon any superficies are equivalent to it [and][...] may be used in stead of the superficies [...][22].
>
> [Lemme 2] If all the parallell lines drawne uppon any superficies be multiplied by another line they produce a Sollid like that which results from the superficies drawne into the same line. [...] Whence All the parallell superficies which can be understoode to bee in any sollid are equivalent to the Sollid[23].

Le premier de ces lemmes peut être reformulé ainsi : si une figure à deux dimensions est telle que pour chacun des points internes à cette figure on peut faire passer une corde appartenant à une famille de cordes parallèles, alors la figure en question est équivalente à

[22] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 2, 91.
[23] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 2, 91-92.

la totalité de ces cordes. La totalité de ces cordes est donc donnée par la figure elle-même. C'est un principe standard de la méthode des indivisibles, que Wallis avait posé à la base de ces arguments. Lorsque ce principe est rapporté aux considération précédentes, il permet d'accomplir le premier pas d'une procédure de quadrature essentiellement nouvelle : si on pense la totalité des x comme étant la totalité des y satisfaisant la condition $y = x$, et qu'on suppose, comme Newton, que les coordonnées auxquelles la courbe à carrer est référée sont orthogonales, et que la quadrature de cette courbe consiste à déterminer la mesure parmi les segments du trapézoïde $\sum_0^\xi [\langle_x O_0^\nu\rangle]$ composé par la totalité des ordonnées $\langle_x O_0^\nu\rangle$, prise entre les valeurs $x = 0$ et $x = \xi$ de x ($\xi > 0$), il s'ensuit que cette totalité est donnée par un triangle isocèle carré de base $x = \xi$, ce qui dans la figure de Newton n'est rien d'autre que le triangle MKD (qui Newton dessine en effet comme s'il était rempli par la famille des cordes parallèles à MK et perpendiculaires à DM).

* * *

Il est facile de généraliser cet argument au cas de coordonnées cartésiennes quelconques et de trapézoïdes délimités par des portions quelconques de la courbe en question.

Dans ce cas, le premier pas de la procédure consiste à construire un trapèze qui ne dépend que des limites de quadrature et de l'angle formé par les coordonnées[24]. Les pas successifs dépendent ensuite de ce même angle et de la nature particulière de l'équation qui exprime la courbe.

La valeur de l'angle formé par les coordonnées détermine aussi la figure géométrique qu'il s'agit de mesurer dans le domaine des segments. Comme c'était déjà le cas avec van Heuraet, cette figure n'est pas donnée en même temps que la courbe qu'il faut carrer ; c'est seulement lorsque cette courbe est référée à un système de coordonnées déterminé et que les deux valeurs de l'abscisse sont fixées qu'apparaît la figure sur laquelle porte le problème de la quadrature de cette courbe. Il est donc évident que le segment qui mesure cette figure parmi les segments — et donc la solution qui est donnée pour ce problème — dépend du choix du système de coordonnées cartésiennes auquel la courbe est référée. Cette solution n'est pas la même si cette courbe est référée à deux systèmes de coordonnées distincts ; cela ne signifie pas seulement que cette solution est exprimée dans les deux cas par des expressions Algébriques distinctes, mais aussi que l'expression Algébrique qui fournit la solution du problème dans les deux cas exprime des segments distincts qui mesurent des figures différentes.

Pour exprimer plus clairement cette différence, il convient d'introduire dès à présent une terminologie dont on fera usage par la suite. Conformément au langage mathématique moderne, les termes "aire" et "volume" désignent respectivement deux nombres réels donnant la mesure d'une figure plane et d'une figure solide, en termes d'une unité de mesure convenable (que l'on peut fixer *a priori*, ou même laisser indéterminée). Il s'ensuit que ces termes ne peuvent pas être employés, avec leur signification habituelle aujourd'hui, pour désigner des objets mathématiques sur lesquels travaillèrent Newton et, plus en général, les mathématiciens du XVII$^{\text{ème}}$ siècle (et même, je crois, du XVIII$^{\text{ème}}$). Il me semble pourtant que ces mêmes termes pourraient aussi être convenablement employés, avec une autre

[24] Il est clair que ce trapèze se réduit à un triangle lorsque la limite inférieur de quadrature coïncide avec l'origine, et devient rectangle lorsque les coordonnées sont orthogonales.

signification, lorsqu'il est question des travaux de ces mathématiciens, pour indiquer respectivement les segments qui mesurent dans le domaine des segments une figure plane ou une figure solide. En ce sens, une aire ou un volume ne sont rien d'autre que des segments et ils peuvent donc être exprimés par des expressions Algébriques propres à l'Algèbre des segments. En particulier, si $\mathcal{A}$ est une figure plane, alors l'aire de $\mathcal{A}$ est le segment $s[\mathcal{A}]$ qui mesure $\mathcal{A}$ dans le domaine des segments ; de même, si $\mathcal{B}$ est une figure solide, alors le volume de $\mathcal{B}$ est le segment $s[\mathcal{B}]$ qui mesure $\mathcal{B}$ dans le domaine des segments. Par extension, on pourra dire que l'aire d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes est un segment qui mesure dans le domaine des segments un trapézoïde délimité par cette courbe, l'axe des abscisses auquel cette courbe est référée et deux ordonnées quelconques de celle-ci. Si les abscisses auxquelles correspondent ces ordonnées sont fixées et qu'elles sont respectivement égales à κ et ξ, on dira que l'aire en question est évaluée (ou qu'elle est prise) entre les valeurs $x = \kappa$ et $x = \xi$ de l'abscisse. C'est de cette manière, il me semble, que l'on doit entendre les termes "aire" et "volume", lorsqu'ils apparaissent sous la plume de Newton, ou de tout autre mathématicien du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, et c'est avec cette signification que je vais les employer par la suite.

À l'aide de cette convention terminologique, on peut reformuler la remarque précédente ainsi : l'aire d'une courbe donnée n'est pas la même si cette courbe est référée à deux systèmes de coordonnées cartésienne différents. De plus : si une courbe est donnée indépendamment de tout système de coordonnées, ou si elle est référée à un système de coordonnées non cartésiennes (comme Newton comprendra bientôt qu'il est possible de le faire), alors il n'aura même aucun sens de parler de son aire.

* * *

Ceci étant dit, revenons à l'exemple choisi par Newton, en distinguant, comme on l'a déjà fait ci-dessus, l'abscisse x et une valeur strictement positive, $x = \xi$, de cette abscisse, que l'on va identifier avec le côté DM du triangle MKD, qui est censé constituer la totalité des x.

L'opération O_1 dans la succession $\{O_i\}_{i=0}^{2}$ associée à cet exemple consiste en un passage au carré. Il s'agit donc de déterminer la totalité des x^2 en sachant que la totalité des x est donnée par le triangle MKD. C'est à ce stade qu'intervient le deuxième lemme, que l'on peut reformuler ainsi : si une figure à deux dimensions est équivalente à une certaine totalité de segments, alors en multipliant chacun de ces segments par un autre segment, on obtient un solide. On comprend alors que le produit de deux segments est représenté par le rectangle qu'il mesure dans le domaine des segments et qu'une totalité de produits de segments est donnée par la totalité des rectangles qui représentent ces produits, c'est-à-dire par une figure solide composée, selon les principes de la méthode des indivisibles, par ces rectangles. Il s'ensuit que le segment qui mesure cette figure solide dans le domaine des segments mesure aussi dans ce même domaine la figure bidimensionnelle qui est composée, selon les principes de la méthode des indivisibles, par la totalité des segments qui constituent le produits des segments donnés. En d'autres termes : si α et β sont deux classes d'équivalence de segments que l'on peut prendre comme deux segments, alors le produit $\alpha\beta$ de ces segments est une classe d'équivalence de segment, disons γ, que l'on peut prendre aussi comme un segment ; ce segment γ mesure dans le domaine de segments le rectangle $R(\alpha, \beta)$ qui peut, à son tour, être pris comme une classe d'équivalence de rectangles ; il s'ensuit que ce rectangle représente le segment γ ; la totalité des γ est, d'après le premier lemme, donnée par une figure bidimensionnelle, disons $\mathcal{F}$, mais est aussi représentée par la figure solide qui, d'après un lemme analogue que Newton laisse implicite, donne la totalité des rectangles $R(\alpha, \beta)$, disons $\mathcal{G}$; on en conclut que le segment qui mesure $\mathcal{G}$ dans le domaine des segments mesure aussi $\mathcal{F}$ dans ce même domaine, c'est-à-dire que le volume de $\mathcal{G}$ coïncide avec (ou, si on préfère, est égal à) l'aire de $\mathcal{F}$.

Cette reconstruction ne fournit certes pas une justification de l'argument qui conduit Newton à accomplir le deuxième pas de sa procédure de quadrature ; mais elle permet d'en manifester la logique interne. Il s'ensuit que la totalité des x^2 est donnée par une figure solide qu'il est facile d'identifier avec une pyramide à base carrée ; c'est d'ailleurs Newton lui-même qui rend explicite cette conséquence de son deuxième lemme :

> And If all the lines in any triangle, which are parallell to one of the sydes, be squared there results a Pyramid.[25]

Si on suppose que la totalité des x^2 est prise entre les valeurs $x = 0$ et $x = \xi$ de x, alors cette pyramide sera évidemment la pyramide $\mathsf{MKK'M'D}$ (fig. 1.b) construite sur le triangle MKD, en construisant sur la base MK de ce triangle un carré appartenant à un plan perpendiculaire au plan de ce triangle, et en joignant les sommets $\mathsf{K'}$ et $\mathsf{M'}$ de ce carré au sommet D de ce même triangle. Le segment qui mesure cette pyramide dans le domaine de segments mesure aussi dans ce même domaine le triangle curviligne composé par la totalité des segments x^2, pris comme ordonnées d'une courbe d'équation $y = x^2$, référée au même système de coordonnées cartésiennes auquel est référée la courbe MAN, qu'il s'agit de carrer.

Une fois parvenu à ce stade, avant de considérer la troisième et dernière opération de la succession $\{O_i\}_{i=0}^{2}$ associée à l'équation de cette courbe, Newton s'appuie sur cette conclusion pour affirmer que la totalité des x^2 est "égale" à $\frac{x^3}{3}$; selon ma reconstruction de son argument, cela signifie que le segment $\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=\xi} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0} = \frac{\xi^3}{3}$ mesure dans le domaine des segments la pyramide $\mathsf{MKK'M'D}$ qui représente le triangle curviligne constitué par la totalité des x^2, et mesure donc aussi ce même triangle curviligne (en fournissant la quadrature d'une parabole d'équation $y = x^2$, référée à un système de coordonnées cartésienne orthogonales, prise entre les valeurs $x = 0$ et $x = \xi$ de x).

Il n'est pas difficile de justifier cela. Il suffit d'observer que cette pyramide satisfait la proportion

$$C(x) : \mathsf{MKK'M'D} = 3 : 1 \tag{4.3}$$

où $C(x)$ est le cube construit sur le segment x, et satisfait ainsi, conformément à la proposition XI.33 des *Éléments* et à l'Algèbre des segments de Descartes, la proportion

$$C(x) : C(u) = x^3 : u^3 \tag{4.4}$$

u étant le segment unité.

L'argument de Newton comporte cependant une difficulté d'une autre nature qui concerne le rôle de ce résultat intermédiaire. À partir de cela, Newton conclut que l'aire du triangle curviligne MAP constitué par la totalité des ordonnées $\mathsf{PM} = y = \frac{x^2}{a}$ est le segment $\frac{x^3}{3a}$, obtenu en divisant le segment $\frac{x^3}{3}$ par le segment a, ce qui équivaut à appliquer

[25] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 2, 92.

l'opération O_2 au segment $\frac{x^3}{3}$[26]. Newton semble ainsi traiter le segment constant a comme s'il était un nombre, et introduit de ce fait une asymétrie entre son traitement de l'opération O_1 et son traitement de l'opération O_2.

S'il avait traité ces deux opérations de la même manière, il n'aurait pas cherché à déterminer le segment qui mesure dans le domaine des segments la pyramide $\mathsf{MKK'M'D}$ et donc le triangle curviligne correspondant, délimité par la parabole d'équation $y = x^2$; il serait plutôt retourné aux carrés constituant cette pyramide pour se demander quelle procédure applicable à ces carrés aurait pu correspondre à l'opération O_2, c'est-à-dire à une division du segment x^2 par le segment a. Il aurait alors répondu que cette procédure correspond à la détermination d'un segment z tel que

$$R(z, a) = Q(x) \tag{4.5}$$

En s'appuyant sur la proportion

$$R(z, a) : Q(x) = az : x^2 \tag{4.6}$$

il aurait conclu que ce segment est justement le segment $z = \frac{x^2}{a}$. Et de cette manière il serait retourné à son problème initial, celui qui consiste à déterminer le segment qui mesure dans le domaine des segments la totalité des segments $\frac{x^2}{a}$, sans avoir avancé d'un pouce.

L'asymétrie entre les traitements des opérations O_1 et O_2 est donc une nécessité interne à l'argument de Newton : cet argument peut conduire à la solution du problème seulement si l'on parvient à représenter la totalité des ordonnées de la courbe considérée par un objet géométrique dont on connaît *a priori* la mesure dans le domaine des segments. Dans ce cas, cet objet est un solide $\mathcal{G}$ constituant le quatrième proportionnel dans la proportion

$$a : u = \mathsf{MKK'M'D} : \mathcal{G} \tag{4.7}$$

En effet, en passant aux volumes, de cette proportion on obtient

$$a : u = \frac{x^3}{3} : s\,[\mathcal{G}] \tag{4.8}$$

où $s\,[\mathcal{G}]$, étant le volume de $\mathcal{G}$, est aussi l'aire du triangle curviligne délimité par la courbe d'équation $y = \frac{x^2}{a}$. Il suffit alors d'appliquer les règles de l'Algèbre des segments de Descartes et d'évaluer le segment $s\,[\mathcal{G}]$ entre les valeurs $x = 0$ et $x = \xi$ de x, sans se préoccuper de déterminer plus précisément le solide $\mathcal{G}$, pour obtenir l'égalité

$$s\,[\mathsf{MAP}] = s\left[\sum\nolimits_0^{\xi} [\langle_x O_0^{\nu}\rangle]\right] = \frac{x^3}{3a} \tag{4.9}$$

[26] Si on distingue entre l'abscisse x et sa valeur $x = \xi$, cela revient à affirmer que l'aire du triangle curviligne MAP est le segment $\left[\frac{x^3}{3a}\right]_{x=\xi} - \left[\frac{x^3}{3a}\right]_{x=0} = \frac{\xi^3}{3a}$, un résultat qui est formellement équivalent à celui que nous exprimons par l'égalité

$$\int_0^{\xi} \frac{x^2}{a} dx = \frac{\xi^3}{3a}$$

Les considérations précédentes devraient suffire pour éclaircir les différences profondes qui, au delà de cette équivalence formelle, séparent le résultat de Newton de celui que cette égalité exprime.

qui exprime la solution du problème de la quadrature de la courbe MAN.

Tout en suivant un parcours que l'on peut décrire en général, l'argument de Newton ne peut pas être généralisé à toute sorte de courbes géométriques exprimées par une équation Algébrique connue. Il est même difficile de réduire cet argument, lorsqu'il porte sur quelques courbes particulières, à une application uniforme de certains principes généraux. D'une part, il tient en effet à une procédure géométrique associée à l'opération O_1 qui n'a évidemment pas d'analogue pour l'ensemble des opérations Algébriques monadiques possibles. D'autre part, il traite le segment constant a qui intervient dans l'équation $y = \frac{x^2}{a}$ d'une manière essentiellement différente du segment variable x.

Une fois que cet argument a été formulé, il est néanmoins facile de le présenter sous la forme de la succession d'inférences suivante :

$$1. \quad \left\{ \begin{array}{c} y = \dfrac{x^2}{a} \\ \text{(équation donnée)} \end{array} \right. \tag{4.10}$$

$$2. \quad \left\{ \begin{array}{c} \sum_0^{\xi}[y] = \sum_0^{\xi}\left[\dfrac{x^2}{a}\right] \\ \text{(par substitution à partir de 1)} \end{array} \right. \tag{4.11}$$

$$3. \quad \left\{ \begin{array}{c} s\left[\sum_0^{\xi}[y]\right] = s\left[\sum_0^{\xi}\left[\dfrac{x^2}{a}\right]\right] \\ \text{(par substitution à partir de 2)} \end{array} \right. \tag{4.12}$$

$$4. \quad \left\{ \begin{array}{c} s\left[\sum_0^{\xi}\left[\dfrac{x^2}{a}\right]\right] = \dfrac{1}{a}s\left[\sum_0^{\xi}\left[x^2\right]\right] \\ \left(\begin{array}{c} \text{car, si } f(x) \text{ et } \alpha \text{ sont deux segments} \\ \text{dont le deuxième est constant, alors} \\ s\left[\sum_{\kappa}^{\xi}\left[\alpha f(x)\right]\right] = \alpha s\left[\sum_{\kappa}^{\xi}\left[f(x)\right]\right] \end{array} \right) \end{array} \right. \tag{4.13}$$

$$5. \quad \left\{ \begin{array}{c} s\left[\sum_0^{\xi}\left[x^2\right]\right] = \dfrac{1}{3}\xi^3 \\ \left(\begin{array}{c} \text{car, quels que soient les} \\ \text{segments } \kappa \text{ et } \xi \ (\kappa < \xi), \\ s\left[\sum_{\kappa}^{\xi}\left[x^2\right]\right] = \dfrac{1}{3}\xi^3 - \dfrac{1}{3}\kappa^3 \end{array} \right) \end{array} \right. \tag{4.14}$$

$$6. \quad \left\{ \begin{array}{c} s\left[\sum_0^{\xi}[y]\right] = \dfrac{1}{3a}\xi^3 \\ \text{(pour 3, 4. et 5)} \end{array} \right. \tag{4.15}$$

Au-delà des justifications que Newton avance pour supporter son argument, celui-ci peut être lu comme une procédure formelle qui porte sur l'expression Algébrique "$\frac{x^2}{a}$" et qui se réclame, entre outre, de deux règles d'inférence (celles qui interviennent aux pas 4 et 5) qui préfigurent un algorithme de quadrature fort différent de celui de Wallis. Bien que Newton abandonnera bientôt cet argument — inapte à une généralisation convenable — il restera toujours fidèle, pour l'essentiel, à l'esprit de son premier exercice de quadrature : il pensera toujours un problème de quadrature comme un problème de détermination d'une aire, et il cherchera toujours à le résoudre grâce à une procédure formelle (qu'il s'agira de justifier convenablement) portant sur l'expression Algébrique de l'ordonnée de la courbe à carrer.

Ceci étant dit, revenons sur l'argument (4.10)-(4.15). On pourrait objecter que la distinction entre l'abscisse x et ses valeurs $x = 0$ et $x = \xi$ est loin d'être explicite chez Newton, et que, de ce fait, l'interprétation de son argument comme étant la recherche de l'aire d'une trapézoïde limité par des ordonnées relatives à des abscisses quelconques est excessivement charitable.

Il suffit pourtant de passer au deuxième exemple[27], pour comprendre que cette interprétation n'est nullement forcée.

En considérant la même parabole MAN (encore fig. 1), Newton la réfère cette fois à l'axe MN et à l'origine M, en posant $x = \mathsf{MQ} = \mathsf{MD} - \mathsf{QD}$ et $y = \mathsf{QM} = \mathsf{QP} - \mathsf{MP}$. En supposant de surcroît que $\mathsf{MN} = 2\,(\mathsf{MD}) = b$, et en opérant les substitutions $x \to \frac{b}{2} - x$ et $y \to \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{a} - y = \frac{b^2}{4a} - y$, dans l'équation $y = \frac{x^2}{a}$, il obtient ainsi la nouvelle équation

$$ay = bx - x^2 \tag{4.16}$$

En suivant un parcours analogue au précédent, il représente ensuite la totalité des abscisses par un triangle rectangle isocèle. Au lieu d'identifier ce triangle avec le triangle MKD, il l'identifie avec le triangle MWN construit sur MN et il assigne à ce triangle son aire $\frac{b^2}{2}$. Après cela, il construit, l'un après l'autre, le prisme rectangle $\mathsf{NWW'N'M''M}$ de base MWN et hauteur $\mathsf{MM''} = \mathsf{MN} = b$ (fig. 1.c) — auquel il assigne le volume $\frac{b^3}{2}$ — et la pyramide équilatérale $\mathsf{NWW'N'M}$ de coté $\mathsf{NW} = \mathsf{NN'} = \mathsf{MN} = b$ — à laquelle il assigne le volume $\frac{b^3}{3}$ — et il conclut que la mesure de la totalité des segments ay dans le domaine des segments est $\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3} = \frac{b^3}{6}$, et donc celle de la totalité des segments y, c'est-à-dire l'aire du trapézoïde MDNA, est[28] $\frac{b^3}{6a}$.

Au cours de cet argument, Newton traite de manière différente non seulement les deux segments x et a, mais aussi les deux segments constants a et b, car il traite le second de la même manière que le segment variable x. De plus, il évite de considérer la mesure $\frac{b^2}{2}$ du triangle MWN (qu'il ne fait qu'indiquer en passant). Il est clair cependant que la même conclusion aurait pu être obtenue en s'appuyant sur cette mesure et en traitant les deux segments a et b de la même manière. Cet argument peut en fait être mis sous la forme de

[27]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 2, 93.

[28]De la position $\mathsf{MD} = \mathsf{MK} = \xi$, il s'ensuit que $b = 2\xi$ et donc $\frac{b^3}{6a} = \frac{4}{3a}\xi^3$, de sorte que

$$\begin{aligned} s\,[\mathsf{MDNA}] &= 2s\,[\mathsf{MDA}] = 2s\,[\mathsf{MDAP} - \mathsf{MAP}] \\ &= 2\,(s\,[\mathsf{MDAP}] - s\,[\mathsf{MAP}]) \\ &= 2\left(\frac{\xi^3}{a} - \frac{\xi^3}{3a}\right) \end{aligned}$$

conformément au résultat obtenu au cours du traitement du premier exemple. Newton ne manque pas d'observer cet accord, en montrant qu'il est parfaitement à l'aise avec les changements d'une limite de quadrature.

la succession d'inférences suivante :

$$1.\quad \left\{\begin{array}{c} y = \frac{b}{a}x - \frac{1}{a}x^2 \\ \text{(équation donnée)} \end{array}\right. \tag{4.17}$$

$$2.\quad \left\{\begin{array}{c} \sum_0^b [y] = \sum_0^b \left[\frac{b}{a}x - \frac{1}{a}x^2\right] \\ \text{(par substitution à partir de 1)} \end{array}\right. \tag{4.18}$$

$$3.\quad \left\{\begin{array}{c} \sum_0^b \left[\frac{b}{a}x - \frac{1}{a}x^2\right] = \sum_0^b \left[\frac{b}{a}x\right] - \sum_0^b \left[\frac{1}{a}x^2\right] \\ \left(\begin{array}{c} \text{car, si } f(x) \text{ et } g(x) \text{ sont deux segments, alors} \\ \sum_\kappa^\xi [f(x) \pm g(x)] = \sum_\kappa^\xi [f(x)] \pm \sum_\kappa^\xi [g(x)] \end{array}\right) \end{array}\right. \tag{4.19}$$

$$4.\quad \left\{\begin{array}{c} s\left[\sum_0^b [y]\right] = s\left[\sum_0^b \left[\frac{b}{a}x\right] - \sum_0^b \left[\frac{1}{a}x^2\right]\right] \\ \text{(par substitution à partir de 2 et 3)} \end{array}\right. \tag{4.20}$$

$$5.\quad \left\{\begin{array}{c} s\left[\sum_0^b [y]\right] = s\left[\sum_0^b \left[\frac{b}{a}x\right]\right] - s\left[\sum_0^b \left[\frac{1}{a}x^2\right]\right] \\ \left(\begin{array}{c} \text{par substitution à partir de 4 ;} \\ \text{car, si } \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B} \text{ sont deux} \\ \text{grandeurs géométriques, alors} \\ s[\mathcal{A} \pm \mathcal{B}] = s[\mathcal{A}] \pm s[\mathcal{B}] \end{array}\right) \end{array}\right. \tag{4.21}$$

$$6.\quad \left\{\begin{array}{c} s\left[\sum_0^b [y]\right] = \frac{b}{a}s\left[\sum_0^b [x]\right] - \frac{1}{a}s\left[\sum_0^b [x^2]\right] \\ \left(\begin{array}{c} \text{car, si } f(x) \text{ et } \alpha \text{ sont deux segments} \\ \text{dont le deuxième est constant, alors} \\ s\left[\sum_\kappa^\xi [\alpha f(x)]\right] = \alpha s\left[\sum_\kappa^\xi [f(x)]\right] \end{array}\right) \end{array}\right. \tag{4.22}$$

$$7.\quad \left\{\begin{array}{c} s\left[\sum_0^b [x]\right] = \frac{b^2}{2} \\ \left(\begin{array}{c} \text{car, quels que soient les} \\ \text{segments } \kappa \text{ et } \xi\ (\kappa < \xi) \text{, on a} \\ s\left[\sum_\kappa^\xi [x]\right] = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\kappa^2 \end{array}\right) \end{array}\right. \tag{4.23}$$

$$8.\quad \left\{\begin{array}{c} s\left[\sum_0^b [x^2]\right] = \frac{1}{3}b^3 \\ \left(\begin{array}{c} \text{car, quels que soient les} \\ \text{segments } \kappa \text{ et } \xi\ (\kappa < \xi), \\ s\left[\sum_\kappa^\xi [x^2]\right] = \frac{1}{3}\xi^3 - \frac{1}{3}\kappa^3 \end{array}\right) \end{array}\right. \tag{4.24}$$

$$9. \quad \begin{cases} s\left[\sum_0^b [y]\right] = \dfrac{b^3}{2a} - \dfrac{b^3}{3a} = \dfrac{b^3}{6a} \\ \text{(pour 6, 7 et 8)} \end{cases} \tag{4.25}$$

Si la règle évoquée au pas 3 ne tient qu'à une évidence géométrique propre à la méthode des indivisibles, la règle évoquée au pas 5 tient à un lemme caché. Une telle règle dérive de la définition même de la relation de mesure entre une grandeur géométrique quelconque et un segment, ainsi qu'on l'a présentée ci-dessus. Toutefois Newton semble travailler comme s'il tenait pour acquis la linéarité d'un opérateur de quadrature amenant d'une figure plane quelconque à son aire. Quant à la règle évoquée au pas 7, elle est explicitement énoncée par Newton qui n'a aucune difficulté à la justifier d'une manière analogue à la règle évoquée au pas 8 de l'exemple précédent[29].

Si à ces règles, on en ajoute une autre qu'il est facile de justifier de la même manière, et pourrait énoncer ainsi :

$$s\left[\sum_{\kappa}^{\xi} [\alpha]\right] = \alpha s\left[\sum_{\kappa}^{\xi} [u]\right] = \alpha\,(\xi - \kappa) \tag{4.26}$$

(avec $\kappa < \xi$[30]), on obtient un algorithme de quadrature, essentiellement différent de celui de Wallis, applicable à la quadrature d'une parabole quelconque exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par une équation de la forme

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \tag{4.27}$$

où α, β et γ sont des coefficients constants quelconques (choisis de manière à assurer l'homogénéité de cette expression, et donc l'indépendance de y par rapport au choix du segment unité).

4.1.2 "To square the Hyperbola", acte premier

Ayant résolu le problème de la quadrature d'une parabole, Newton passe d'emblée à celui de la quadrature d'une hyperbole. Pour quelques temps, il croît même être parvenu à une solution Algébrique de ce problème. S'il avait lu l'*Arithmetica infinitorum* au delà de ses toutes premières pages, il n'aurait pu que douter de son résultat. Néanmoins, la procédure qu'il suit pour y parvenir, encore que viciée par une erreur évidente, témoigne de son talent et de sa propension à suivre des parcours inexplorés.

L'idée clef qui alimente l'illusion de Newton est en fait loin d'être grossière et, si elle avait été correctement appliquée, elle aurait pu conduire (en d'autres cas) à des résultas exacts : une fois que l'on a construit le triangle équivalent à la totalité des x, rien n'empêche d'imaginer de construire une figure curviligne de telle sorte que la totalité des figures comme celle-ci soit équivalente à un solide que l'on peut comparer à d'autres solides du même type ; la comparaison de ces solides pourrait ensuite (sans qu'il faille déterminer leur volume) révéler des relations, qu'on peut espérer être capables de nous fournir des renseignements qui conduiraient aux quadratures cherchées.

[29]On note qu'ici les segments κ et ξ sont implicitement pris comme des grandeurs positives, dont la deuxième est plus grande que la première, ce qui permet d'éviter de prendre en compte des valeurs absolues.

[30]Cf. la note 29, ci-dessus

Si, dans le cas considéré, cette procédure conduit à un résultat erroné, c'est que Newton assimile deux équations qui ne sont pas réductibles l'une à l'autre[31]. D'abord, il suppose donnée la branche FMA (fig. 2.a)[32] d'une hyperbole de centre C, dont LC est une asymptote, telle que lorsque l'on réfère cette même hyperbole à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales dont l'axe AH et l'origine A sont choisis de telle manière que $\mathsf{LA} = \mathsf{AC} = p$, et que l'on pose par conséquence $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{PM} = y$, on obtient l'équation

$$x^2 = py + xy \tag{4.28}$$

Ensuite, il suppose que cette hyperbole soit aussi exprimée, par rapport au même système de coordonnées, par l'équation

$$x^2 = \frac{qy + y^2}{5} \tag{4.29}$$

où q n'est rien d'autre que le segment AC, de telle sorte que $q = p$. Or, cela est impossible, et cette erreur rend évidemment faux tout résultat qui dépend d'une telle hypothèse. Ce qui nous intéresse ici n'est pas le résultat erroné obtenu par Newton, mais la manière dont il raisonne à partir de cette hypothèse impossible. Suivons donc son argument.

En raisonnant d'abord sur l'équation (4.28) et en posant $\mathsf{AB} = a$, celui-ci conclut que la totalité des x^2, prise entre les valeurs $x = 0$ et $x = a$ de x, est donnée par une pyramide qui est mesurée dans le domaine des segments par le segment $\frac{a^3}{3}$. Ensuite, en s'appuyant sur le fait que le triangle curviligne ABN, délimité par l'hyperbole FMA, est équivalent à la totalité des y, il suppose que les totalités des py et des xy, prises, elles aussi, entre les valeurs $x = 0$ et $x = a$ de x, soient respectivement données par le solide $\mathsf{ABNN'B'A'A}$ (fig. 2.b) de base ABN et de hauteur $\mathsf{AA'} = \mathsf{AC} = p$, et le solide $\mathsf{ABNN''B''A}$ de même base et de hauteur variable x (telle que $\mathsf{BB''} = a$)[33]. En collant ces deux solides l'un à l'autre selon leur base commune, il obtient ainsi un nouveau solide qui, conformément à l'équation (4.28) est, lui aussi, mesuré dans de domaine des segments par le segment $\frac{a^3}{3}$.

En passant ensuite à l'équation (4.29), et en supposant, comme on l'a dit, qu'elle exprime la même hyperbole FNA, il considère y comme étant l'abscisse de cette hyperbole et x comme étant son ordonnée. Il en conclut alors, sans difficulté, en posant implicitement $\mathsf{BN} = b$, que les totalités des qy et des y^2, prises entre les valeurs $y = 0$ et $y = b$, sont données par des solides qui sont respectivement mesurés dans le domaine des segments par les segments $q\frac{b^2}{2}$ et $\frac{b^3}{3}$. La totalité des x, prise toujours entre les valeurs $y = 0$ et $y = b$, sera en revanche donnée par le triangle curviligne ANE. Il s'ensuit que la totalité des x^2 est donnée par le solide $\mathsf{ANN''E'AE}$ de base ANE et de hauteur variable x (telle que $\mathsf{NN''} = \mathsf{EE'} = \mathsf{BB''} = \mathsf{NE} = \mathsf{AB} = a$). L'équation (4.29) nous dit alors que le volume de ce solide est $\frac{1}{5}\left(\frac{qb^2}{2} + \frac{b^3}{3}\right) = \frac{3qb^2+2b^3}{30}$.

Comme la moitié $\mathsf{ANN''EA}$ de ce dernier solide (qui est mesurée dans le domaine des segments par le segment $\frac{3qb^2+2b^3}{60}$ peut être collé sous le solide $\mathsf{ABNN''B''A}$, en formant le

[31] Cf. Newton (MP), I, 94-97, notes 16, 21 et 29 et Panza (1995), 191–192, note 128.

[32] En suivant une suggestion de Whiteside [cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 2, notes (17) et (29), 94-95], j'assume que le dessin de Newton, qui laisse penser que l'hyperbole est équilatère (ce qui multiplierait ses erreurs), est imprécis, et je le modifie en ne dessinant que la portion de l'hyperbole que Newton cherche à carrer.

[33] Ceci se justifie par le lemme 2. La généralisation opérée par Newton des principes de la méthode des indivisibles énoncés par Wallis dans le traité *De Sectionibus Conicis* consiste exactement dans une interprétation assez large de ces principes lemme, propre à rendre possible des applications comme celle-ci.

prisme rectangle à base triangulaire $\mathsf{ABNEN''B''}$, dont la hauteur est le segment $\mathsf{BN} = b$ et dont la base est le triangle rectangle isocèle dont les cathètes AB et $\mathsf{BB''}$ sont égaux à a, et que le volume de ce prisme est $\frac{a^2b}{2}$, il s'ensuit que le volume du solide $\mathsf{ABNN''B''A}$, donnant, comme on a vu ci-dessus, la totalité des xy, est le segment $\frac{a^2b}{2} - \frac{3qb^2+2b^3}{60} = \frac{30a^2b-3qb^2-2b^3}{60}$. La différence entre le segment $\frac{a^3}{3}$ exprimant la totalité des $x^2 = py+xy$ et ce dernier segment donnera alors, selon l'argument fallacieux de Newton, le segment qui mesure la totalité des py dans le domaine des segments. De là, il est alors aisé de passer à la détermination du segment qui, toujours d'après cet argument, mesure la totalité des y prise entre les valeurs $x = 0$ et $x = \mathsf{AB} = a$ de x, et constitue ainsi l'aire du triangle curviligne ABN, ce qui fournit la quadrature de l'hyperbole donnée :

$$\begin{aligned} s\left[\sum\nolimits_0^b [y]\right] &= \frac{1}{p}\left[\frac{a^3}{3} - \frac{30a^2b - 3qb^2 - 2b^3}{60}\right] \\ &= \frac{1}{p}\left[\frac{20a^3 - 30a^2b + 3qb^2 + 2b^3}{60}\right] \end{aligned} \tag{4.30}$$

Encore une fois, il ne serait pas difficile de traduire l'argument de Newton dans une succession d'inférences portant sur des expressions Algébriques et manifestant le rôle d'un algorithme de quadrature obéissant aux règles indiquées ci-dessus. Au delà du succès de Newton dans la quadrature de ses paraboles, et de l'erreur qui infirme son effort de carrer une hyperbole, c'est bien la mise en lumière du rôle de cet algorithme qui constitue le résultat essentiel des recherches qui suivirent la première lecture de l'*Arithmetica infinitorum*.

* * *

Si on voulait concentrer dans une seule formule les conclusions essentielles auxquels Newton parvint à la suite de sa première lecture de l'*Arithmetica infinitorum*, on devrait se réclamer de l'égalité suivante :

$$s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\sum_{i=0}^{2} a_i x^i\right]\right] = \sum_{i=0}^{2} \frac{a_i}{i+1}\left[\xi^{i+1}\right] \tag{4.31}$$

(où ξ est une valeur positive quelconque de x et où les a_i sont des coefficients convenables, aptes à rendre homogène l'équation de la courbe $y = \sum\limits_{i=0}^{2} a_i x^i$). Newton justifie cette égalité en ayant recours à des arguments essentiellement différents de ceux de Wallis, mais il interprète les résultats contenus dans la première partie de l'*Arithmetica infinitorum* d'une manière telle que cette égalité apparaît aussi comme étant une conséquence naturelle des plus élémentaires parmi ces résultats.

Cette même interprétation, étendue à l'ensemble des résultats de Wallis en matière de quadrature des paraboloïdes et des hyperboloïdes de tous les ordres, aurait pu justifier des égalités bien plus générales que celle-ci. En ne restant qu'aux seuls paraboloïdes, on aurait d'abord pu tirer de ces résultats l'égalité suivante :

$$s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right]\right] = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1}\left[\xi^{i+1}\right] \tag{4.32}$$

(où les a_i sont, comme ci-dessus, des coefficients convenables). En voulant suivre Wallis dans la généralisation qui le conduit d'abord à énoncer légalité (2.19), et ensuite à l'étendre à des exposants négatifs — tout en évitant de prendre parti à propos des questions difficiles concernant la signification géométrique des puissances non rationnelles et des rapports infinis ou plus qu'infinis — on aurait pu ensuite passer de là à l'autre égalité :

$$s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\sum_{i=0}^{n} a_i x^{q_i}\right]\right] = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{q_i+1}\left[\xi^{q_i+1}\right] \tag{4.33}$$

(où les q_i sont des exposants rationnels quelconques, plus grand que -1). En acceptant de suivre Wallis dans ses conclusions à propos de l'infinité du trapézoïde sous-tendu par une hyperbole, on aurait pu aussi admettre que dans cette dernière égalité l'exposant q_i prend la valeur -1. Enfin, en interprétant comme j'ai proposé de les faire[34] l'argument de Wallis à propos des rapports plus qu'infinis (ou négatifs), on aurait pu ajouter aux égalités précédentes l'une ou l'autre des trois égalités suivantes :

$$s\left[\sum\nolimits_\xi^\infty \left[\sum_{i=1}^{n} a_i x^{-i}\right]\right] = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i-1}\left[\xi^{-i+1}\right] \tag{4.34}$$

$$s\left[\sum\nolimits_\xi^\infty \left[\sum_{i=2}^{n} a_i x^{-i}\right]\right] = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i-1}\left[\xi^{-i+1}\right] \tag{4.35}$$

$$s\left[\sum\nolimits_\xi^\infty \left[\sum_{i=0}^{n} a_i x^{-q_i}\right]\right] = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{q_i-1}\left[\xi^{-q_i+1}\right] \tag{4.36}$$

(où les q_i sont des exposants rationnels positifs plus grands, ou éventuellement égaux à -1, les a_i étant toujours des coefficients convenables).

Dans les mois qui suivirent sa première lecture de l'*Arithmetica infinitorum* Newton prit des attitudes différentes faces à ces égalités et aux algorithmes qu'elles expriment. Parmi les notes qui accompagnent ses recherches, on en trouve certaines où il ne semble faire confiance qu'à l'algorithme exprimé par l'égalité (4.32), en cherchant à appliquer cet algorithme restreint à la solution d'un maximum de problèmes[35]. Dans d'autres cas, il semble faire directement confiance à l'algorithme exprimé par l'égalité (4.33)[36]. Dans d'autres cas encore, il semble accepter sans plus de justifications aussi bien l'algorithme exprimé par l'égalité (4.32) que celui exprimé par l'égalité (4.34)[37]. Finalement, dans d'autres cas, il cherche à justifier ces algorithmes (avec la seule exception relative au cas où l'exposant de x est égal à -1) sur la base d'arguments essentiellement différents de ceux de Wallis[38]. Dans la suite on traitera ces différents cas séparément.

[34] Cf. ci-dessus, p. 89
[35] Cf. la section 4.3.
[36] Cf. la section 4.2.
[37] Cf. la section 4.4.2.
[38] Cf. la section 6.1.

4.2 Entre les deux lectures : quadratures par différences et transformations

Avant de venir aux notes qui accompagnent la deuxième lecture de l'*Arithmetica infinitorum*, il faut rendre compte brièvement de quelques notes que Whiteside a séparées des précédentes et datées du début 1665, bien qu'il me semble plus raisonnable de les faire remonter à une période antérieure[39]. L'intérêt de ces notes tient au fait que Newton s'appuie directement, sans aucune justification, sur l'algorithme exprimé par l'égalité (4.33). Dans ces notes, il explore même la possibilité d'appliquer cet algorithme général, grâce à des transformations ou à des comparaisons convenables, à la quadrature de courbes exprimées par des équations entières non reconductibles à la forme $y = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$. La tentative de Newton n'eut pourtant pas de suites, et celui-ci se tourna bientôt vers d'autres directions de recherches.

Des quatre exemples qu'il considère, les deux premiers[40] exposent une méthode générale qu'on peut formuler comme suit. Supposons que deux courbes sont exprimées, par rapport au même système de coordonnées, par des équations $w = f(x)$ et $z = g(x)$ de la forme $y = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^{q_i}$ (les q_i étant des exposants rationnels quelconques, que l'on peut supposer plus grands que -1). Si on pose $y = z - w$ (avec $z > w$), il s'ensuit, quels que soient κ et ξ, que

$$\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi} [z] - \sum\nolimits_{\kappa}^{\xi} [w] = \sum\nolimits_{\kappa}^{\xi} [y] \tag{4.37}$$

Il suffira alors de carrer séparément les courbes d'équation $w = f(x)$ et $z = g(x)$ pour obtenir la quadrature de la courbe exprimée par l'équation $y - g(x) + f(x) = 0$.

Le premier exemple est parlant. En posant

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{ax} \\ z &= \sqrt{bx} \\ y &= z - w \end{aligned} \tag{4.38}$$

(avec $b > a$), on obtient

$$y^4 - 2y^2 (a+b) x + (b-a)^2 x^2 = 0 \tag{4.39}$$

et, en accord avec l'égalité (4.33) :

$$s\left[\sum\nolimits_{0}^{\xi} [y]\right] = \frac{2}{3}\xi\sqrt{\xi}\left[\sqrt{b} - \sqrt{a}\right] \tag{4.40}$$

Dans le troisième et le quatrième exemple[41], Newton considère des courbes définies par rapport à des coordonnées non orthogonales, dont les ordonnées sont définies en termes

[39] Cf. Newton (MP), I, **2**, 3, § 4, 242-244. La section 3 de la partie **2** du volume I des *Mathematical Papers*, contient les notes que Whiteside a ordonnées sous le titre "Miscellaneous Problems in Analytical Geometry and Calculus" [cf. ci-dessus, p. 163]. L'argument que Whiteside avance pour justifier sa datation [cf. *ibid* ., note 1, 242] est obscure et semble même suggérer une datation antérieure.

[40] Cf. Newton (MP), I, **2**, 3, § 4, [1] et [2], 242-243.

[41] Cf. Newton (MP), I, **2**, 3, § 4, [3] et [4], 243-244.

d'ordonnées orthogonales d'autres courbes. Dans le premier cas, il s'arrête bientôt[42], dans le deuxième, il parvient à carrer une courbe qu'il aurait pu aisément carrer par la méthode usuelle.

Bien qu'ingénieuses, les procédures précédentes ne pouvaient pas amener très loin. En s'appuyant sur l'algorithme exprimé par l'égalité (4.33), elles posaient de surcroît le problème de la justification d'un tel algorithme. Lorsqu'il reprend, au début de 1665, la lecture de l'*Arithmetica infinitorum*, pour s'intéresser à la quadrature du cercle y obtenue par Wallis, Newton cherche d'emblée à reformuler la méthode de ce dernier de telle sorte à qu'il ne soit amené qu'à employer la version restreinte de cet algorithme exprimé par l'égalité (4.32).

4.3 Au début de 1665, la deuxième lecture de l'*Arithmetica infinitorum* : la quadrature par série du cercle et de l'hyperbole

Les notes accompagnant cette deuxième lecture de l'*Arithmetica infinitorum*[43] se présentent d'abord sous la forme d'un résumé du traité de Wallis — et en particulier de sa deuxième partie consacrée à la quadrature du cercle (et de l'ellipse) —, mais elles se transformèrent très vite en une occasion pour mettre à l'épreuve cette nouvelle version de la méthode de Wallis. Sans doute plus générale et plus agile que celle employée une année auparavant pour carrer deux paraboles, la nouvelle méthode de Newton n'est pas sans s'appuyer sur des idées que ce dernier avait exploitées à cette occasion.

4.3.1 Un court résume de l'*Arithmetica infinitorum*

Considérons d'abord, le résumé de l'*Arithmetica infinitorum*[44]. Bien que Newton suive de très près le parcours du traité de Wallis, sa reconstruction porte les traces évidentes d'une attitude nouvelle.

En laissant de côté toute justification que Wallis avait donné pour ces résultats, Newton se concentre sur l'aspect algorithmique de la méthode, sur la structure et sur les propriétés formelles de celles qu'il semble interpréter comme des véritables opérations non Algébriques. Il souligne par exemple comment les séries de Wallis sont univoquement déterminées par des indices entiers, fractionnaires ou sourds[45], comment les indices des séries composées se trouvent en composant les indices des séries élémentaires[46], et comment les quadratures de Wallis s'obtiennent en opérant sur les indices[47]. Toute la première partie du traité de Wallis est ainsi réduite à un simple algorithme opérant sur des indices et est réexposée très rapidement. Newton est ainsi très vite à même conditions d'aborder la deuxième partie de ce traité qui s'ouvre, comme on l'a vu dans le chapitre 2, avec la présentation du résultat exprimé par l'égalité (2.38), que Newton considère comme relevant des "surfaces [...] composées par

[42]Cf. Newton (MP), I, **2**, 3, § 4, note (11), 243.
[43]Cf. la note (4), ci-dessus.
[44]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, [1], 96-104.
[45]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, §3, [1], 96-97.
[46]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, §3, [1], 97-98.
[47]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, §3, [1], 98.

deux ou plusieurs [...] séries" telles que $\sum_r$, et comme étant susceptible de donner les "aires" de ces surfaces[48].

Parmi ces surfaces, Newton ne considère que celles délimitées par les courbes qu'il exprime par les équations[49] :

$$\begin{array}{l} y = (a^2 - x^2)^0 = u \\ y = (a^2 - x^2)^1 = a^2 - x^2 \\ y = (a^2 - x^2)^2 = a^4 - 2a^2x^2 + x^4 \\ y = (a^2 - x^2)^3 = a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6 \\ \&c. \end{array} \tag{4.41}$$

Et il rappelle que ces surfaces ont respectivement les rapports de 1 à 1[50], de 2 à 3, de 8 à 15, de 48 à 105, avec les parallélogrammes circonscrits. Si on interpole cette succession d'équations, en introduisant les "termes"

$$\begin{array}{l} y = (a^2 - x^2)^0\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - x^2} \\ y = (a^2 - x^2)^1\sqrt{a^2 - x^2} = (a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2} \\ y = (a^2 - x^2)^2\sqrt{a^2 - x^2} = \left(a^4 - 2a^2x^2 + x^4\right)\sqrt{a^2 - x^2} \\ \&c. \end{array} \tag{4.42}$$

respectivement, entre le premier et le deuxième terme, entre le deuxième et le troisième, entre le troisième et le quatrième, etc., on obtient, selon Newton, une nouvelle succession d'équations exprimant des courbes qui "observent une progression géométrique". De là il s'ensuit que les aires de ces courbes "doivent observer quelque type de progression", en particulier elles doivent former la progression[51]

$$\left\{1, \Box, \frac{2}{3}, *, \frac{8}{15}, *, \frac{48}{105}, *, \frac{384}{945}, *, \frac{3840}{10395}, \dots\right\} \tag{4.43}$$

On en conclut que le deuxième terme de cette progression, donne "l'aire de la courbe $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, [c'est-à-dire] le cercle"[52].

Le même raisonnement s'applique aussi — observe Newton, en continuant à reconstruire à sa manière l'argument de Wallis — aux courbes d'équations

$$\begin{array}{l} y = (ax - x^2)^{\frac{0}{2}} = u \\ y = (ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ax - x^2} \\ y = (ax - x^2)^{\frac{2}{2}} = a^2 - x^2 \\ y = (ax - x^2)^{\frac{3}{2}} = (ax - x^2)\sqrt{ax - x^2} \\ \&c. \end{array} \tag{4.44}$$

[48]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, §3, [1], 99. Les termes "surfaces [*superficies*]" et "aires [*area*]" sont naturellement de Newton. Je suppose que le premier se réfère à une figure plane quelconque et le second ait la signification que je lui assignée ci-dessus [cf. pp. 176 et suiv.].

[49]Bien qu'il la considère implicitement, Newton n'écrit pas, en vérité, la première de ces équations.

[50]Évidemment, Newton n'indique pas ce rapport [cf. la note (49), ci-dessus].

[51]On remarque que, après avoir identifié les rapports $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{48}{105}$, avec les rapports des aires des courbes considérées avec les parallélogrammes circonscrits, Newton les identifie maintenant avec ces aires elles-mêmes, en supposant que l'aire des parallélogrammes circonscrits est à chaque fois donnée par les segment unité. On remarque aussi que, pour la façon dont il est utilisé, le symbole "$\Box$" indique ici le rapport réciproque au rapport que Wallis indique par ce même symbole [cf. la note 62 du chapitre 2].

[52]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, §3, [1], 99.

dont les aires forment la progression

$$\left\{1, \Box, \frac{1}{6}, *, \frac{1}{30}, *, \frac{1}{140}, *, \frac{1}{630}, \dots\right\} \tag{4.45}$$

qui est telle que son deuxième terme nous donne aussi l'aire du cercle, car il indique le rapport entre un demi-cercle et le carré construit sur son diamètre[53].

Après avoir observé que les successions (4.43) et (4.45) peuvent être réduites à des successions plus simples, en les multipliant terme à terme par des successions géométriques convenables, ou en les additionnant ou les soustrayant entre elles terme à terme (ce que Wallis n'avait pas remarqué) — , Newton complète la succession (4.43) en remplissant les places vides avec les multiples rationnels de $\Box$ donnés par la troisième ligne de la matrice (2.59). Enfin, en passant aux inverses[54], il retrouve, en appliquent le même argument appliqué par Wallis, l'encadrement (2.72), et, en s'appuyant sur un argument différent et plus simple que celui de Wallis, un autre encadrement de $\Box$, qui converge néanmoins plus lentement que l'encadrement (2.72)[55].

4.3.2 La quadrature du cercle

Cette reconstruction, assez libre en vérité, du parcours de Wallis est d'autant plus intéressante qu'elle préconise la nouvelle méthode de quadrature que Newton présente tout de suite après, en l'appliquant d'emblée à la quadrature du cercle et de l'hyperbole[56].

Le premier problème que Newton aborde[57], dès qu'il a terminé de rédiger son résumé, est le suivant :

> Having the signe [le sinus] of any angle to find the angle or to find the content of any segment of a circle.[58]

Comme on le voit d'emblée, il s'agit d'un problème très différent de celui que Wallis avait abordé dans la deuxième partie de l'*Arithmetica infinitorum* : Newton ne se limite pas à ajouter au problème de la quadrature du cercle le problème de la détermination de

[53]Il est donc clair que le symbole "$\Box$" n'a pas la même signification dans les successions (4.43) et (4.45).

[54]Cf. la note (51) ci-dessus.

[55]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, [1], 102-104. Aujourd'hui on exprimerait le nouvel encadrement trouvé par Newton par le biais des inégalités suivantes :

$$\prod_{i=1}^{j-1} \frac{(2i+1)^2}{(2i)(2i+1)} < \frac{4}{\pi} < \frac{2j+1}{2j} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{(2i+1)^2}{(2i)(2i+1)}$$

valables pour tout nombre entier positif différent de zéro.

[56]Il est aisé de noter que les équations 4.41, 4.42 et 4.44 ne sont pas, en général, homogènes. On peut pourtant les considérer comme étant des schémas d'équations, exprimant des courbes à la rigueur différentes selon le choix du segment unité. Comme il ne s'agit que de carrer ces courbes, il suffira alors de supposer que l'aire de ces courbes est calculée relativement au même segment unité. Ceci vaut aussi pour la méthode de quadrature proposée par Newton. Les courbes que ce dernier considère sont pourtant toutes exprimées en termes d'un segment unité, de sorte que l'on peut supposer que ce même segment unité sert de facteur d'homogénéisation, lorsque les équations exprimant ces courbes ne sont pas homogènes. Comme les aires que Newton parvient à déterminer seront exprimées par des séries entières non homogènes, on devra alors supposer que les produits intervenant dans ces séries sont référés à ce même segment.

[57]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3,§ 3, [2], 104-111.

[58]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, [2], 104.

l'arc-sinus d'un sinus donné ; en introduisant une nouveauté bien plus profonde par rapport à l'approche de Wallis, il conçoit d'emblée le problème de la quadrature du cercle comme étant le problème de la détermination de l'aire ("*the content*", comme dit Newton) d'un secteur circulaire quelconque. Cela signifie non seulement que pour lui carrer une courbe revient à en déterminer l'aire, mais aussi qu'il imagine la possibilité de déterminer non pas une aire constante, telle que celle d'un quart de cercle, d'un demi-cercle, ou d'un cercle, mais une aire variable, comme celle d'un secteur circulaire. C'est justement ce que Wallis n'avait pas su faire, et qu'il n'avait même pas eu le courage de chercher à faire.

Naturellement, il ne faut pas penser ici le sinus et l'arc-sinus comme étant des fonctions transcendantes, dont le domaine est un sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels. Ceux-ci ne sont qu'un rapport et un angle variables, dont les valeurs déterminent le secteur circulaire qu'il s'agit de carrer. Si on suppose que le rayon du cercle en question est le segment unité, ou est de toute façon un segment connu, alors on peut identifier le sinus avec un segment variable. C'est ce segment que Newton choisi comme étant la variable indépendante de ses deux problèmes. Quant à la relation entre ces deux problèmes (qui du point de vue de Wallis et de la géométrie classique sont essentiellement distincts), elle devient évidente dès que l'on pense le premier problème comme consistant à déterminer l'aire d'un secteur angulaire variable.

En suivant l'ordre choisi par Newton, considérons d'abord le premier de ces problèmes.

Soit $\mathsf{BMN_1C}$ (fig. 3) l'arc d'un quart de cercle de rayon unitaire déterminé par l'angle $\widehat{\mathsf{BAN}}_1$, qu'on va concevoir comme étant une valeur de l'angle variable $\widehat{\mathsf{BAM}}$ correspondant au point courant M[59]. Les segments variables AP et PM, seront alors respectivement le sinus et le cosinus de ce dernier angle. Si on réfère l'arc de cercle $\mathsf{BMN_1C}$ à l'axe AH d'origine A et que l'on prend, à partir de cet axe, des ordonnées orthogonales, alors on peut poser $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{PM} = y$, ce qui donne pour l'arc de cercle $\mathsf{BMN_1C}$ l'équation[60]

$$y = \sqrt{u - x^2} \tag{4.46}$$

Si on pose $\mathsf{AQ} = \xi$, il s'ensuit que le trapézoïde $\mathsf{BN_1QA}$ est constitué par la totalité des ordonnées y déterminées par cette équation, prise entre les valeurs $x = 0$ et $x = \xi$ de x. Pour en trouver l'aire en suivant la méthode que Newton avait mis au point après sa première lecture de l'*Arithmetica infinitorum*, il faudrait chercher une autre grandeur géométrique équivalente à cette totalité, dont on connaît la mesure dans le domaine des segments. Cette recherche semble pourtant destinée à l'échec, et cela explique que Newton essaie de résoudre le problème par une autre voie, une voie qui lui est suggérée par le résumé précèdent du traité de Wallis.

L'équation (4.46) peut être pensée comme étant le deuxième terme d'une succession

[59]La notation avec indices n'est naturellement pas due à Newton. Newton ne distingue non plus explicitement entre le point courant M et le point N_1.

[60]En suivant la suggestion de Descartes, Newton note directement le segment unitaire donnant le rayon du cercle considéré par la chiffre "1" [cf. la note (65) du chapitre 1]. Pour éviter toute confusion entre deux objets, un nombre et un segment, qui du point de vue de Newton ne peuvent que rester bien distincts entre eux, je préfère noter ce segment par la lettre "u", comme dans le chapitre 1.

d'équations analogue à la succession (4.44) :

$$\begin{array}{l} y_0 = (u-x^2)^{\frac{0}{2}} = u \\ y_1 = (u-x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u-x^2} \\ y_2 = (u-x^2)^{\frac{2}{2}} = u-x^2 \\ y_3 = (u-x^2)^{\frac{3}{2}} = (u-x^2)\sqrt{u-x^2} \\ y_4 = (u-x^2)^{\frac{4}{2}} = u^2-2ux^2+x^4 \\ \&c. \end{array} \tag{4.47}$$

exprimant respectivement, par rapport au même système de coordonnées, les courbes $\mathsf{BN_0D}$, $\mathsf{BN_1C}$, $\mathsf{BN_2C}$, $\mathsf{BN_3C}$, $\mathsf{BN_4C}$, &c. Or, observe Newton[61],

> since all the ordinately applyed lines in these figures BDCQ, $\mathsf{BN_1CQ}$, $\mathsf{BN_2CQ}$, $\mathsf{BN_3CQ}$ &c. are geometrically proportionall their areas $\mathsf{BN_0QA}$, $\mathsf{BN_1QA}$, $\mathsf{BN_2QA}$, $\mathsf{BN_3QA}$, $\mathsf{BN_4QA}$, &c. will observe some proportion amongst one another.

Le problème sera alors celui de déterminer de quelle "proportion" il s'agit.

Pour ce faire, Newton commence par carrer les courbes exprimées par les équations de place impaire[62] :

$$\begin{array}{lll} s\,[\mathsf{BN_0QA}] & = s\left[\sum_0^\xi [y_0]\right] & = \xi \\ s\,[\mathsf{BN_2QA}] & = s\left[\sum_0^\xi [y_2]\right] & = \xi - \frac{1}{3}\xi^3 \\ s\,[\mathsf{BN_4QA}] & = s\left[\sum_0^\xi [y_4]\right] & = \xi - \frac{2}{3}\xi^3 + \frac{1}{5}\xi^5 \\ s\,[\mathsf{BN_6QA}] & = s\left[\sum_0^\xi [y_6]\right] & = \xi - \frac{3}{3}\xi^3 + \frac{3}{5}\xi^5 - \frac{1}{7}\xi^7 \\ s\,[\mathsf{BN_8QA}] & = s\left[\sum_0^\xi [y_8]\right] & = \xi - \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{6}{5}\xi^5 - \frac{4}{7}\xi^7 + \frac{1}{9}\xi^9 \\ \&c. & & \end{array} \tag{4.48}$$

Il ne fournit aucun argument pour justifier ces résultas. Il est néanmoins clair qu'il les obtient en appliquant l'algorithme exprimé par l'égalité (4.32)[63], qu'il ne fait ainsi que supposer.

[61] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, §3, [2], 104-105. Je corrige une erreur d'écriture évidente de Newton [cf. *ibid.*, note (46), 105].

[62] Les symboles "$s\,[\mathsf{BN}_{2i}\mathsf{QA}]$" $(i = 0, 1, 2, ...)$ ne sont évidemment pas de Newton, qui se limite à égaliser les polynômes $\sum_{j=0}^{i} \frac{1}{2j+1}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} x^{2j+1}$ aux trapézoïdes $\mathsf{BN}_{2i}\mathsf{QA}$ [cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, [2], 105-106].

[63] Si η, μ et m sont des nombres entiers positifs, d'après cet algorithme, on obtient en vérité

$$s\left[\sum_0^\xi [\eta u^\mu x^m]\right] = \frac{\eta}{m+1}\left[u^\mu \xi^{m+1}\right]$$

mais, conformément à la définition de la multiplication dans l'Algèbre des Descartes, on a

$$u^\mu \xi^{m+1} : u = u^{\mu-1}\xi^{m+1} : u$$

En partant de ces prémisses, très différentes de celles de Wallis, l'argument de Newton est de loin plus simple et direct que celui de ce dernier, et il est à même de conduire d'emblée à une conclusion plus générale. Au lieu de chercher une double interpolation de la matrice donnant le triangle de Pascal — pensée comme une matrice donnant les valeurs du rapport (2.49) pour les différentes valeurs de p et de λ —, en visant la détermination d'un rapport constant, Newton va chercher à interpoler une seule fois, et seulement entre les colonnes, cette même matrice — en la pensant plutôt comme une matrice donnant les (valeurs absolues des) numérateurs des coefficients numériques des polynômes intervenant dans les égalités (4.48) —, en visant la détermination des coefficients numériques d'autres polynômes de la même forme, donnant les aires des courbes exprimées par les équations de place paire dans la succession d'équations (4.47). Les polynômes exhibés par les égalités (4.48) sont en fait tous de la même forme : ils ne comprennent que des puissances impaires de ξ et leurs coefficients sont des nombres fractionnaires à signes alternés, dont le dénominateur est égal à l'exposant de la puissance de ξ qu'ils affectent. Si l'on suppose que les aires des courbes exprimées par les équations de place paire dans la succession d'équations (4.47) sont exprimées par des polynômes de la même forme, il suffit, pour déterminer entièrement ces polynômes, de déterminer les numérateurs de ses coefficients numériques, en exploitant la loi qui lie entre eux les numérateurs des coefficients numériques des polynômes exhibés par les égalités (4.48).

Raisonner de cette manière signifie concentrer son attention seulement sur ces derniers polynômes, en considérant ceux-ci indépendamment des courbes dont ils expriment les aires. Lorsque ces polynômes sont considérés de cette manière, pour interpoler la succession à laquelle ils appartiennent il faut comprendre la raison qui fait qu'ils s'arrêtent après un certain nombre de termes comme étant une conséquence d'une règle qui ne fait référence ni à la nature des courbes dont ils expriment les aires, ni à leur place dans cette succession. En effet, la règle évidente $N_\nu = 2\nu - 1$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) — où N_ν est l'ordre du ν-ième polynôme dans la succession de polynômes exhibés par les égalités (4.48), exprimant l'aire du trapézoïde $\mathsf{BN}_{2(\nu-1)}\mathsf{QA}$ — donne, lorsqu'elle est appliquée à des valeurs intermédiaires de ν entre 1 et 2, 2 et 3, … (c'est-à-dire aux valeurs $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$), des valeurs paires de N_ν, ce qui est incompatible avec l'hypothèse que les polynômes qu'il faut déterminer aient la même forme que les polynômes intervenant dans les égalités (4.48).

L'idée de Newton est simple et géniale : après avoir observé que les numérateurs des coefficients numériques des polynômes exhibés par les égalités (4.48) constituent les entrées successives de la matrice de nombres figurés déjà étudiée par Wallis — ce qui pour nous est le triangle de Pascal —, il complète cette matrice avec l'introduction d'une infinité de zéros ; il pense, en d'autres termes, les polynômes exhibés par les égalités (4.48) comme des polynôme infinis dont les coefficients s'annulent au-delà d'une certaine puissance de ξ. Si on forme une matrice dont les entrées $G_{[i,j]}$ ($i, j = 0, 1, 2, \ldots$) sont respectivement les coefficients qui affectent les produits $(-)^i \frac{1}{2i+1}\xi^{2i+1}$ ($i = 0, 1, \ldots$) dans ces polynômes, on obtient la matrice suivante :

---

et de là il s'ensuit évidemment que :

$$u^\mu \xi^{m+1} = u^{\mu-1}\xi^{m+1} = u^{\mu-2}\xi^{m+1} = \ldots = \xi^{m+1}$$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\ldots$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	$\ldots$
1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\ldots$
2	0	0	1	3	6	10	15	21	$\ldots$
3	0	0	0	1	4	10	20	35	$\ldots$
4	0	0	0	0	1	5	15	35	$\ldots$
5	0	0	0	0	0	1	6	21	$\ldots$
6	0	0	0	0	0	0	1	7	$\ldots$
7	0	0	0	0	0	0	0	1	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

(4.49)

dont tous les termes sont donnés, à partir des termes $G_{[0,j]} = 1$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ et $G_{[i,0]} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, par la loi récursive

$$G_{[i,j]} = G_{[i,j-1]} + G_{[i-1,j-1]} \tag{4.50}$$

qui caractérise le triangle de Pascal[64]. Pour connaître l'ordre du ν-ième polynôme, il suffit alors de chercher, selon cette loi, les entrés de la colonne $j = \nu - 1$ et de vérifier à partir de quelle ligne ces entrées prennent la valeur 0.

À partir de ce point, les notes de Newton deviennent lapidaires. Celui-ci écrit, sans aucune explication, la matrice qui résulte en interpolant entre les colonnes la matrice (4.49)[65] :

$i \backslash j$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$\ldots$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\ldots$
1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$\ldots$
2	0	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	10	$\ldots$
3	0	$\frac{1}{16}$	0	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{5}{16}$	1	$\frac{35}{16}$	4	$\frac{105}{16}$	10	$\ldots$
4	0	$-\frac{5}{128}$	0	$\frac{3}{128}$	0	$-\frac{5}{128}$	0	$\frac{35}{128}$	1	$\frac{315}{128}$	5	$\ldots$
5	0	$\frac{7}{256}$	0	$-\frac{3}{256}$	0	$\frac{3}{256}$	0	$-\frac{7}{256}$	0	$\frac{63}{256}$	1	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$

(4.51)

Et il parvient, à partir de là, à exprimer "l'aire BQAN_1" par un polynôme indéfiniment prolongé, où les coefficients de ξ^{2i+1} $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ sont obtenus en multipliant $(-)^i \frac{1}{2i+1}$

[64]Il est facile de vérifier que la matrice (4.49) est liée à la matrice (2.50) de Wallis par la simple règle :

$$\begin{array}{ll} G_{[i,j]} = 0 & [i > j] \\ G_{[i,j]} = F_{[i+1,j-i+1]} & [i \leq j] \end{array}$$

[65]L'entré $G_{[4,\frac{1}{2}]}$ de cette matrice est bien $-\frac{5}{128}$ et non pas $-\frac{3}{128}$ comme cela apparaît par erreur dans les *Mathematical Papers* [cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, [2], 107].

par les termes $G_{\left[i,\frac{1}{2}\right]}$ donnés par la matrice (4.51) :

$$\begin{aligned} s\,[\mathsf{BN_1QA}] &= s\left[\sum_0^{\xi}\left[\sqrt{u-x^2}\right]\right] \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \xi - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\xi^3 + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{8}\right)\xi^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{16}\right)\xi^7 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{9}\left(-\frac{5}{128}\right)\xi^9 + \&c. \end{array} \right. \\ &= \xi - \frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{40}\xi^5 - \frac{1}{112}\xi^7 - \frac{5}{1152}\xi^9 + \&c. \end{aligned} \tag{4.52}$$

* * *

La démarche de Newton pose trois problèmes à son interprète : d'abord, il s'agit de comprendre comment Newton est arrivé a construire sa matrice interpolée ; ensuite il s'agit de reconstruire un argument sur lequel il aurait pu s'appuyer pour se convaincre de la légitimité de l'inférence qui le conduit de cette dernière matrice jusqu'à l'égalité (4.52) ; enfin, il s'agit d'interpréter correctement cette égalité[66].

Pour ce qui est du premier problème, une conjecture semble s'imposer : Newton a exploité les résultats déjà obtenus par Wallis pour interpoler sa matrice, jusqu'à un certain point, et quant aux termes $G_{\left[i,\mu-\frac{1}{2}\right]}$ pour $i=0,1,2,\ldots$ et $\mu=i,i+1,\ldots$[67], et il a ensuite utilisé l'égalité

$$G_{\left[i,\mu-\frac{1}{2}\right]} = G_{\left[i,\mu+\frac{1}{2}\right]} - G_{\left[i-1,\mu-\frac{1}{2}\right]} \tag{4.53}$$

obtenue en généralisant l'égalité (4.50), pour calculer à rebours les termes $G_{\left[i,\mu-\frac{1}{2}\right]}$, pour $i=2,3,\ldots$; $\mu=0,1,\ldots,i-2$, à partir des termes $G_{\left[i,\mu+\frac{1}{2}\right]}$ et $G_{\left[i-1,\mu-\frac{1}{2}\right]}$.

S'il a suivi ce parcours, il a alors interpolé sa matrice en procédant par des aller et retour continus. Cela signifie que la règle qu'il a suivie pour calculer les entrées de sa matrice interpolée ne fournit directement aucune formule qui peut servir à calculer toutes les entrées de n'importe quelle colonne intermédiaire de cette matrice, en termes de la valeur des indices qui en déterminent la position ou, du moins, des entrées précédentes appartenant à cette même colonne, bien qu'elle puisse être appliquée indéfiniment pour calculer les entrées d'autant de lignes et colonnes de cette matrice que l'on le veut[68]. En particulier, cela signifie que les calculs qui ont conduit Newton à déterminer les premiers coefficients du polynôme

[66]Newton écrit tout simplement ceci : "Soe that

$$1\times x - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times x^3 - \frac{1}{8}\times\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{16}\times\frac{1}{7}x^7 - \frac{5}{128}\times\frac{1}{9}x^9\&c:$$

is the area $\mathsf{BAQN_1}$" [cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, [2], 108].

[67]Ces termes sont des nombres figurés à un indice fractionnaire, et ils figurent dans la matrice (2.57) obtenue par Wallis après sa première interpolation de la matrice (2.50). En particulier, on aura [cf. la note (64), ci-dessus] :

$$G_{\left[i,\mu-\frac{1}{2}\right]} = F_{\left[i+1,\mu-i+\frac{1}{2}\right]} \qquad (i=0,1,\ldots\ ;\ \mu=i,i+1,\ldots)$$

[68]Newton n'écrit que les premières sept entrées de chacune des premières six colonnes intermédiaires de la matrice (4.51) et la septième entrée de la septième colonne intermédiaire [cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, [2], 107].

intervenant dans l'égalité (4.52) ne tiennent ni à une règle directe permettant de calculer les coefficients restants à ,condition de connaître leur position dans ce polynôme, ni à une règle récursive permettant de calculer ces coefficients à condition de connaître les coefficients précédents. Ces calculs portent plutôt sur l'ensemble des entrées de la matrice (4.51) pris dans sa totalité. Le symbole "&*c*.", avec lequel Newton indique une continuation indéfinie de ce polynôme, ne renvoie donc pas à une formule compacte, donnant soit l'expression de ces coefficients en termes d'un indice variable, soit une règle de formation récursive, mais renvoie à des calculs de plus en plus pénibles, qui *de facto* cachent la nature et les propriétés de ces coefficients. Pour obtenir une formule compacte, Newton aurait dû soit procéder par induction, en raisonnant sur les premiers coefficients de ce polynôme, soit s'aventurer dans des longs calculs, visant à dévoiler un invariant algorithmique convenable. Prise en tant que telle, l'égalité (4.52) ne dépend pas des résultats de cette recherche, et semble au contraire (comme on le verra ci-dessous) la promouvoir. Elle se limite à présenter les premiers termes du polynôme infini qui exprime l'aire du trapézoïde $\mathsf{BN}_1\mathsf{QA}$ et à faire suivre ces termes par un symbole tel que "&*c*.", dont la signification exacte reste ainsi inconnue. On est donc bien loin (même d'un point de vue purement formel) d'une intégration par série de la fonction $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Pour ce qui est du deuxième problème, on doit y distinguer trois aspects.

D'abord, Newton semble avoir été convaincu par un argument à la Wallis que les polynômes qu'on aurait pu obtenir en interpolant la succession de polynômes intervenant dans les égalités (4.48) auraient exprimé les aires des courbes d'équation

$$y_{2k+1} = (u - x^2)^{\frac{2k+1}{2}} \tag{4.54}$$

($k = 0, 1, 2, ...$). Un tel argument, *ex legis continuitatis*[69], avait conduit Wallis à des résultats largement acceptés, et Newton ne semble pas nourrir de doutes à son regard.

En deuxième lieu, il a certainement été persuadé que ces polynômes auraient dû être prolongés indéfiniment par le même argument qu'il a utilisé pour interpoler la matrice (4.49), en parvenant à la matrice (4.51). Si ces polynômes présentent en effet un nombre indéfini de termes, c'est que cet argument conduit à calculer indéfiniment les coefficients numériques affectant ces termes, et à leur assigner indéfiniment une valeur différente de zéro. Le résultat obtenu par Newton ne semble donc pas dériver d'une confiance préalable en la nécessité ou la possibilité d'exprimer l'aire des courbes exprimées par les équations (4.54) par des polynôme infinis, mais de la simple application d'une procédure qui conduit à écrire des polynômes qui semblent indéfiniment se prolonger.

Le troisième aspect est sans doute le plus délicat : quel argument aurait convaincu Newton qu'une interpolation de la matrice (4.49) entre les seules colonnes aurait suffit pour trouver les coefficients des polynômes intermédiaires ? quel argument l'aurait-il convaincu que ces polynômes devaient être nécessairement impairs ? Newton aurait pu s'appuyer sur l'algorithme exprimé par l'égalité (4.32) seulement s'il avait pu supposer que la racine carrée du binôme $u - x^2$ est à son tour donnée par un polynôme paire composé par un nombre indéfini de termes. En effet, en posant dans les équations (4.54)

$$\sqrt{u - x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^{2i} \tag{4.55}$$

[69]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, note (19), 99.

où les A_i $(i = 0, 1, \ldots)$ sont des coefficients indéterminés, on obtient

$$y_{2k+1} = (u - x^2)^k \sqrt{u - x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[A_i \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) x^{2(i+j)} \right] \tag{4.56}$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots)$, et il suffit donc d'appliquer à ces équations l'algorithme en question pour obtenir, en tant qu'expression des aires des trapézoïdes $\sum_0^{\xi} [y_{2k+1}]$, des polynôme impairs dont les coefficients se calculent aisément à partir des coefficients A_i. Pourtant, la possibilité d'exprimer ainsi la racine carré d'un binôme semble être l'un des résultats auxquels l'argument de Newton permet de parvenir[70], et non pas un acquis préalable de cet argument. Il ne reste donc qu'à croire que ce dernier ait d'abord cédé à la facilité et à la fascination d'une analogie formelle simple et élégante, et qu'il ait ensuite trouvé une confirmation de sa conjecture dans les approximations numériques que l'égalité (4.52) permet de dériver.

Si on suppose que $\xi = qu$, q étant un nombre quelconque, alors, quel que soit le nombre entier positif μ, il s'ensuit que $\xi^\mu = q^\mu u^\mu = q^\mu u$, donc, si on pose dans l'égalité (4.52) $\xi = u$ et que l'on calcule la somme, approchée jusqu'à la dixième décimale, des premiers sept termes du polynôme exhibé par cette égalité (ceux que la matrice écrite par Newton permet de calculer[71]), on obtient

$$\begin{aligned} s\,[\mathsf{BN_1CA}] &= s\left[\sum_0^u \left[\sqrt{u - x^2}\right]\right] \\ &= \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816} - \frac{21}{13312}\right) u \\ &= \frac{u}{1,264220642} = (0,7910011646)\, u \end{aligned} \tag{4.57}$$

qui, comparée à l'égalité connue

$$s\,[\mathsf{BDCA}] = s\,[Q(u)] = u^2 = u \tag{4.58}$$

donne, selon la définition même du segment $s\,[\mathcal{A}]$ qui mesure une grandeur géométrique $\mathcal{A}$ dans le domaine des segments :

$$\frac{s\,[\mathsf{BN_1CA}]}{s\,[\mathsf{BDCA}]} = \frac{\mathsf{BN_1CA}}{\mathsf{BDCA}} = 0,7910011646 \tag{4.59}$$

Par contre si on calcule, selon l'égalité (2.74) prolongée jusqu'à la valeur $i = 30$ de l'indice i, la valeur approchée à la dixième décimale, du rapport entre un quart de cercle quelconque et le carré construit sur son rayon obtenu d'après la méthode de Wallis, on obtient[72]

$$\frac{\mathsf{BN_1CA}}{\mathsf{BDCA}} = \frac{1}{1,263013218} = 0,7917573513 \tag{4.60}$$

[70] Cf. ci-dessous, p. 204.

[71] Cf. la note (68), ci-dessus.

[72] On pourra observer, par comparaison, que la valeur de $\frac{\pi}{4}$ approchée jusqu'à la dixième décimale, calculée avec les méthodes modernes est

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1,273239545} = 0,7853981635$$

Si on pose dans l'égalité (4.52) $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}u$ et que l'on égalise par approximation le rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ avec le rapport $\frac{1}{1{,}414}$, en procédant de la même manière, on obtient la valeur

$$\frac{1}{1.555360842} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2.544933205} = 0,3929376213 \tag{4.61}$$

pour le rapport entre le huitième de cercle et le carré construit sur son rayon. Par contre, si on calcule ce même rapport selon l'égalité (2.74) prolongée jusqu'à la valeur $i = 30$, on obtient la valeur $0,3958786757$.

Il n'est pas de surcroît difficile de vérifier que si on ajoute dans le polynôme exhibé par l'égalité (4.52) des termes correspondants aux puissances paires de ξ affectés par des coefficients numériques négatifs indéterminés, tels qui respectent la loi de décroissance des valeurs absolues des coefficients de ce polynôme, on obtient dans les deux cas précédents, déjà après le terme de puissance 3, des valeurs largement inférieures à celles obtenues d'après l'égalité (2.74) prolongée jusqu'à la valeur $i = 5$. Si des termes de cette sorte entraient dans ce polynôme, ils ne pourraient donc pas être affectés par des coefficients numériques négatifs et respecter cette loi de décroissance.

On ne peut pas raisonnablement douter qu'un tel argument fondé sur des approximations numériques aurait été largement suffisant pour convaincre Newton de l'exactitude de l'égalité (4.52), et il est aussi fort probable qu'il en employa un similaire.

Cela nous conduit directement au troisième problème. Au début de 1665, Newton travaille encore à l'intérieur de la géométrie cartésienne, en se limitant à introduire dans cette géométrie des méthodes nouvelles conduisant à des résultats que Descartes n'aurait pas pu obtenir avec ses seuls moyens. Bien qu'il opère ainsi sur des expressions Algébriques, et qu'il considère ses polynômes pour leurs propriétés formelles, il semble penser ces expressions comme étant des termes dénotant des segments (des noms ou des descriptions définies pour ces segments) et concevoir ses égalités comme étant des relations entre ces grandeurs. Les objets propres de Newton semble donc être encore des objets géométriques, bien que désormais l'usage de l'Algèbre de Descartes permette d'élargir considérablement les domaines de ces objets par rapport à la géométrie classique, et que l'introduction de la notion d'aire d'une courbe rende possible d'étudier et exprimer les propriétés d'une figure bidimensionnelle comme si elle était projetée dans le domaine des segments. Le fait que l'argument envisagé par Newton conduise de lui-même à l'exhibition de polynômes comportant un nombre indéfini de termes ne semble pas de surcroît dériver d'une théorie préalablement établie concernant la nature et les propriétés des séries entières. Bien sur, Newton ne pouvait pas ne pas se rendre compte que la substitution d'un segment plus grand que u à ξ dans l'égalité (4.52), aurait amené à la considération d'un polynôme comportant un nombre indéfini de termes dont la somme croît sans limite à fur et à mesure que le nombre de ces termes augmentent. Mais cette substitution aurait aussi rendu insensé tout son argument géométrique, qui porte sur un quart de cercle de rayon unitaire. Là où nous voyons aujourd'hui une série dont la convergence dépend de la valeur de ξ, Newton ne pouvait voir qu'un polynôme indéfiniment prolongé qui pouvait dénoter l'aire cherchée seulement par le bais d'une approximation. L'écriture de ce polynôme posait ainsi un problème en même temps qu'il en résolvait un autre, ou, pour être plus précis, réduisait le problème de la quadrature du cercle à un autre problème : le problème de réécrire ce même polynôme de manière à le rendre capable d'indiquer, de lui même, la procédure à suivre pour calculer indéfiniment ses termes, et à lui permettre ainsi de se présenter comme une expression, pour ainsi dire autonome, d'un certain segment (dont l'existence était assurée par la nature de la question abordée).

* * *

Ce dernier problème est évidemment le même que celui que j'ai évoqué en concluant mes remarques concernant le premier des trois problèmes que la démarche de Newton pose à son interprète. Et il est aussi le problème que Newton résout tout de suite après avoir écrit l'égalité (4.52)[73]. Soit en procédant par induction à partir de la considération des premiers termes du polynôme exhibé par cette égalité, soit en composant l'égalité (4.53) avec une formule analogue à celle exprimée par l'égalité (2.56), capable de déterminer les termes[74] $G_{\left[i,\mu-\frac{1}{2}\right]}$ pour $i = 0, 1, \ldots$ et $\mu = i, i+1, \ldots$, Newton observe que chaque coefficient de ce polynôme peut être obtenu comme un quotient de produits tels que

$$\frac{0 \times 1 \times (-1) \times 3 \times (-5) \times 7 \times (-9) \times 11}{0 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14} \&c. \tag{4.62}$$

ce qui, en introduisant une notation plus convenable, donne l'égalité[75] :

$$s\left[\mathsf{BN_1QA}\right] = s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\sqrt{u - x^2}\right]\right] = \xi + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2i+1}\prod_{j=1}^{i}\frac{2j-3}{2j}\right)\xi^{2i+1} \tag{4.63}$$

Bien que ce résultat soit très remarquable, il n'apparaît pas à Newton comme l'issue finale de sa recherche, qui vise, comme on l'a dit dès le début, à déterminer l'aire d'un

[73] Qu'on remarque que c'est seulement après avoir écrit l'égalité (4.52) que Newton donne la loi de formation des coefficients du polynôme exhibé par cette égalité, et c'est seulement après avoir donné cette loi, qu'il calcule ces coefficients au-delà de l'ordre 13 en arrivant jusqu'à calculer le coefficient d'ordre 21 [cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, [2], 108-110].

[74] Cf. la note (67), ci-dessus.

[75] Bien qu'il ne soit pas difficile pour nous de vérifier que

$$\prod_{j=1}^{i}\frac{2j-3}{2j} = (-)^i\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ i\end{pmatrix}$$

de sorte que l'égalité (4.63) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} s\left[\mathsf{BN_1QA}\right] &= s\left[\sum\nolimits_0^\xi\left[\sqrt{1-x^2}\right]\right] \\ &= \xi + \sum_{i=1}^{\infty}(-)^i\frac{1}{2i+1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ i\end{pmatrix}\xi^{2i+1} \\ &= \int_0^\xi \sum_{i=0}^{\infty}(-)^i\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ i\end{pmatrix}x^{2i}dx = \int_0^\xi \sqrt{1-x^2}dx \end{aligned}$$

il est clair que (malgré ce que Whiteside semble penser [cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, notes (49)-(79), 105-111]), Newton n'est pas encore parvenu, à ce stade de sa recherche mathématique, à la détermination du développement binomial pour des exposants rationnels, et il n'a envisagé que le prodrome de l'algorithme qui donnera lieu ensuite au calcul intégral. Il ne peut donc dériver de l'égalité (4.63) les conséquences qu'il en tire qu'en suivant le parcours assez tortueux qu'on va présenter ci-dessous.

secteur circulaire quelconque et de l'angle qu'il sous-tend, à partir de la donnée du sinus correspondant.

La solution du premier problème est évidement un corollaire immédiat de l'égalité (4.63). Il suffit, en effet, de se rappeler qu'un triangle de base b et de hauteur a est mesuré dans le domaine des segments par le segment $\frac{1}{2}ba$, pour conclure que[76] :

$$s\,[\mathsf{BN_1A}] = \xi - \frac{\xi}{2}\sqrt{u-\xi^2} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2i+1}\prod_{j=1}^{i}\frac{2j-3}{2j}\right)\xi^{2i+1} \tag{4.64}$$

À partir de cette égalité, observe Newton, "the angle $\mathsf{B\hat{A}N_1}$ is easily found", en exploitant la proportion

$$\mathsf{BN_1CAB} : \mathsf{B\hat{A}C} = \mathsf{BAN_1} : \mathsf{B\hat{A}N_1} \tag{4.65}$$

où $\mathsf{B\hat{A}C} = 90^{[\mathrm{gr}]}$ [77]. Il n'explique pourtant pas comment ceci pourrait être fait.

* * *

Si du point de vue moderne, ceci pourrait sembler banal, il n'en reste pas moins vrai que ce point de vue n'était pas celui de Newton, qui ne pouvait certes pas considérer ses égalités comme portant sur des nombres réels. Il s'agit alors de comprendre comment ce dernier aurait pu parvenir, en partant des prémisses précédentes, à "trouver" l'angle $\mathsf{B\hat{A}N_1}$. On observe d'abord que la proportion (4.65), prise à la lettre, ne respecte les contraintes de la théorie des proportions qu'à la condition de la penser comme une proportion entre les segments qui mesurent dans le domaine des segments les figures et les angles considérés. Dans ce cas, l'égalité $\mathsf{B\hat{A}C} = 90^{[\mathrm{gr}]}$ devrait servir non pas à fournir une mesure de l'angle $\mathsf{B\hat{A}C}$, mais tout simplement à indiquer que cet angle est connu. D'ailleurs, même s'il avait écrit la proportion (4.65) sous la forme

$$\mathsf{BN_1CAB} : \mathsf{BAN_1} = \mathsf{B\hat{A}C} : \mathsf{B\hat{A}N_1} \tag{4.66}$$

pour passer de là à une égalité exprimant l'angle $\mathsf{B\hat{A}N_1}$ en termes du sinus $\mathsf{AQ} = \xi$, Newton aurait dû passer tôt ou tard de ces figures et de ces angles aux segments qui les mesurent dans le domaine des segments. De la proportion (4.66), il aurait alors pu tirer l'égalité

$$\begin{aligned} s\left[\mathsf{B\hat{A}N_1}\right] &= \frac{s\left[\mathsf{B\hat{A}C}\right]}{s\,[\mathsf{BN_1CAB}]}\,s\,[\mathsf{BAN_1}] \\ &= \frac{s\left[\mathsf{B\hat{A}C}\right]}{s\,[\mathsf{BN_1CAB}]}\left\{\begin{array}{l} \xi - \frac{\xi}{2}\sqrt{1-\xi^2} + \\ \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2i+1}\prod_{j=1}^{i}\frac{2j-3}{2j}\right)\xi^{2i+1} \end{array}\right. \end{aligned} \tag{4.67}$$

[76]Cf. Newton (MP), I, **1**,3, § 3, [2], 108. Avant de continuer, Newton tire de l'égalité (4.63) aussi l'autre égalité

$$\begin{aligned} s\,[\mathsf{BN_0N_1}] &= s\,[\mathsf{BN_0QA}] - s\,[\mathsf{BN_1QA}] \\ &= -\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2i+1}\prod_{j=1}^{i}\frac{2j-3}{2j}\right)\xi^{2i+1} \end{aligned}$$

[77]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, 108.

Or, le rapport $\frac{s[\hat{\mathsf{BAC}}]}{s[\mathsf{BN_1CAB}]}$ ne dépend certes pas de la valeur du sinus $\mathsf{AQ} = \xi$ déterminant le secteur circulaire $\mathsf{B\hat{A}N_1}$ et on peut supposer qu'il est donné avec le rayon du cercle. Pour le déterminer, il faut pouvoir déterminer le segment qui mesure un angle donné, disons ζ, dans le domaine des segments. Si, en faisant confiance à la proportion connue

$$\zeta : \zeta' = c_\zeta : c_{\zeta'} \tag{4.68}$$

où ζ et ζ' sont deux angles quelconques et c_ζ et $c_{\zeta'}$ sont les arcs d'un cercle quelconque qui correspond à ces angles (dont la proportion (4.66) n'est qu'un cas particulier), on identifie ce segment avec le rapport entre le segment $s\left[c_\zeta(r)\right]$ égal à l'arc $c_\zeta(r)$ d'un cercle de rayon r sous-tendu par l' angle ζ et ce même rayon, on tire

$$\frac{s\left[\mathsf{B\hat{A}C}\right]}{s\left[\mathsf{BN_1CAB}\right]} = \frac{\frac{c}{4u}}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}uc\right)} = 2 \tag{4.69}$$

où c est le segment égal à la circonférence d'un cercle de rayon unitaire, et donc[78] :

$$s\left[\mathsf{B\hat{A}N_1}\right] = 2\xi - \xi\sqrt{u - \xi^2} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2i+1}\prod_{j=1}^{i}\frac{2j-3}{2j}\right)\xi^{2i+1} \tag{4.70}$$

qui fournit la mesure de l'angle $\mathsf{B\hat{A}N_1}$ qu'il s'agissait de déterminer.

* * *

Il est fort probable que Newton n'eût pas été satisfait par la solution de son premier problème exprimée par l'égalité (4.64), et il ne l'aurait pas été par la solution de son second problème exprimée par l'égalité (4.70), à cause de la présence dans les membres de droites de ces égalités d'une racine carrée qui brisait la belle harmonie polynomiale qui régnait parmi les expressions des aires des trapézoïdes $\mathsf{BN_{2j}QA}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Tout de suite après être parvenu à la solution de son premier problème exprimée par l'égalité (4.64), il se met en

[78] On observe que, si au lieu de supposer que le rayon du cercle considéré est unitaire, on l'avait supposé quelconque et égal à r, alors l'angle $\mathsf{B\hat{A}N_1}$ aurait correspondu à un sinus égal à ξr (ξ étant considéré comme un segment constant sous la variation du rayon du cercle). L'équation de ce cercle aurait été d'autre part la suivante

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = r\sqrt{u - \left(\frac{x}{r}\right)^2}$$

Il s'ensuit que l'égalité (4.64), aurait ainsi été remplacé par l'autre égalité

$$s\left[\mathsf{BN_1A}\right] = \xi r^2 - \frac{\xi}{2}r^2\sqrt{u - \xi^2} + r^2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2i+1}\prod_{j=1}^{i}\frac{2j-3}{2j}\right)\xi^{2i+1}$$

et le rapport $\frac{s[\mathsf{B\hat{A}C}]}{s[\mathsf{BN_1CAB}]}$ aurait été égal à

$$\frac{\frac{rc}{4r}}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}r^2c\right)} = \frac{2}{r^2}$$

de sorte que l'expression trouvé par $s\left[\mathsf{B\hat{A}N_1}\right]$ aurait été la même.

effet à la recherche d'une solution alternative[79]. Son nouvel argument peut être reconstruit comme il suit.

En observant que, quel que soit le nombre entier positif j, on a

$$s\left[\mathsf{AN}_{2j}\mathsf{Q}\right] = \frac{1}{2}\xi\left(u-\xi^2\right)^j \tag{4.71}$$

des égalités (4.48) il est facile de tirer :

$$\begin{aligned}
2s\left[\mathsf{BN}_0\mathsf{A}\right] &= \xi \\
2s\left[\mathsf{BN}_2\mathsf{A}\right] &= \xi + \frac{1}{3}\xi^3 \\
2s\left[\mathsf{BN}_4\mathsf{A}\right] &= \xi + \frac{2}{3}\xi^3 - \frac{3}{5}\xi^5 \\
2s\left[\mathsf{BN}_6\mathsf{A}\right] &= \xi + \frac{3}{3}\xi^3 - \frac{9}{5}\xi^5 + \frac{5}{7}\xi^7 \\
2s\left[\mathsf{BN}_8\mathsf{A}\right] &= \xi + \frac{4}{3}\xi^3 - \frac{18}{5}\xi^5 + \frac{20}{7}\xi^7 - \frac{7}{9}\xi^9 \\
\&c. \quad & \quad \&c.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

où les coefficients qui affectent respectivement les termes $(-)^{i+1}\frac{2i-1}{2i+1}\xi^{2i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ dans les polynômes exprimant les segments $2s\left[\mathsf{BN}_{2j}\mathsf{A}\right]$ $(j = 0, 1, 2, ...)$ sont exactement les entrées $G_{[i,j]}$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ de la matrice (4.49). Les termes $G_{[i,j]}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots; j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots)$ de la matrice (4.51) constituent donc les coefficients qui affectent respectivement les termes $(-)^{i+1}\frac{2i-1}{2i+1}\xi^{2i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ dans les polynômes qui expriment les segments $2s\left[\mathsf{BN}_{2k+1}\mathsf{A}\right]$ $(k = \frac{2j-1}{2} = 0, 1, 2, \ldots)$. En posant $k = \frac{2j-1}{2} = 0$, et en exploitant la règle de formation désormais connue des entrées $G_{[i,\frac{1}{2}]}$ de cette matrice, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
s\left[\mathsf{BN}_1\mathsf{A}\right] &= \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2i-1}{2i+1}\prod_{j=1}^{i}\frac{2j-3}{2j}\right)\xi^{2i+1} \\
&= \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{12}\xi^3 + \frac{3}{80}\xi^5 + \frac{5}{224}\xi^7 + \&c.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

qui, à différence de l'égalité (4.64), fournit l'aire $s\left[\mathsf{BN}_1\mathsf{A}\right]$ du secteur circulaire $\mathsf{BN}_1\mathsf{A}$, en termes du sinus ξ correspondant à ce secteur, par un polynôme prolongé indéfiniment.

Il serait ensuite facile d'opérer sur cette égalité comme sur l'égalité (4.64) qu'elle remplace, pour obtenir le segment $s\left[\mathsf{B\hat{A}N}_1\right]$. Encore une fois, Newton se limite à observer ceci, sans entrer dans d'autres détails. Il est néanmoins facile de suivre l'indication de Newton,

[79] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, [2], 108-110.

et obtenir

$$\begin{aligned} s\left[\mathsf{B\hat{A}N_1}\right] &= \frac{s\left[\mathsf{B\hat{A}C}\right]}{s\left[\mathsf{BN_1CAB}\right]} s\left[\mathsf{BAN_1}\right] \\ &= \left[\xi - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2i-1}{2i+1}\prod_{j=1}^{i}\frac{2j-3}{2j}\right)\xi^{2i+1}\right] \\ &= \xi + \frac{1}{6}\xi^3 + \frac{3}{40}\xi^5 + \frac{5}{112}\xi^7 + \&c. \end{aligned} \tag{4.74}$$

qui fournit aussi la mesure de l'angle $\mathsf{B\hat{A}N_1}$ dans le domaine des segments, en termes du sinus ξ correspondant à cet angle, par un polynôme prolongé indéfiniment[80].

On pourrait être tenté de lire cette dernière égalité comme si elle donnait l'expression en série de l'arc-sinus en fonction du sinus :

$$\begin{aligned} \arcsin\xi &= \xi + \frac{1}{6}\xi^3 + \frac{3}{40}\xi^5 + \frac{5}{112}\xi^7 + \&c. \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-)^{i+1}\frac{2i-1}{2i+1}\left(\begin{array}{c}\frac{1}{2}\\ i\end{array}\right)\xi^{2i+1} \end{aligned} \tag{4.75}$$

Pourtant, comme on l'a observé ci-dessus, Newton était, au début de 1665, bien loin de penser le sinus et l'arc-sinus comme étant des fonction transcendantes, dont le domaine est un sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels, et de supposer l'immense usage des séries entières qu'il fera par la suite, et ne possédait même pas une notion claire de série entière. Une égalité telle que la (4.75) lui aurait d'ailleurs apparue comme impossible, car, quel que soit la manière dans laquelle l'on conçoit l'arc-sinus, celui-ci ne peut être, dans un contexte géométrique, qu'un angle ou un arc de cercle. Pour rendre possible une égalité comme celle-ci, Newton aurait donc dû la penser comme étant une égalité non géométrique, et donner en conséquence un contenu non géométrique à la notion d'arc-sinus, ce qui est loin d'être banal. Ce sera une difficulté qui persistera très longtemps, et que l'on retrouvera même au sein de l'*analyse* d'Euler, en plein XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, et que Newton ne pouvait certes pas songer à résoudre[81]. L'égalité (4.74) ne devait ainsi apparaître à celui-ci que comme une manière d'exprimer la relation entre deux segments, et, de là, entre un angle et un segment, à l'aide d'une expression Algébrique de forme polynomiale. Ce ne sera que plus tard que Newton parviendra à penser des polynômes prolongés indéfiniment comme des objets particuliers, dont on pouvait se servir en géométrie, et qui pouvaient même être étudiées comme tels.

Une dernière question concerne la relation entre les coefficients binomiales qui interviennent dans les polynômes écrits par Newton et nos coefficient binomiaux. J'ai dit ci-dessus que ce dernier observe que les coefficients du polynôme qui intervient dans l'égalité

[80]Newton observe aussi [cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, [2], 110] que, "de la même manière, l'angle $\mathsf{BN_1A}$ étant donné, on peut obtenir son sinus", mais il ne donne aucune indication du parcours à suivre pour arriver à ce résultat. Whiteside [cf. *ibid.,* (note 72)] a suggéré que Newton pensait ici à une possible inversion de la série exprimant l'angle $\mathsf{BN_1A}$ en termes du sinus ξ. Il semble pourtant qu'il est improbable que Newton possédât à cette époque une méthode simple pour inverser des séries. De surcroît, l'expression "likewise" utilisée par Newton (qu'on a traduit ci-dessus avec l'expression "de la même manière") semble indiquer que Newton envisageait la possibilité d'un parcours analogue à celui conduisant à l'égalité (4.74), sans pour autant avoir une idée claire sur la manière d'actualiser cette possibilité.

[81]Cf. sur cette question Panza (1992), 462-464.

(4.63) répondent tous à la loi de formation exprimée par le quotient (4.62). En comparant, les égalités (4.64) et (4.73), il obtient l'égalité

$$\frac{\xi}{2}\sqrt{u-\xi^2} = \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 - \frac{1}{16}\xi^5 - \frac{1}{32}\xi^7 - \frac{5}{256}\xi^9 + \&c. \tag{4.76}$$

et il reconnaît que les coefficients du polynôme qui intervient dans cette égalité répondent tous à la loi de formation suivante

$$\frac{1}{2} \times [-]\,\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{6} \times \frac{5}{8} \times \frac{7}{10} \times \frac{9}{12} \times \frac{11}{14} \times \frac{13}{16} \times \frac{15}{18} \times \frac{17}{20} \times \&c. \tag{4.77}$$

En comparant ensuite les égalités (4.64) et (4.76), il parvient à exprimer l'aire du triangle $\mathsf{BN_1A}$ par polynôme prolongé indéfiniment, dont il calcul les onze premiers termes[82]. Bien qu'il ne l'explicite pas, l'égalité (4.76) est équivalente à la suivante :

$$\begin{aligned}\sqrt{u-\xi^2} \quad &= u + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{2j-3}{2j}\right)\xi^{2i} \\ &= u - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{8}\xi^4 - \frac{1}{16}\xi^6 - \frac{5}{128}\xi^8 + \&c.\end{aligned} \tag{4.78}$$

dans laquelle nous reconnaissons aujourd'hui le développement binomial pour l'exposant $\frac{1}{2}$:

$$\left(1-\xi^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty}(-)^i \left(\begin{array}{c}\frac{1}{2}\\ i\end{array}\right)\xi^{2i} \tag{4.79}$$

Les formules (4.62) et (4.77) sont pourtant bien loin de renvoyer à une formule générale pour un exposant binomial quelconque dont elle ne seraient que des cas particuliers. Loin de la penser comme un exemple d'un résultat plus général, concernant le développement de toute puissance rationnelle d'un binôme, Newton semble ainsi, pour l'instant, concevoir l'égalité (4.76) seulement comme un outil capable de perfectionner la solution déjà trouvée pour ses problèmes. Ce n'est donc qu'à nos yeux que les coefficients des polynômes de Newton s'identifient avec des coefficients binomiaux. Pour ce dernier, ces coefficients ne sont que des nombres fractionnaires qui s'obtiennent en accord avec des lois de formations particulières.

Les notes consacrées par Newton, au début de 1665, au problème de la quadrature du cercle se terminent par quelques lignes[83], dans lesquelles celui-ci pose les prémisses pour une solution encore différente de ses problèmes : en posant $\mathsf{AP} = a + x$ et en gardant les positions $\mathsf{AB} = u$ et $\mathsf{PM} = y$, il obtient pour l'arc de cercle $\mathsf{BN_1C}$ l'équation

$$y = \sqrt{u^2 - a^2 - 2ax - x^2} \tag{4.80}$$

sur laquelle il se propose d'opérer comme sur l'équation (4.46). Il interrompt pourtant son argument fort tôt, sans doute conscient des difficultés posées par une interpolation de la matrice exprimant les coefficients des polynômes donnant les aires des courbes d'équation

[82]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, [2], 110. Newton calcule, en passant, aussi l'aire de la lunule $\mathsf{BMN_1}$, qui est évidemment exprimée par le même polynôme exprimant l'aire du secteur circulaire $\mathsf{BN_1A}$ selon l'égalité (4.73) dépourvu de son premier terme.

[83]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, [2], 111.

$$y=\left(u^2-a^2-2ax-x^2\right)^j \tag{4.81}$$

($j=0,1,2,\ldots$), et attiré par la perspective de l'application d'une méthode similaire à la solution d'un autre problème, celui de la quadrature d'une hyperbole

* * *

Avant d'abandonner la considération des ces notes, une dernière remarque me parait nécessaire. On peut l'introduire par la question suivante : pourquoi, après avoir obtenu l'égalité (4.52), Newton ne compare pas cette égalité avec l'algorithme exprimée par l'égalité (4.32), pour obtenir — conformément à un algorithme inverse que celui par lequel il a obtenu les égalités (4.48) à partir des équations (4.47) — l'égalité

$$\xi-\frac{1}{6}\xi^3-\frac{1}{40}\xi^5-\frac{1}{112}\xi^7+\&c.=s\left[\sum\nolimits_0^\xi\left[u-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6+\&c.\right]\right] \tag{4.82}$$

et à partir de là l'égalité (4.78), selon la substitution anodine $\xi\to x$? La réponse est en partie contenue implicitement dans les considérations précédentes, mais elle mérite, il me semble, d'être explicitée et complétée.

D'un côté, Newton ne semble pas intéressé par l'obtention d'une expression en série entière de la racine carré d'un binôme quelconque. Ce résultat n'aurait pu être considéré, en tant que tel, que comme un acquis d'une théorie générale des expressions Algébriques et de leurs relations, et Newton est pour l'instant loin d'envisager l'intérêt, et même la possibilité, d'une théorie de cette sorte. Bien que pour obtenir ses résultats géométriques, il opère essentiellement sur des expressions Algébriques, considérées pour leurs propriétés formelles, il semble continuer à penser ces expressions comme étant seulement des dénotations pour des segments, c'est-à-dire, dans mon langage, comme des objets conditionnels exprimant des objets propres d'une autre nature.

D'un autre côté, il semble aussi que, tout en étant en possession — grâce à sa nouvelle interprétation des résultats de Wallis — d'un algorithme applicable à la quadrature de toute courbe exprimée par une équation de la forme $y=\sum\limits_{i=0}^{n}A_ix^i$, Newton ne soit pas encore parvenu à concevoir cet algorithme comme une pure procédure formelle, applicable, dans les deux sens, aussi bien à des polynômes finis qu'à des polynômes prolongés indéfiniment. Ces derniers ne semblent même pas être conçus comme étant des objets conditionnels auxquels il est possible d'appliquer une procédure formelle visant à leur transformation, et à l'obtention d'une expression, jugée plus convenable que d'autres, pour certains segments. Ils ne sont, pour ainsi dire, que des dénotations finales pour des segments que l'on ne sait pas exprimer par des expressions Algébriques finitaires.

4.3.3 "To square the Hyperbola", acte second

La méthode qui permet à Newton de parvenir à la quadrature du cercle ne peut être appliquée qu'à la condition que la courbe qu'on cherche à carrer soit exprimée par une équation qui puisse être pensée comme étant un terme intermédiaire entre deux autres équations qui expriment des courbes que l'on sait carrer et qui appartiennent à une suite d'équations à laquelle on peut associer une matrice que l'on sait interpoler. Mais on peut aussi penser à modifier légèrement cette méthode, et à l'appliquer à la quadrature de courbes exprimées par des équations qui peuvent être pensées comme étant les termes d'une extension d'une suite d'équations qui expriment des courbes que l'on sait carrer, pourvu que l'on sache associer à cette suite une matrice que l'on sait étendre.

Ceci est évidemment le cas d'une hyperbole équilatère carrée, lorsque cette courbe est référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales par rapport auquel elle est exprimée par rapport

$$y = \frac{u}{u+x} \tag{4.83}$$

Cette équation peut en effet être pensée comme le terme d'indice $j = -1$, dans la suite d'équations

$$\left\{ y_j = (u+x)^j \right\}_{j=-\infty}^{j=\infty} \tag{4.84}$$

qui résulte de l'extension à gauche de la suite d'équations

$$\left\{ y_j = (u+x)^j \right\}_{j=0}^{j=\infty} \tag{4.85}$$

qui expriment toutes des courbes, référées au même système de coordonnées auquel est référée l'hyperbole, qu'on sait carrer. Les aires de ces courbes sont de surcroît exprimées par des polynômes dont les coefficients peuvent être rangés dans une matrice que l'on sait étendre à gauche. C'est le cas que Newton aborde dans la suite de ces notes accompagnant sa deuxième lecture de l'*Arithmetica infinitorum*[84]. Voici comment l'argument de Newton peut être reconstruit.

Supposons que FML (fig. 4) est une branche d'une hyperbole équilatère carrée, et que l'on réfère cette hyperbole à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, dont l'axe et l'origine sont donnés respectivement par l'une de ses asymptotes, disons AH, et par un point quelconque A de cette asymptote, distinct du centre O de l'hyperbole. Si M est un point courant sur cette hyperbole et que l'on pose $\mathsf{OA} = a$, $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{PM} = y$, on obtient l'équation

$$yx + ya = K \tag{4.86}$$

où K est un segment constant caractérisant l'hyperbole considérée. Il suffit alors de supposer que K est le segment unité et de choisir le point A sur l'axe OH de telle sorte qu'on ait $\mathsf{OA} = K = u$, pour transformer cette équation en l'équation (4.83) qui exprime ainsi une hyperbole équilatère carrée quelconque.

Si on choisit un point Q quelconque sur l'axe OH, et que l'on pose $\mathsf{AQ} = \xi$, on réfère les équations appartenant à la succession (4.85) au même système de coordonnées auquel on a rapporté la branche d'hyperbole donnée, et on leur applique l'algorithme exprimé par

[84]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, [3], 112-115.

l'égalité (4.32), on obtient les égalités

$$\begin{aligned}
s\left[\sum_0^\xi [y_0]\right] &= \xi \\
s\left[\sum_0^\xi [y_1]\right] &= \xi + \frac{1}{2}\xi^2 \\
s\left[\sum_0^\xi [y_2]\right] &= \xi + \frac{2}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3 \\
s\left[\sum_0^\xi [y_3]\right] &= \xi + \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{3}{3}\xi^3 + \frac{1}{4}\xi^4 \\
s\left[\sum_0^\xi [y_4]\right] &= \xi + \frac{4}{2}\xi^2 + \frac{6}{3}\xi^3 + \frac{4}{4}\xi^4 + \frac{1}{5}\xi^5 \\
s\left[\sum_0^\xi [y_5]\right] &= \xi + \frac{5}{2}\xi^2 + \frac{10}{3}\xi^3 + \frac{10}{4}\xi^4 + \frac{5}{5}\xi^5 + \frac{1}{6}\xi^6 \\
\&c. \qquad & \&c.
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Les coefficients qui affectent les produits $\frac{1}{i+1}\xi^{i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ dans les polynômes intervenant dans ces égalités sont exactement les entrées $G_{[i,j]}$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ de la matrice (4.49). Il suffit donc d'étendre cette même matrice d'une colonne vers la gauche pour obtenir les coefficients du polynôme qui est censé exprimer l'aire $s\left[\sum_0^\xi [y_{-1}]\right]$ du trapézoïde ACNQ délimité par la branche d'hyperbole donnée.

La procédure suivie par Newton pour interpoler cette matrice, et obtenir la matrice (4.51), ne permet pas d'obtenir cette extension. Celle-ci peut néanmoins être obtenue par une autre procédure qui ne porte d'ailleurs que sur les termes $G_{[0,j]}$ $(j = 0, 1, \ldots)$ et $G_{[i,0]}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ formant respectivement la première ligne et la première colonne de la matrice (4.49). Il suffit en effet d'étendre à gauche la première ligne de cette matrice, en faisant confiance à un argument inductif qui conduit à supposer que

$$G_{[0,-1]} = G_{[0,0]} = G_{[0,1]} = \ldots = 1 \tag{4.88}$$

et d'appliquer ensuite l'égalité

$$G_{[i,-1]} = G_{[i,0]} - G_{[i-1,-1]} \tag{4.89}$$

$(i = 1, 2, \ldots)$ — que l'on dérive de l'égalité (4.50) en y posant $j = 0$ —, pour obtenir les égalités :

$$G_{[i,-1]} = 0 - (-)^{i-1}\, 1 = (-)^i\, 1 \tag{4.90}$$

$(i = 1, 2, \ldots)$. De ces égalités il est enfin aisé de tirer l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
s\,[\mathsf{ACNQ}] = s\left[\sum_0^\xi \left[\frac{u}{u+x}\right]\right] &= \sum_{i=1}^{\infty} (-)^{i-1} \frac{1}{i}\xi^i \\
&= \xi - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3 - \frac{1}{4}\xi^4 + \&c.
\end{aligned} \tag{4.91}$$

qui fournit la quadrature cherchée.

* * *

Si l'on compare l'argument qui conduit Newton à ce résultat avec l'argument produit par Wallis pour faire face au problème de la quadrature d'une hyperbole équilatère[85], on se rend compte que ces deux arguments visent deux problèmes distincts. D'abord, l'argument de Wallis concerne toute sorte d'hyperbole équilatère, tandis que celui de Newton ne concerne, à moins de modifications convenables, qu'une hyperbole équilatère carrée. Ce n'est pourtant qu'un avantage mineur de l'argument de Wallis sur celui de Newton. Les avantages du deuxième argument sur le premier sont bien plus significatifs. L'argument de Wallis ne peut concerner, une fois qu'il est appliqué à l'hyperbole étudiée par Newton, qu'un trapézoïde infini tel que OFNQ, délimité à gauche par un des asymptotes de cette hyperbole, et il ne conduit qu'à déterminer le rapport (infini) entre ce trapézoïde et le rectangle, tel que ODNQ, qui y est inscrit. En revanche, l'argument de Newton concerne tout trapézoïde fini, tel que ACNQ, qu'on peut pendre sous cette hyperbole, et conduit à déterminer l'aire, parfaitement finie, de ce trapézoïde. En d'autres termes, l'argument de Wallis ne s'applique, parmi tous les trapézoïdes, finis ou infinis, qu'on peut prendre sous une hyperbole équilatère carrée, qu'à ceux qui ne tombent pas sous l'argument de Newton. Ce dernier parvient à exclure de sa visée ces trapézoïdes infinis en opérant une simple translation de l'origine du système de coordonnées cartésiennes implicitement considéré par Wallis. Le point est donc le suivant : l'argument de Newton se fonde sur cette translation et de ce fait l'exige ; l'argument de Wallis en exclut *a priori* la possibilité, c'est-à-dire qu'il exige qu'aucune translation de cette origine soit opérée.

Ceci est possible grâce à une interprétation essentiellement nouvelle de l'algorithme de quadrature de Wallis pour des paraboloïdes de tous les ordres, que Newton transforme dans un algorithme linéaire satisfaisant à l'égalité (4.32). L'algorithme de quadrature pour des paraboloïdes de tous les ordres n'était pourtant, chez Wallis, qu'une version initiale et restreinte d'un algorithme plus générale que ce dernier n'avait d'ailleurs pas hésité à appliquer, sans condition, à la quadrature de l'hyperbole. Dans ses notes du début 1664, accompagnant sa deuxième lecture de l' *Arithmetica infinitorum*, Newton ne semble pas faire confiance *a priori* à cette généralisation. Il cherche plutôt à formuler ou transformer ses problèmes de quadrature de manière à pouvoir les résoudre par l'application de l'algorithme restreint exprimé par l'égalité (4.32).

* * *

Bien qu'en opérant sa translation, Newton répète pour l'essentiel l'opération déjà accomplie par Grégoire de St. Vincent dans le livre 2 de son *Opus Geometricus*[86], il n'observe pas, explicitement, que le polynôme qui intervient dans l'égalité (4.91) exprime, en même temps que l'aire d'une hyperbole, aussi un logarithme[87]. Il conclut néanmoins ses notes en exhibant les résultas de longs calculs[88] qui lui permettent d'évaluer la somme, approchée à la 46$^{\text{ème}}$ décimale, des premiers 41 termes de ce polynôme, pour la position $\xi = \frac{1}{10}$ et

[85]Cf. le chapitre 2, pp. 88 et suiv.
[86]Cf. la note (42) au chapitre 2.
[87]Cf. la note (10), ci-dessus.
[88]Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 2, [3], 113-115.

celle, approchée à la $45^{\text{ème}}$ décimale, des premiers 21 termes de ce même polynôme, pour la position $\xi = \frac{1}{100}$[89].

Évidemment, si on reste au contexte géométrique propre au problème de la quadrature d'une hyperbole, on ne comprend ces calculs qu'à condition de penser les positions $\xi = \frac{1}{10}$ et $\xi = \frac{1}{100}$ comme étant des abréviations des positions $\xi = \frac{1}{10}u$ et $\xi = \frac{1}{100}u$, ce qui nous amène à considérer les sommes trouvées comme des segments exprimés par le rapport qu'ils ont avec le segment OA choisi comme unité. D'ailleurs, des positions $\mathsf{AC} = \mathsf{OA} = u$ et $\mathsf{AQ} = \xi = qu$ (q étant un nombre quelconque), il s'ensuit l'égalité $s\,[\mathsf{ACSQ}] = qu$, donc si on suppose que $s\,[\mathsf{ACNQ}] = pu$ (p étant aussi un certain nombre dont la valeur dépend de la valeur de q), on obtient

$$\frac{s\,[\mathsf{ACNQ}]}{s\,[\mathsf{ACSQ}]} = \frac{s\left[\sum_0^{qu}\left[\frac{1}{1+x}\right]\right]}{u\,(qu)} = \frac{pu}{qu} = \frac{p}{q} \tag{4.92}$$

Il suffit ainsi de multiplier les nombres que Newton obtient comme sommes du polynôme donnant l'aire du trapézoïde pour $\frac{1}{q}$, c'est à dire respectivement pour 10 et 100, pour obtenir la valeur du rapport numérique $\frac{p}{q}$. Les longs calculs de Newton se justifierait alors par le désir de parvenir, en exploitant le nouvel outil fourni par l'égalité (4.91), à une évaluation approchée du rapport entre le trapézoïde ACNQ délimité par l'hyperbole donnée et le rectangle ACSQ circonscrit a ce trapézoïde. Ce résultat devait être considéré, à la date à laquelle Newton l'obtint, d'autant plus important que jamais avant dans l'histoire des mathématiques on avait pensé possible de parvenir, par des moyens purement géométriques, c'est-à-dire sans faire intervenir la considération des logarithmes, à une approximation aussi précise de ce rapport : aussi précise qu'elle pouvait être comparée aux évaluations, qui étaient en revanche très anciens, du rapport entre un cercle et le carré construit sur son diamètre.

Une autre raison pourrait cependant justifier l'acharnement avec lequel Newton poursuivit ses calculs. En dépit de l'absence, dans ses notes, de toute référence aux logarithmes, il est possible que celui-ci avait eu connaissance du résultat de Grégoire de Saint Vincent, qui avait montré que les trapézoïdes sous une hyperbole équilatère se comportent comme des logarithmes (népériens). De ce résultat il s'ensuit que si l'on remplace dans le polynôme donnant l'aire du trapézoïde ACNQ le segment ξ par un nombre q, on obtient une expression arithmétique du logarithme (népérien). Les calculs de Newton prendraient alors l'aspect d'une vérification arithmétique du résultat géométrique exprimé par l'égalité (4.91) Newton devait se trouver, en effet, face à cette égalité, dans les mêmes conditions dans lesquelles il se trouvait face à l'égalité (4.52) : ces égalités avaient été obtenues, l'une et l'autre, par des arguments qui demandaient à être validés, *a posteriori*. Le fait que Newton choisit des valeurs numériques très proches de 0, pour les substituer à ξ, montre alors implicitement qu'il était bien conscient que cette validation ne pouvait être obtenue qu'à condition de supposer que ξ était plus petit que l'unité, et donc que l'égalité (4.91) ne pouvait être validée qu'à la condition que $\mathsf{AQ} = \xi < \mathsf{AO} = u$, une restriction que l'égalité (4.91), à la différence de

[89] Newton commet en réalité deux erreurs, promptement relevés par Whiteside [cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, [3], notes (84) et (91), 113-115], qui en vicient le résultat à partir de la $29^{\text{ème}}$ décimale. Il reviendra d'ailleurs sur ces calculs quelques mois plus tard dans les notes que Whiteside a publiées comme § 5 de la partie **1**, 3 du premier volume des *Mathematical Papers* [cf les notes (5) et (7), ci-dessus].

l'égalité (4.52), n'hérite pas de sa signification géométrique, et qu'il faut donc lui imposer, pour ainsi dire de l'extérieur.

Il reste à dire, avant d'abandonner les notes du début 1665, accompagnant la lecture par Newton des œuvres de Wallis, qu'elles se poursuivent[90] avec le résumé de quelques passages tirés d'aures œuvres de Wallis à propos du centre de gravité et d'équations de troisième degré. Bien que les passages du *Commercium Epistolicum* portent, indirectement, sur des quadratures, on peut se dispenser de considérer ces résumés, car ils ne permettent pas d'ajouter quelques chose de nouveau à ce que l'on a dit jusqu'ici[91].

4.4 Une première esquisse d'un traité sur quadratures et développements binomiaux

Vers l'été 1665 Newton revint pour la troisième fois sur les méthodes de quadrature de Wallis. Apparemment, il ne reprit pas pour autant sa lecture de l'*Arithmetica infinitorum*, et il se contenta de reformuler les conclusions auxquelles il était parvenu quelques mois auparavant, et à chercher à les ordonner d'une nouvelle manière dans un véritable petit traité organisé, selon le style euclidien, par propositions successives. C'est l'objet du quatrième des cinq fragments dont j'ai parlé au début du présent chapitre[92]. C'est une note divisée en deux parties[93], respectivement consacrées à une exposition lapidaire mais ordonnée des résultats obtenus auparavant, et à la rédaction d'une esquisse de ce traité, qui est pourtant interrompue après quatre propositions seulement[94].

4.4.1 Deux additions aux notes de l'hiver 1664-1665

Pour ce qui est de la première partie, il faut en retenir ici les deux seules nouveautés qui interviennent dans l'exposition de Newton.

La première[95] tient à une observation concernant la loi de formation de la matrice (4.49). Newton observe que — en obéissant à la loi récursive (4.50), et en ayant une première ligne (correspondant à la position $i = 0$) composée d'entrées constamment égales entre elles —

[90] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3 [4] et [5], 116-121.

[91] Cf. à ce propos les notes de Whiteside : Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, notes (93)-(116), 116-119.

[92] Cf. les notes (5) et (8), ci-dessus.

[93] Cf. respectivement Newton (MP), I, **1**, 3, § 4, [1], 122-126 et [2], 126-134 sur cette note de Newton Whiteside (1961).

[94] Je reviendrai plus loin [cf. ci-dessus, p. 222] sur les raisons qui poussèrent Newton à abandonner sa rédaction.

[95] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 4, [1], 123.

cette matrice est telle que n'importe laquelle de ces portions verticales satisfait le schéma[96]

$$\begin{array}{c|llll l}
K_{[i,\mu]} & \mu=0 & \mu=1 & \mu=2 & \mu=3 & ... \\
\hline
i=0 & H_0 & H_0 & H_0 & H_0 & ... \\
i=1 & H_1 & H_0+H_1 & 2H_0+H_1 & 3H_0+H_1 & ... \\
i=2 & H_2 & H_1+H_2 & H_0+2H_1+H_2 & 3H_0+3H_1+H_2 & ... \\
i=3 & H_3 & H_2+H_3 & H_1+2H_2+H_3 & H_0+3H_1+3H_2+H_3 & ... \\
i=4 & H_4 & H_3+K_4 & H_2+2H_3+H_4 & H_1+3H_2+3H_3+H_4 & ... \\
... & ... & ... & ... & ... & ...
\end{array} \tag{4.93}$$

où, comme il est aisé de vérifier, on aura :

$$K_{[i,\mu]} = \sum_{k=0}^{\mu} \left(G_{[k,\mu]}\right) H_{i-k} \tag{4.94}$$

avec $H_{i-k} = 0$, si $k > i$. On verra plus tard comment Newton va se référer à ce schéma lors de la rédaction de l'esquisse de son traité[97].

La deuxième addition[98] consiste en un "corollaire", énonçant la quadrature de l'hyperbole d'équation $y^2 - \left(u + x^2\right)$, dont l'aire ne diffère évidemment de l'aire du quart de cercle exhibée par l'égalité (4.52) que pour les signes des coefficients de place paire :

$$s\left[\sum\nolimits_0^{\xi}\left[\sqrt{1+x^2}\right]\right] = \xi + \frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{40}\xi^5 + \frac{1}{112}\xi^7 - \frac{1}{1152}\xi^9 + \&c. \tag{4.95}$$

En passant, grâce à un simple corollaire, de la quadrature du quart de cercle à la quadrature d'une hyperbole, Newton montre de réfléchir désormais non pas sur la nature géométrique des courbes considérées, mais sur la nature algorithmique de l'expression qui exprime leur ordonnée. Dit en d'autres termes : ce n'est plus une méthode de quadrature qu'il vise, mais un algorithme aussi général que possible. C'est ce que l'esquisse de son traité semble confirmer.

4.4.2 L'esquisse du traité

Cette esquisse s'ouvre avec la présentation d'un algorithme de quadrature. C'est l'objet de la première proposition que Newton énonce sans aucune introduction[99] :

> *Prop* 1. Suppose [fig. 5[100]] $\mathsf{AP} = x$. $\mathsf{PM} = y \perp \mathsf{AP}$. And that the nature of the line AMMC is such the the valor of y is rationall & consists in no fractions in whose denominator x is, or else wholy of such fractions in whose dénominateurs x is, but not of divers dimensions : If I then multiply the valor of y by x, &

[96] Newton écrit "a", "b", "c", "d", "e", etc. où j'écris respectivement "H_0", "H_1", "H_2", "H_3", "H_4", etc. Whiteside [cf. Newton (MP), I, **I**, 3, § 4, note (7), 124] interprète le schéma (4.93) comme une table de différences finies. Il ne me semble pas pourtant que celle-ci soit aussi l'interprétation de Newton, pour lequel ce schéma aurait du apparaître plutôt comme une table d'additions successives. C'est en effet la notion même de différence finie qui semble pour l'instant parfaitement étrangère à la réflexion de ce dernier.

[97] Cf. ci-dessous, pp. 218-221.

[98] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 4, [1], 126. Comme d'habitude, Newton ne distingue pas entre x et ξ.

[99] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 4, [2], 126.

[100] Je reproduis la figure de Newton, en me limitant à changer les lettres pour des raisons d'uniformité.

divide each term of the valor by so many units as it hath dimensions in the term ; the result shall signifie the area APM of the afforesaide line AMMC.

Newton semble donc distinguer entre deux cas différents dans lesquels son algorithme peut être appliqué : celui où l'ordonné y d'une courbe d'équation $F(x, y) = 0$ est exprimée par un polynôme en x, et celui où cette ordonnée est en revanche exprimée par un polynôme en x^{-1} sans premier terme. Ce qui est essentiel est que ces deux cas s'excluent réciproquement : Newton ne présente pas un algorithme qui s'applique à toute courbe dont l'ordonnée est exprimée (par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales) par un polynôme à puissances positives et négatives[101], tel que

$$y = \sum_{i=-n}^{m} a_i x^i \tag{4.96}$$

Il présente deux algorithmes distincts qui s'appliquent respectivement à des courbes dont l'ordonnée est exprimée (par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales) soit par un polynôme à puissance positives, soit par un polynôme à puissances négatives. La raison de cette distinction est rendue manifeste par la figure qui accompagne la proposition[102] : dans le premier cas, l'algorithme en question fournit une expression de l'aire $s\left[\sum_0^\xi [y]\right]$ de la courbe donnée (ξ étant une valeur positive quelconque de x) ; dans le deuxième, il fournit une expressions de l'aire $s\left[\sum_\xi^{+\infty} [y]\right]$ d'une telle courbe. En opérant cette distinction, Newton ne fait alors que suivre Wallis[103], en supposant que les rapports "plus qu'infinis" entre les trapézoïdes sous-tendus par une hyperbole ou un hyperboloïde quelconque et les parallélogrammes inscrits dans ces trapézoïdes indiquent que les trapézoïdes complémentaires à ceux-ci ont avec les mêmes parallélogrammes des rapports parfaitement finis. On peut donc supposer que, dans son énoncé, Newton ait laissé implicite que, dans le deuxième cas — lorsque $i \neq 1$ —, il faut prendre le rapport $\frac{a_i}{-i+1}$ avec le signe négatif, ou qu'il ait tout simplement évité de rendre explicite sa référence aux valeurs absolues des expressions des aires (qui est d'ailleurs parfaitement naturelle). Bien que l'énoncé de la proposition ne soit pas explicite à ce propos, les exemples fournis par Newton et les applications qu'il en fait rendent clair, de surcroît, que les polynômes en question peuvent être pris comme étant infinis. Le contenu de cette première proposition semble donc tenir aux égalités suivantes :

$$\begin{array}{c} s\left[\sum_0^\xi \left[\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right]\right] = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{a_i}{i+1}\xi^{i+1} \\ s\left[\sum_\xi^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i x^{-i}\right]\right] = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{a_i}{i-1}\xi^{-i+1} \end{array} \tag{4.97}$$

[101] Celle-ci semble être en revanche l'interprétation de Whiteside : cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 4, note (20), 126.

[102] Lorsque, au cours du commentaire qu'il fait suivre à sa proposition, Newton justifie la linéarité de son algorithme, il est même explicite sur ce point [cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 4, [2], 127] : "[...] the area APM is compounded of those areas which are related to & generated by those quantitys of which the valor of y is compounded [...] (Note that Parabolicall & Hyperbolicall (i :e : (in respect of PM,) affirmative & Negative) areas (thus considered) cannot compound any 3^d area because they are not on the same side of the line PM)."

[103] Cf. ci-dessus, p. 89.

(où n est un nombre entier positif, éventuellement infini) qui — mis à part l'extension possible à des polynômes infinis — correspondent aux égalités (4.32) et (4.34).

Pour ce qui est de l'extension de la deuxième des égalités (4.97) au cas où i est égal à 1, Newton est explicite, car il note[104] : "so if $\frac{a}{x} = y$. then $\frac{a}{0} = \frac{ax^0}{0}$ is the area APM ; viz tis infinite." Comme on l'a vu[105], cela était aussi l'opinion de Wallis. Pourtant Wallis était bien loin d'imaginer qu'en modifiant convenablement sa même méthode pour la quadrature du cercle, il aurait été possible de parvenir à une égalité telle que la (4.91). Comme qu'il est aisé de vérifier que l'aire de l'hyperbole d'équation $y = \frac{u}{x}$, évaluée entre u et $u+\xi$, est égale à l'aire de l'hyperbole d'équation $y = \frac{u}{x+u}$, évaluée entre 0 et ξ, il suffit d'accepter que

$$\sum\nolimits_{\kappa}^{\kappa+\xi}\left[\frac{u}{x}\right] = \sum\nolimits_{\kappa}^{+\infty}\left[\frac{u}{x}\right] - \sum\nolimits_{\kappa+\xi}^{+\infty}\left[\frac{u}{x}\right] \tag{4.98}$$

pour conclure, en accord avec cette dernière égalité et à la deuxième des égalités (4.97), et pour tout ξ strictement positif :

$$\xi - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3 - \&c = \frac{u}{0}\kappa^0 - \frac{u}{0}\left(\kappa+\xi\right)^0 \tag{4.99}$$

une égalité que Newton, aurait du, au moins, se donner la peine d'expliquer. L'absence de toute explication de cette conséquence de son algorithme est d'autant plus frappante que, lors de la troisième proposition de son esquisse, celui-ci parviendra à une égalité équivalente à la (4.91). Encore incapable de faire le lien entre sa quadrature par série de l'hyperbole et une fonction transcendante telle que le logarithme, Newton semble aussi incapable de se décider entre la généralité de son algorithme et la possibilité de parvenir à une quadrature de l'hyperbole par le recours à un polynôme prolongé indéfiniment. Il se limite à affirmer l'une et l'autre, sans se préoccuper d'en justifier la compatibilité.

Newton fait suivre l'énoncé de sa première proposition par un court commentaire, où il est essentiellement question de présenter des exemples. Mais, il évite d'en donner une preuve, en se limitant à justifier la linéarité de l'algorithme qu'elle présente, par le plus naturel des arguments géométriques[106]. Encore une fois, il semble donc faire confiance aux arguments de Wallis — et à la nouvelle interprétation qu'il a donné de ceux-ci — pour justifier son lemme de départ. Ce lemme n'est pourtant plus caché derrière la supposition d'une suite de quadratures déjà obtenues, comme il l'était dans la note du début de 1665[107] ; il prend l'aspect d'un théorème fondamentale. Et il est symptomatique de l'attitude de Newton que ce théorème se présente sous la forme d'un algorithme. Si cet algorithme est de surcroît plus général que ce qu'il aurait suffit, à la rigueur, pour justifier les quadratures dont celui-ci était parti quelques mois auparavant, ce qui me paraît le plus important est que Newton suppose désormais pouvoir l'appliquer à des polynômes infinis, ou du moins prolongés indéfiniment.

Cette supposition est d'autant plus cruciale que c'est d'elle que dépend la structure même du traité de Newton. Au lieu d'appliquer son algorithme pour carrer des courbes dont l'ordonnée est exprimée par un polynôme fini, et chercher ensuite à interpoler les coefficients des polynômes exprimant les aires ainsi obtenues — pour trouver des polynômes

[104] Cf. Newton (MP), I, **I**, 3, § 4, [2], 127.
[105] Cf. ci-dessus, p. 88.
[106] Cf. la note (102), ci-dessus.
[107] Cf. ci-dessus, p. (192).

prolongés indéfiniment susceptibles d'exprimer des aires d'autres courbes (comme il l'avait fait quelques mois auparavant) —, Newton propose de l'appliquer directement à des polynômes prolongés indéfiniment exprimant l'ordonnée des courbes qu'on se propose de carrer. La deuxième proposition du traité fourni justement l'un de ces polynômes, auquel il faudra plus tard, appliquer un tel algorithme. Cette proposition tient à l'égalité suivante[108] :

$$\frac{a^2}{b+x} = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} + \&c. = \sum_{i=0}^{\infty}(-)^i \frac{a^2x^i}{b^{i+1}} \tag{4.100}$$

On comprend de cette seule égalité que Newton envisage désormais la possibilité d'exprimer par le biais d'un polynôme prolongé indéfiniment non seulement une aire, un sinus ou un angle — bref une grandeur inconnue, dont la détermination est requise pour la solution du problème posé —, mais aussi une grandeur donnée, exprimant l'objet sur lequel porte le problème, dans ce cas l'ordonnée d'une courbe qu'il s'agira de carrer. Ce polynôme n'est plus seulement une forme d'expression d'un segment donnant la mesure d'une grandeur géométrique qu'on ne saurait pas exprimer par une expression Algébrique finitaire. Il sert pour exprimer, sous une forme convenable (c'est-à-dire polynomiale), un segment que l'on sait aussi exprimer par une expression Algébrique finitaire. Il se présente donc, à plein titre, comme une série entière, encore que cette série est obtenue, comme on le verra ci-dessus, on supposant qu'il est possible de prolonger indéfiniment une procédure qui permet d'en calculer les coefficients successifs.

Au lieu de généraliser l'algorithme fondamental, donné par la proposition précédente, de manière à le rendre applicable à une classe de courbes aussi large que possible, ou de chercher des procédures d'interpolation capables de tirer des quadratures obtenues par l'usage de cet algorithme la quadrature d'autres courbes, Newton songe ainsi à adapter à cet algorithme les équations des courbes données : il cherche à écrire ces équations sous la forme $y = P(x)$, où $P(x)$ est justement une série entière[109]. C'est l'acte de naissance d'un programme de recherche que Newton n'abandonnera jamais plus par la suite.

Bien que, dans l'esquisse de l'été 1665, ce programme de recherche n'apparaît que de manière assez timide, la nouvelle approche de Newton n'est pas sans poser un problème inédit. C'est le problème de la transformation des expressions Algébriques. On dira que ce problème apparaît déjà lorsqu'il est question, par exemple, de la règle de Hudde, ou de n'importe quel algorithme de quadrature : appliquer cette règle ou cet algorithme ne revient au fond qu'à transformer des expressions Algébriques les unes dans les autres. Il faut pourtant observer que dans ces derniers cas une telle transformation vise à la détermination d'une nouvelle grandeur à partir de la grandeur donnée. Elle correspond de ce fait aux liens géométriques qui lient entre elles ces deux grandeurs, l'une connue, l'autre inconnue. En revanche, dans le cas dont il est ici question, une telle transformation vise à déterminer une nouvelle expression Algébrique pour la même grandeur qui est exprimée par l'expression Algébrique de départ. Elle doit donc assurer que la nouvelle expression exprime la même grandeur exprimée par l'expression donnée. Or, si la transformation en question n'est pas

[108] Cf. Newton (MP), I, **I**, 3, § 3, [2], 127.

[109] On observe que la série entière qui apparaît dans l'égalité (4.100) correspond à une ordonnée fournie par une équation homogène, et elle est donc — à la différence des séries que Newton avait obtenues quelques mois auparavant — composée par des termes homogènes du premier ordre. Ces termes expriment donc le même segment quel que soit le segment unité auquel on les réfère ; par conséquence la série elle-même exprime la même ordonnée, et donc la même courbe, quel que soit ce segment unité.

une simple transformation identique, c'est-à-dire qu'elle ne tient pas à une simple application du formalisme de l'Algèbre, comment peut-on garantir que cela est bien le cas ? Newton évite évidement toute réponse explicite à cette question. L'énoncé de sa deuxième proposition et la preuve qu'il en fournit laissent néanmoins transparaître que d'après lui cette garantie doit être recherchée non pas dans la nature de l'expression obtenue en opérant la transformation, mais dans la nature des règles de transformation. C'est une approche qui marquera ensuite l'*analyse* pour tout le XVIII^ème^ siècle.

Cette preuve ne tient d'ailleurs qu'à l'exposition d'une méthode générale de développement applicable à toute expression de la forme $\frac{\alpha}{(b+x)^j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, α étant un coefficient convenable. Étant donnée la succession d'égalités

$$(b+x)^j = \sum_{i=0}^{j} G_{[i,j]} b^{j-i} x^i \quad \left[= \sum_{i=0}^{\infty} G_{[i,j]} b^{j-i} x^i\right] \tag{4.101}$$

$(j = 0, 1, 2, ...)$, où les $G_{[i,j]}$ sont, comme ci-dessus, les entrées du triangle de Pascal mis sous la forme de la matrice (4.49), Newton raisonne comme il l'avait fait quelques mois auparavant pour étendre d'une colonne vers la gauche cette matrice[110]. En réitérant la procédure conduisant à cette extension, il parvient à une nouvelle matrice, qu'on peut récursivement étendre indéfiniment aussi bien à droite qu'à gauche :

$i \backslash j$	$\ldots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\ldots$
0	$\ldots$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\ldots$
1	$\ldots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\ldots$
2	$\ldots$	10	6	3	1	0	0	1	3	6	10	15	21	$\ldots$
3	$\ldots$	-20	-10	-4	-1	0	0	0	1	4	10	20	35	$\ldots$
4	$\ldots$	35	15	5	1	0	0	0	0	1	5	15	35	$\ldots$
5	$\ldots$	-56	-21	-6	-1	0	0	0	0	0	1	6	21	$\ldots$
6	$\ldots$	84	28	7	1	0	0	0	0	0	0	1	7	$\ldots$
7	$\ldots$	-120	-36	-8	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

(4.102)

qui, en satisfaisant (par construction) l'égalité (4.50), avec $G_{[0,j]} = 1$ $(j = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...)$ satisfait aussi l'égalité :

$$G_{[i,j]} = (-)^i G_{[i,-j+i-1]} \tag{4.103}$$

$(j = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...)$. En généralisant les égalités (4.101) à des valeurs négatives de j, en accord avec la matrice (4.102), Newton n'a ainsi aucune difficulté à tirer sur le champ la succession d'égalités :

$$\begin{aligned} a^2(b+x)^j &= a^2 \sum_{i=0}^{\infty} (-)^i G_{[i,-j+i-1]} b^{j-i} x^i \\ &= a^2 \sum_{i=0}^{\infty} (-)^i F_{[i+1,-j]} b^{j-i} x^i \end{aligned} \tag{4.104}$$

[110]Cf. ci-dessus, p. 207.

($j = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$), dont l'égalité (4.100) n'est qu'un cas particulier, pour $j = -1$.

Par la manière dont Newton les a obtenues — en absence de toute formule générale exprimant directement un coefficient binomiale quelconque —, ces égalités ne peuvent qu'être conçues comme des égalités faisant intervenir des polynômes ou des séries entières dont les coefficients sont calculés récursivement (des séries récurrentes, comme les appelera plus tard A. de Moivre[111]). Cela rend ces polynômes et ces séries essentiellement différentes des développements binomiaux. On comprend alors que Newton n'énonce, lors de sa deuxième proposition que la seule égalité (4.100), et il ne considère, au cours de la preuve de cette proposition, que les égalités qui correspondent aux positions $j = -2, -3$, sans chercher à fournir la forme générale du développement de $(b + x)^j$ ($j = -1, -2, \ldots$).

Il insiste, en revanche sur la possibilité de substituer dans l'égalité (4.100) au binôme $b + x$ le binôme $b - x$, ce qui ne conduit évidemment qu'à changer le signe des coefficients négatifs de la série intervenant dans cette égalité.

Pour ce qui est de la convergence de cette série, Newton n'ajoute aucune précision explicite. Il observe néanmoins que sa preuve permet de déduire aussi l'égalité suivante :

$$\frac{a^2}{b+x} = \frac{a^2}{x} - \frac{a^2b}{x^2} + \frac{a^2b^2}{x^3} - \frac{a^2b^3}{x^4} + \&c. = \sum_{i=0}^{\infty}(-)^i\frac{a^2b^i}{x^{i+1}} \tag{4.105}$$

qui résulte de l'égalité (4.100), en permutant dans la série les termes b et x[112]. Cette permutation est évidemment justifiée par la symétrie du triangle de Pascal (qui correspond d'ailleurs à la commutativité de l'addition intervenant dans le binôme $b + x$). Pour tirer l'égalité (4.105), Newton s'appuie donc, implicitement, sur un argument purement formel. Il est cependant naturel de supposer[113] qu'il ait conçu les deux égalités (4.100) et (4.105) comme relevant respectivement des cas où $x < b$ et $x > b$[114].

Les deux premières propositions étant données, la troisième[115] s'impose comme étant le plus naturel des corollaires de celles-ci. Newton ne se limite pas, pourtant, à énoncer la quadrature de l'hyperbole d'équation $y = a^2(b + x)^{-1}$. Il fait de même pour l'hyperbole d'équation $y = a^2(b-x)^{-1}$ et pour l'hyperboloïde cubique d'équation $y = a^2(b+x)^{-2}$ et pour l'autre cubique d'équation $y = \frac{x^3}{a^2+bx+x^2}$. Pour ce qui est des deux premières de ces quatre courbes, la démarche de Newton est triviale : elle consiste à appliquer l'algorithme donné par la première proposition à l'égalité (4.100) et sa transformée par la substitution $x \to -x$. Pour ce qui est de la troisième, Newton observe qu'en appliquant ce même algorithme à l'égalité

$$a^2(b + x)^{-2} = \frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a^2}{b^3}x + 3\frac{a^2}{b^4}x^2 - 4\frac{a^2}{b^5}x^3 + \&c. \tag{4.106}$$

qui correspond au terme relevant de la position $j = -2$ dans la succession d'égalités (4.104), on obtient le développement de[116] $\frac{a^2}{b+\xi}$ pris avec le signe négatif et dépourvu de son premier terme. La série entière exprimant l'aire de cette courbe doit donc être égale à $\frac{a^2}{b(b+\xi)}\xi$. Pour

[111] Cf. de Moivre (1730).
[112] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, [2], 129.
[113] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 3, notes (28) et (29), 128.
[114] Le cas plus difficile, celui où $x = b$, n'est pas pris en compte par Newton.
[115] Cf. Newton (MP), I, **I**, 3, § 3, [2], 129-130.
[116] Comme d'habitude, Newton ne distingue évidement pas entre la variable x et sa valeur $x = \xi$, donnant une des deux limites de quadrature.

ce qui est de la quatrième courbe, Newton obtient sa quadrature en opérant séparément les substitutions $a^2 \to x^3$, $b \to a^2$ et $x \to bx + x^2$ dans l'égalité (4.100) et en appliquant encore cet algorithme à la série résultante[117].

En résumé, la troisième proposition revient ainsi à énoncer les égalités suivantes :

$$s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\frac{a^2}{b+x}\right]\right] = s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\sum_{i=0}^{\infty}(-)^i \frac{a^2}{b^{i+1}}x^i\right]\right] = \sum_{i=0}^{\infty}(-)^i \frac{a^2}{(i+1)b^{i+1}}\xi^{i+1} \tag{4.107}$$

$$s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\frac{a^2}{b-x}\right]\right] = s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^2}{b^{i+1}}x^i\right]\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^2}{(i+1)b^{i+1}}\xi^{i+1} \tag{4.108}$$

$$\begin{aligned} s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\frac{a^2}{(b+x)^2}\right]\right] &= s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\sum_{i=0}^{\infty}(-)^i \frac{(i+1)a^2}{b^{i+2}}x^i\right]\right] s \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-)^i \frac{a^2}{b^{i+2}}\xi^{i+1} = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{b+\xi} \end{aligned} \tag{4.109}$$

$$\begin{aligned} s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\frac{x^3}{a^2+bx+x^2}\right]\right] &= s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\sum_{i=0}^{\infty}(-)^i \frac{x^3\left(bx+x^2\right)^i}{a^{2i+2}}\right]\right] \\ &= s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\sum_{i=0}^{\infty}(-)^i \frac{\sum_{h=0}^{i} G_{[h,i]}b^{i-h}x^{i+h+3}}{a^{2i+2}}\right]\right] \\ &= \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-)^i}{a^{2i+2}} \sum_{h=0}^{i} \frac{G_{[h,i]}b^{i-h}}{i+h+4}\xi^{i+h+4}\right] \end{aligned} \tag{4.110}$$

Après avoir obtenu l'égalité (4.109), Newton montre[118] comment celle-ci peut être obtenue directement, sans passer par des séries entières : il suffit d'opérer la substitution $b+x = z$ dans l'équation $y = \frac{a^2}{(b+x)^2}$ pour parvenir à la nouvelle équation $y = \frac{a^2}{z^2}$ et d'appliquer à celle-ci l'algorithme énoncé par la première proposition :

$$\begin{aligned} s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\frac{a^2}{(b+x)^2}\right]\right] &= s\left[\sum\nolimits_b^{b+\xi} \left[\frac{a^2}{z^2}\right]\right] \\ &= s\left[\sum\nolimits_b^{\infty} \left[\frac{a^2}{z^2}\right]\right] - s\left[\sum\nolimits_{b+\xi}^{\infty} \left[\frac{a^2}{z^2}\right]\right] \\ &= \frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{b+\xi} \end{aligned} \tag{4.111}$$

Cette procédure alternative confirme que Newton a parfaitement compris les relations qui lient son algorithme aux limites de quadrature, et qu'il est par conséquent parfaitement à

[117] Lors de cette application, Newton commet en vérité une erreur triviale en remplaçant les facteurs $\frac{1}{i+1}$ par des facteurs $i+1$ [cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 4, note (33), 130], ce qui le conduit à un faux résultat, que j'ai ci-dessus corrigé.

[118] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 4, [2], 130.

même d'appliquer cet algorithme pour obtenir des quadratures par le biais d'une substitution linéaire, et pour calculer des aires comprises entre des limites quelconques.

Quant à la quadrature exprimée par l'égalité (4.110), il est aisé d'observer que Newton l'obtient par une méthode qui peut être appliquée à toute courbe dont l'ordonnée est exprimée, relativement à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par un quotient de polynômes, pourvu que le dénominateur de ce quotient ne soit pas divisible par x. Si $b_0 \neq 0$, on aura en effet, conformément à l'égalité (4.100),

$$y = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j}{\sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j}{b_0 + \sum\limits_{j=1}^{m} b_j x^j} = \left[\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right] \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-)^i}{b_0^{i+1}} \left(\sum_{j=1}^{m} b_j x^j\right)^i\right] \tag{4.112}$$

et il suffira alors de développer l'une après l'autre les puissances $\left(\sum\limits_{j=1}^{m} b_j x^j\right)^i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ et de multiplier les polynômes résultant par les polynômes $\frac{(-)^i}{b_0^{i+1}} \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$, pour obtenir une série entière à laquelle il est aisé d'appliquer l'algorithme énoncé par la première proposition.

Cette méthode n'est pourtant pas seulement particulière, car il ne s'applique qu'à une classe limitée parmi toutes les courbes qu'on peut exprimer, relativement à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par une équation Algébrique, elle est aussi une méthode essentiellement récursive. Elle ne conduit qu'à exprimer les aires de ces courbes par des polynômes qu'elle permet de prolonger indéfiniment, sans fournir la forme du terme générale de ceux-ci. Le but de la quatrième proposition[119] semble justement de pallier aux deux limites d'une telle méthode, en présentant une méthode capable de fournir ce que l'on qualifie aujourd'hui de développement binomiale pour des exposants rationnels quelconques[120].

Du point de vue de Newton, il s'agit d'insérer entre les colonnes de la matrice (4.102) autant de colonnes intermédiaires qu'il est nécessaire pour parvenir à en trouver une qui correspondent à n'importe quelle valeur rationnelle de l'exposant j.

[119]Cf. Newton (MP), I, **I**, 3, **§** 4, [2], 130-134.

[120]Avant de rédiger sa quatrième proposition, Newton efface de son manuscrit l'énoncé de deux autres propositions [cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 4, note (34), 131]. La deuxième de ces propositions n'ajoutait rien à la première du traité, en se réduisant à un cas particulier de celle-ci : l'aire d'une courbe d'équation $y = ax^m + bx^n$ est égale à $\frac{a}{m+1}x^{m+1} + \frac{b}{n+1}x^{n+1}$. S'il est facile de comprendre pourquoi Newton l'a éliminée, il est plus difficile d'imaginer les raisons qui peuvent l'avoir poussé à l'introduire dans un premier temps. La première de ces propositions assure en revanche que l'aire d'une courbe d'équation $y^m = \frac{a}{b}x^n$ est égale à $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} \frac{m}{m+n} x^{\frac{n}{m}+1}$, ce qui correspond à une extension de l'algorithme énoncé dans la première proposition du traité au cas d'exposants rationnels quelconques (Newton distingue correctement entre le cas où n est positif et celui où n est négatif). Si le fait que Newton ait d'abord énoncé cette extension pourrait faire penser que la note dont il est ici question (ou du moins sa dernière partie) ait été rédigé après les notes que je discuterai dans la section 6.1 [cf. la note (8), ci-dessus] — où cette extension est obtenue comme une conséquence du théorème de van Heuraet —, son effacement et l'introduction successive d'une proposition où est présenté le développement binomiale pour des exposants rationnels quelconques semble correspondre au choix que Newton aurait fait de consacrer son traité à la présentation d'une méthode générale de quadrature par séries entières, plutôt que de présenter quelques quadratures particulières ne se servant que d'expressions finitaires.

Pour comprendre l'argument qui conduit à la solution de ce problème, revenons à la matrice (4.93). Celle-ci est un schéma de matrices. Elle exprime donc une forme possible pour une matrice qui est satisfaite par la matrice (4.49), selon la position $\mu = j$. Il est néanmoins facile de vérifier que cette forme ne se conserve pas par interpolation, car elle n'est pas satisfaite par la matrice (4.51). Le schéma de matrices (4.93) n'est pourtant qu'un cas particulier d'un schéma plus général qui exprime, quant à lui, une forme qui est conservée lors du passage de la matrice (4.49) à la matrice (4.51). Ce schéma plus général est le suivant :

$K^*_{[i,\mu]}$	$\mu = 0$	$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 3$	...
$i = 0$	$H_{0,0}$	$H_{0,0}$	$H_{0,0}$	$H_{0,0}$	...
$i = 1$	$H_{1,0}$	$H_{1,0} + H_{1,1}$	$H_{1,0} + 2H_{1,1}$	$H_{1,0} + 3H_{1,1}$	...
$i = 2$	$H_{2,0}$	$H_{2,0} + H_{2,1}$	$H_{2,0} + 2H_{2,1} + H_{2,2}$	$H_{2,0} + 3H_{2,1} + 3H_{2,2}$	...
$i = 3$	$H_{3,0}$	$H_{3,0} + H_{3,1}$	$H_{3,0} + 2H_{3,1} + H_{3,2}$	$H_{3,0} + 3H_{3,1} + 3H_{3,2} + H_{3,3}$	...
$i = 4$	$H_{4,0}$	$H_{4,0} + H_{4,1}$	$H_{4,0} + 2H_{4,1} + H_{4,2}$	$H_{4,0} + 3H_{4,1} + 3H_{4,2} + H_{4,3}$	...
...	...	...	...	...	$\ddots$

(4.113)

où l'on aura[121]

$$K^*_{[i,\mu]} = \sum_{k=0}^{Min[i,\mu]} \left(G_{[k,\mu]}\right) H_{i,k} \tag{4.114}$$

Il est aisé de vérifier que la forme exprimée par ce dernier schéma est satisfaite par n'importe quelle portion verticale de la matrice (4.102) qui dérive de la matrice (4.49) par extension à gauche.

Le point de départ de l'argument de Newton consiste justement à exhiber le schéma de matrices (4.113), en tant qu'expression de la "nature" des suites de coefficients intervenant dans la matrice (4.102)[122]. Sa supposition est que n'importe quelle portion verticale de la matrice qui résulte de cette dernière par interpolation d'un nombre quelconque de colonnes entre chaque couple de colonnes successives conserve, elle aussi, la forme exprimée par ce schéma.

La matrice (4.102) étant donnée, insérons $\eta - 1$ ($\eta = 2, 3, \ldots$) nouvelles colonnes entre chaque couple de colonnes successives de cette matrice. Nous obtenons une nouvelle matrice, dont n'importe quelle portion verticale satisfait à la forme exprimée par le schéma de matrices (4.113). Comme, quel que soit le nombre entier positif λ, toutes les entrées de la ligne de ce schéma correspondant à la position $i = \lambda$ sont obtenues par composition linéaire des $\lambda + 1$ termes $H_{\lambda,0}, H_{\lambda,1}, \ldots H_{\lambda,\lambda}$, il s'ensuit qu'il suffit de calculer les valeurs prises de ces $\lambda + 1$ termes dans le cas dont il est question, pour avoir toutes les entrées de cette même ligne dans la nouvelle matrice qui résulte de cette interpolation. Or, si on indique avec les symboles "$G_{\left[i,\frac{\mu}{\eta}\right]}$" ($i = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu = \ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots$) les entrées de cette nouvelle matrice, et que l'on pose $G_{\left[i,\frac{\mu}{\eta}\right]} = K^*_{[i,\mu]}$ (ce qui revient à supposer que le schéma de matrices (4.113) s'adapte à la portion verticale de cette nouvelle matrice qui commence

[121] Il est facile de voir que pour passer de la matrice (4.113) à la matrice (4.93) il suffit de poser $H_{i,j} = H_{i-j}$.
[122] Cf. Newton (MP), I, **1**, 3, § 4, [2], 130.

par la colonne de la matrice (4.102) qui correspond à la position $j = 0$), on aura aussi, pour tout nombre entier positif ν :

$$G_{[i,\nu]} = K^*_{[i,\nu\eta]} \tag{4.115}$$

où les $G_{[i,\nu]}$ sont, pour toute valeur de i, des nombres figurés connus. Il suffira alors de résoudre les systèmes linéaires

$$\left\{ G_{[\lambda,\nu]} = K^*_{[\lambda,\nu\eta]} = \sum_{k=0}^{Min[\lambda,\nu\eta]} \left(G_{[k,\nu\eta]}\right) H_{\lambda,k} \right\}_{\nu=0}^{\lambda} \tag{4.116}$$

dans les variables $H_{\lambda,0}, H_{\lambda,1}, \dots H_{\lambda,\lambda}$ pour obtenir toutes les entrées $G_{[\lambda,\frac{\mu}{\eta}]}$ de la ligne de cette nouvelle matrice correspondant à la position $i = \lambda$. Ceci est exactement ce que fait Newton pour les cas où $\left\{ \begin{array}{c} \eta = 1 \\ \lambda = 0, \dots 6 \end{array} \right\}$ et $\left\{ \begin{array}{c} \eta = 2 \\ \lambda = 0, \dots 5 \end{array} \right\}$, ce que lui permet d'obtenir les premières 7 lignes de la matrice qui résulte par l'introduction d'une nouvelle colonne entre chaque couple de colonnes successives de la matrice (4.102)[123] et les premières 6 lignes de la matrice qui résulte de cette même dernière matrice par l'introduction de deux nouvelles colonnes entre chaque couple de ses colonnes successives.

Bien que Newton n'écrive, évidemment, qu'un nombre fini d'entrées de ces lignes (17 dans le premier cas, relatives aux colonnes qui correspondent aux postions $\mu = -6, -5, \dots 9, 10$; et 13 dans le deuxième cas, relatives aux colonnes qui correspondent aux positions $\mu = 0, 1, \dots, 11, 12$), le seul fait d'avoir calculé les valeurs des termes $H_{\lambda,0}, H_{\lambda,1}, \dots H_{\lambda,\lambda}$ pour chacune de ces lignes, lui aurait permis de déterminer l'expression générale qui fournit ces entrées. On peut donc dire que Newton a déterminé toutes les entrées respectivement des premières 7 et 6 lignes de ces deux matrices. La situation est en revanche différente pour ce qui est des colonnes. En effet, pour calculer les entrées des lignes successives de ces matrices, Newton aurait dû résoudre à chaque tour un nouveau système linéaire. Si ces matrices s'étendent donc à l'infini aussi bien à droite qu'à gauche, elles ne sont qu'indéfiniment prolongeables vers le bas, grâce à des calculs de plus en plus compliqués. Donc, pour résoudre son problème en général, Newton doit franchir deux nouvelles étapes : il doit d'abord trouver l'expression générale qui fournit toutes les entrées des colonnes de ces deux matrices, et il doit ensuite généraliser cette expression à n'importe quelle matrice relative à toutes les valeurs de η. Pour faire ceci, il se sert d'un argument inductif.

Il remarque que les entrées qu'il a calculé pour ses deux matrices satisfont toutes, respectivement, les deux égalités suivantes

$$\begin{aligned} G_{[i,\frac{\mu}{2}]} &= \prod_{h=1}^{i} \frac{\mu - 2(h-1)}{2h} \\ G_{[i,\frac{\mu}{3}]} &= \prod_{h=1}^{i} \frac{\mu - 3(h-1)}{3h} \end{aligned} \tag{4.117}$$

[123]Il est facile de comprendre que cette matrice n'est rien d'autre que la matrice (4.51), que Newton ne fait ainsi que réobtenir en suivant une procédure suggérée par la considération de la forme de cette même matrice. L'intérêt de ce résultat ne consiste donc que dans la possibilité de généraliser cette procédure à n'importe quelle valeur de η. Ceci semble être le point clef de l'argument de Newton : la considération de la forme de la matrice (4.51) lui suggère une procédure générale capable de fournir des matrices similaires à celle-ci.

et il généralise la loi indiquée par ces égalités, pour obtenir l'égalité :

$$G_{\left[i,\frac{\mu}{\eta}\right]} = \prod_{h=1}^{i} \frac{\mu - (h-1)\eta}{h\eta} \tag{4.118}$$

($i = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu = \ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots$), qui résout en général le problème posé par la quatrième proposition, en présentant l'expression générale des entrées de n'importe quelle matrice qui résulte de la matrice (4.102) par interpolation, dans laquelle il est facile de reconnaître l'expression générale des coefficients binomiales $\left(\begin{array}{c}\frac{\mu}{\eta}\\ i\end{array}\right)$.

Il est facile d'imaginer quel aurait du être le contenu de la cinquième proposition que Newton ne rédige pas, en se limitant à laisser un espace blanc. Se présentant comme un simple corollaire de la quatrième, cette proposition aurait sans doute énoncé le développement binomiale pour des exposants rationnels quelconques :

$$(u+x)^{\frac{\mu}{\eta}} = \sum_{i=0}^{\infty} G_{\left[i,\frac{\mu}{\eta}\right]} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{h=1}^{i} \frac{\mu - (h-1)\eta}{h\eta} \right) x^i \tag{4.119}$$

($\mu = \ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots;\ \eta = 1, 2, \ldots$).

* * *

Le parcours suivi par Newton pour parvenir à l'égalité (4.118) et donc, implicitement, à l'égalité (4.119) peut paraître inutilement tortueux. Un parcours beaucoup plus simple n'est pas difficile à imaginer. Celui-ci aurait pu partir de l'égalité (2.56) déjà obtenue par Wallis, y opérer les substitutions $\nu \to i+1$ et $j + \frac{1}{2} \to j - i + 1$, pour obtenir[124]

$$\begin{aligned} F_{[i+1,j-i+1]} = G_{[i,j]} \quad &= \frac{(j-i+1)(j-i+2)(j-i+3)\ldots(j)}{i!} \\ &= \frac{j(j-1)(j-2)\ldots(j-(i-1))}{i!} \end{aligned} \tag{4.120}$$

et supposer ensuite que cette expression des coefficients $G_{[i,j]}$ est conservée lorsque l'on passe des exposants entiers positifs à des exposants fractionnaires quelconques. Il aurait ainsi obtenu sur le champs l'égalité

$$G_{\left[i,\frac{\mu}{\eta}\right]} = \frac{\frac{\mu}{\eta}\left(\frac{\mu}{\eta}-1\right)\left(\frac{\mu}{\eta}-2\right)\ldots\left(\frac{\mu}{\eta}-(i-1)\right)}{i!} \tag{4.121}$$

qui est équivalent à l'égalité (4.118).

Ceci est, pour l'essentiel, l'argument que l"on a souvent attribué à Newton. La différence entre l'argument effectivement employé par Newton et ce dernier est pourtant essentielle. Dans ce dernier argument on suppose *a priori* que l'expression intervenant dans l'égalité (2.56) est conservée. En revanche, Newton vise à montrer *a posteriori* l'invariance de cette expression, en se fondant sur la supposition d'une invariante plus profonde, concernant la

[124] Cf. la note (64), ci-dessus.

forme de la matrice (4.102). Le but auquel visent les recherches de Newton semble justement être la découverte d'une invariante algorithmique, qui est finalement dévoilée par l'égalité (4.118). L'obtention par Newton du développement binomiale pour un exposant rationnel quelconque relève justement de cette découverte.

* * *

Après avoir énoncé la proposition qui tient à l'égalité (4.119), le traité de Newton aurait pu (et même du) continuer en montrant comment cette égalité peut être appliquée pour parvenir à exprimer, par le biais d'une série entière, l'ordonnée d'une classe de courbes la plus large possible, auxquels il aurait ensuite été possible d'appliquer l'algorithme énoncé dans la première proposition, pour obtenir leur quadrature. Il est facile de comprendre que de cette manière, Newton aurait rapidement retrouvé la quadrature du cercle à laquelle il été parvenu quelques mois auparavant. Si Newton ne suivit pas ce parcours et interrompit la rédaction de son traité après la quatrième proposition, c'est probablement qu'il comprit les difficultés qu'il y aurait rencontrées. Ces difficultés auraient été en particulier bien au-dessus de ces possibilités si, au lieu de se contenter de parvenir à des quadratures par séries, il avait cherché à revenir de ces quadratures à des expressions finitaires des aires des courbes considérées, comme il fait dans la troisième proposition de son traité pour la courbe d'équation $y = \frac{a^2}{(b+x)^2}$. Et il aurait d'autant plus ressenti ces difficultés qu'en réfléchissant sur les conséquences du théorème de van Heuraet, il parvint, plus ou moins dans la même période[125], non seulement à obtenir des quadratures finitaires d'une très large classe de courbes, mais aussi à justifier l'extension à des exposants fractionnaires quelconques de l'algorithme de quadrature énoncé par la première proposition. Ces nouveaux résultas feront l'objet de la section 6.1.

[125] Cf. la note (8), ci-dessus.

Chapitre 5

Newton et Descartes : tangentes, normales, quadratures et courbures (été 1664-mai 1665)

Bien qu'un grand nombre de notes publiées par Whiteside dans le premier volume des *Mathematical Papers*[1] témoignent d'une lecture approfondie, de la part de Newton, de la seconde édition latine de la *Géométrie*, on ne dispose de rien de similaire à un compte-rendu de cette lecture comparable à ce qui accompagna la lecture de l'*Arithmetica infinitorum*. Les notes dont on dispose se concentrent sur des aspects particuliers de l'œuvre de van Schooten, et relèvent d'emblée d'un effort d'élaboration de nouvelles techniques mathématiques.

Tout d'abord, Newton se tient assez proche des textes qu'il lit : encore que son attitude n'est jamais passive, il cherche surtout à comprendre, à comparer entre elles, à évaluer, parfois à améliorer les techniques et les méthodes qu'il étudie. En s'éloignant progressivement de ces textes, il parvient enfin, en deux notes datées respectivement du 20 et du 21 mai 1665, à définir un algorithme fort général propre à fournir les expressions des sous-normales, des sous-tangentes, du rayon de courbure, et des coordonnées du centre de courbure de toute courbe exprimée, par rapport à un certain système de coordonnées cartésiennes, par une équation Algébrique.

5.1 Entre l'été et l'automne 1664 : les premières recherches sur la sous-normale

Les notes qui relèvent de plus près d'une lecture de l'œuvre de van Schooten— et en particulier des passages de la *Géométrie* où il est question de normales et de tangentes, et de la lettre de Hudde sur la méthode des *maxima* et des *minima* — ont été publiées par

[1]En particulier en Newton (MP), I, **2**, 143-448.

Whiteside sous le titre "Work on Cartesian Subnormal"[2]. Ce dernier a daté ces notes de l'automne 1664. Pour leur contenu, elles me semblent pourtant précéder une courte note qu'on va étudier postérieurement[3], que le même Whiteside a daté de septembre 1664 et qu'il a d'ailleurs insérée plus loin dans le premier volume des *Mathematical Papers*. On peut donc conjecturer qu'elles remontent à la fin de l'été 1664.

5.1.1 La recherche des normales à des hyperboles

Bien que portant essentiellement sur la règle de Hudde et sur la version adaptée du théorème de van Heuraet qu'on a présenté dans la section 3.5.3, ces notes s'ouvrent[4] sur la recherche des normales à des hyperboles conduite selon une variante de la méthode de Descartes qui ne relève pas de cette règle, mais semble s'inspirer des suggestions de Fermat[5]. Bien que Newton se limite à considérer quelques exemples et à exécuter les calculs correspondant sans aucune exposition générale de sa méthode, il est facile de comprendre son approche générale.

En supposant donnée une courbe $\mathsf{AM'M}$ (fig. 1), référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'axe AH et origine A, il considère un point M quelconque sur cette courbe, il trace le segment $\mathsf{\Gamma M}$ qui joint ce point à un point $\mathsf{\Gamma}$ quelconque pris sur l'axe AH, et il cherche à déterminer la position que le point $\mathsf{\Gamma}$ doit prendre pour que le segment $\mathsf{\Gamma M}$ soit un *minimum* et soit donc normale à la courbe au point M. Pour ceci, il considère un point $\mathsf{M'}$ sur la courbe, dont l'abscisse diffère de l'abscisse de M par une différence $\mathsf{P'P}$ dont le carré peut être négligé, et il impose la condition $\mathsf{\Gamma M} = \mathsf{\Gamma M'}$ qui, d'après le théorème de Pythagore, fournit l'équation[6]

$$(\mathsf{PM})^2 + (\mathsf{P\Gamma})^2 = (\mathsf{P'\Gamma})^2 + (\mathsf{P'M'})^2 \tag{5.1}$$

Il ne reste alors qu'à déterminer la valeur de $\mathsf{P\Gamma}$ qui satisfait à cette équation pour avoir la sous-normale relative à M. Naturellement cette dernière étape de la méthode est plus ou moins facile à franchir selon la forme de l'équation (5.1). En réfléchissant sur des exemples, Newton semble justement chercher une procédure propre à donner à cette équation une forme convenable.

D'abord il considère l'hyperbole exprimée par l'équation

$$y^2 = x^2 + xy + ay + ax \tag{5.2}$$

Si on pose $\mathsf{AP} = x$, $\mathsf{PM} = y$, $\mathsf{\Gamma M} = s_*$ et $\mathsf{P\Gamma} = w_*$[7], le problème se réduit à trouver les conditions auxquelles le segment

$$s_*^2 = w_*^2 + x^2 + xy + ay + ax \tag{5.3}$$

[2]Cf. la note (72), p. 163, ci-dessus.

[3]Cf. la section 5.2.

[4]Cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 1, [1], 216-218. Pour uniformiser avec ce qui précède, j'intervertis ici la signification des symboles "x" et "y".

[5]Cf. la section 3.4.

[6]Cf. ci-dessus, pp. 112-112.

[7]Newton indique les segments que j'indique ici par les symboles "s_*" et "w_*" avec les symboles "s" et "v", hérités de Descartes. Il me semble pourtant que le segment $\mathsf{\Gamma M}$ joue dans les calculs de Newton un rôle différent de celui du segment s de Descartes, car rien ne force dans ces calculs à considérer *a priori* ce segment comme la normale à la courbe dans le point M. Quant au segment $\mathsf{P\Gamma}$, il correspond, tout au plus, à la différence $v - X$ dans la méthode de Descartes.

est un *minimum.* Pour cela Newton pose $\mathsf{AP}' = x+o$ (c'est-à-dire $\mathsf{PP}' = -o$ et $\Gamma\mathsf{P}' = w_*-o$), néglige les carrés de o, et suppose de façon erronée que $\mathsf{MP} = \mathsf{P}'\mathsf{M}'$. L'équation (5.1) se transforme alors en la suivante

$$2ow_* = 2ox + yo + ao \tag{5.4}$$

laquelle, à cause de l'égalité incorrecte $\mathsf{MP} = \mathsf{P}'\mathsf{M}'$, ne fournit pas les conditions auxquelles le segment $w_* = \mathsf{P}\Gamma$ est la sous-normale à la courbe au point M.

En ayant compris son erreur, Newton la corrige d'emblée. En posant cette fois[8] $\mathsf{AP}' = x - o$ (c'est-à-dire $\mathsf{PP}' = o$ et $\Gamma\mathsf{P}' = w_* + o$), $\mathsf{AP}' = \xi$ et $\mathsf{P}'\mathsf{M}' = z$, il tire par le même procédé l'équation

$$w_* = \frac{x^2 + xy + ay + ax - \xi^2 - z\xi - a\xi - az}{2o} \tag{5.5}$$

Mécontent de cette solution, il revient finalement à la notation de van Schooten. Il pose[9] $\mathsf{A}\Gamma = v_*$, $\mathsf{P}\Gamma = v_* - x$ et $\mathsf{P}'\Gamma = v_* - \xi$ et cherche à déterminer, par la même méthode, la valeur de v_* correspondant à l'abscisse du pied de la normale au point M. Il est pourtant clair que ceci ne revient qu'à un changement de notation qui produit l'équation

$$2(x - \xi)v_* = 2(x^2 - \xi^2) + xy - z\xi + a(x - \xi) + a(y - z) \tag{5.6}$$

d'où, en posant rien que dans le nominateur $x = \xi$, Newton tire l'égalité

$$v_* = \frac{xy - z\xi + a(y - z)}{2(x - \xi)} \tag{5.7}$$

En observant que si $\mathsf{P}\Gamma = w_*$, $\mathsf{P}'\,\Gamma = w_* + o$ et $\mathsf{A}\Gamma = v_*$, alors $w_* = v_* - x$ et $\mathsf{AP}' = \xi = x - o$, en posant $\mathsf{P}'\mathsf{M}' = z = y - e$, et en traitant e comme o, Newton aurait pu écrire respectivement les égalités (5.5) et (5.6) sous les formes

$$v_* = x + \frac{2xo + xe + oy + ao + ae}{2o} \tag{5.8}$$

et

$$v_* = \frac{xe + oy + ae}{2o} \tag{5.9}$$

On comprend alors qu'au-delà de la notation malheureuse et des tâtonnements dans les calculs, c'est la méthode qui est inadéquate, car elle ne prévoit pas l'élimination d'une des coordonnées de la courbe.

C'est exactement ce que les calculs précédents, encore qu'incertains, semblent avoir enseigné à Newton. En continuant dans sa note, celui-ci considère en fait l'hyperbole d'équation $x^2 = y^2 - 2xy + ax$, et il transforme aussitôt cette équation dans l'autre :

$$y = x \pm \sqrt{2x^2 - ax} \tag{5.10}$$

[8]En vérité Newton note d'abord le segment AP' avec le symbole "s" qu'il avait déjà utilisé pour indiquer le segment $\Gamma\mathsf{M}$, et le segment $\mathsf{P}'\mathsf{M}'$ avec le symbole "r". Il n'emploie la notation que je d'adopte ici que quelques lignes plus loin. Sur le calcul de Newton, cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 1, note (4), 215-216.

[9]Évidemment Newton écrit "v" là où j'écrit "v_*" : cf. la note 7, ci-dessus. Sur le nouveau calcul de Newton, cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 1, notes (5)-(6), 216-217.

En posant $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{AP}' = \xi$, il peut alors calculer les valeurs de $(\mathsf{PM})^2$ et de $(\mathsf{P'M'})^2$ respectivement en termes de x et de ξ :

$$\begin{aligned}(\mathsf{PM})^2 &= \left(x \pm \sqrt{2x^2 - ax}\right)^2 \\ &= 3x - ax \pm 2x\sqrt{2x^2 - ax} \\ (\mathsf{P'M'})^2 &= \left(\xi \pm \sqrt{2\xi t^2 - a\xi}\right)^2 \\ &= 3\xi^2 - a\xi \pm 2\xi\sqrt{2\xi^2 - a\xi}\end{aligned} \tag{5.11}$$

De là, en posant encore $\mathsf{A\Gamma} = v_*$ il s'ensuit que l'équation (5.1) référée à cette hyperbole peut être mise sous la forme

$$v_* = \frac{4x^2 - ax \pm 2\sqrt{2x^4 - ax^3} - 4\xi^2 + a\xi \mp 2\xi\sqrt{2\xi^2 - a\xi}}{2\,(x - \xi)} \tag{5.12}$$

Arrivé à ce point, la solution du problème ne dépend que de la possibilité de réécrire cette équation en termes de la seule variable x. Les calculs que Newton exécute pour parvenir à ce résultat deviennent pourtant très vite assez confus[10], et il est difficile de comprendre, sur la base des notes dont on dispose, comment il arrive enfin au résultat correct :

$$v_* = x + \frac{2y^2 + 2xy - ay}{2y - 2x} \tag{5.13}$$

Au-delà des incertitudes de ces calculs, l'argument que Newton semble finalement avoir mis au point semble suffisamment clair. Il peut être interprété de deux manières distinctes. On peut d'abord penser que ce dernier ne fait que suivre fidèlement la méthode des normales de Fermat, dans la version de van Schooten[11]. C'est ce que j'ai supposé dans ma reconstruction. Le point $\mathsf{\Gamma}$ est alors un point arbitraire pris sur l'axe AH qui est considéré comme le centre d'un faisceau de droites, parmi lesquelles on cherche les normales à la courbe donnée. Lorsque les équations exprimant les conditions que ces normales sont censées satisfaire ont été trouvées, on peut néanmoins les lire à rebours, et les considérer comme des équations où l'inconnue n'est pas l'abscisse des points où ces normales coupent la courbe, mais l'abscisse du pied de la normale relative à un point fixé sur cette courbe. Cette inversion dans la signification des équations auxquelles on parvient en suivant cette méthode peut être évitée à condition de supposer d'emblée — grâce à une hypothèse analytique — que le point $\mathsf{\Gamma}$ est le pied de la normale relative à un point M fixé. L'argument de Newton revient alors à supposer que la normale à tout point de la courbe reste constante en longueur en passant de ce point à un point très proche, c'est-à-dire qu'il revient à confondre un arc très petit de la courbe donnée avec un arc de cercle. Si on acceptait cette deuxième interprétation, alors on devrait en conclure que la méthode des *maxima* et *minima* de Fermat, prise en tant que telle, n'entre en rien dans l'argument de Newton, qui se limiterait à suivre la suggestion de Fermat à propos du traitement algorithmique d'un accroissement très petit d'une variable.

Quelle que soit l'interprétation qu'on choisit, il est facile de généraliser cet argument. Voici comment ceci peut être fait, en accord à la deuxième interprétation.

[10]Sur ces calculs cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 1, notes (9)-(12).

[11]Cf. pour une confirmation de cette hypothèse, cf. Newton (MP), I, **2**, Introduction, appendix 1, 149.

Une équation $F(x,y)=0$ — exprimant une certaine courbe, par rapport à un certain système de coordonnées cartésiennes orthogonales — étant donnée, il s'agit d'abord de la mettre sous la forme $y=f(x)$. En indiquant par "s" la normale relative à un point quelconque de cette courbe, de coordonnées x et y, et par "v " l'abscisse du pied de cette normale, on obtient ensuite l'équation *standard*

$$(v-x)^2+[f(x)]^2=s^2 \tag{5.14}$$

qui équivaut à l'équation (3.1) de Descartes. En supposant que dans l'intervalle $[x,x+o]$ la courbe exprimée par l'équation donnée peut être confondue avec le cercle de rayon s centré sur le point où cette normale coupe l'axe des abscisses, et que les puissances de o supérieures à la première peuvent être négligées, on tire de là la nouvelle équation :

$$(v-x)^2+[f(x)]^2=\Big[(v-x-o)^2+[f(x+o)]^2\Big]_{o^2=0} \tag{5.15}$$

à partir de laquelle, il s'agit de déterminer $v=x+sn._x$ en termes de la seule variable x.

Or, il est clair que si $f(x)$ est un polynôme en x, de sorte qu'on puisse poser en général

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}A_ix^i \tag{5.16}$$

où n est un nombre entier quelconque, alors l'équation (5.15) équivaut à la suivante :

$$2vo=+2xo+2o\left(\sum_{i=0}^{n}A_ix^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}A_iix^{i-1}\right) \tag{5.17}$$

De là, il est alors facile de tirer

$$sn._x=v-x=\left(\sum_{i=0}^{n}A_ix^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}A_iix^{i-1}\right) \tag{5.18}$$

qui est, comme on le sait, la solution correcte.

Des transformations analogues conduisent au résultat correct, à partir de l'équation (5.15), lorsque $f(x)$ n'est pas un polynôme en x. La présence des carrés $[f(x)]^2$ et $[f(x+o)]^2$ dans cette dernière équation rend pourtant ces transformations assez pénibles, en général. L'indisponibilité d'une forme générale finitaire pour l'expression $f(x)$ qui entre dans une équation Algébrique de la forme $y=f(x)$, analogue à celle de l'expression $F(x,y)$ qui entre dans une équation Algébrique entière de la forme $F(x,y)=0$ (dont on s'est servi dans la section 3.2.3 pour déduire l'égalité (3.56)), rend d'ailleurs impossible de tirer de l'équation (5.15) un algorithme général pour la sous-normale, sauf si on suppose avoir recours à des développements en série entière. Il suffit alors d'observer que dans l'été 1664 Newton n'était certes pas à même de transformer toute expression Algébrique dans une série entière pour conclure que, en suivant l'argument précédent, il n'aurait certes pas pu parvenir à déterminer un algorithme de la sorte. Pour le faire il aurait dû reformuler sa méthode de manière à la rendre indépendante de la disponibilité d'une expression Algébrique de y en termes de x. C'est exactement ce qu'il fera quelques mois plus tard, dans une note[12] du 20 mai 1665.

[12] Cf. la section 5.5.1.

Avant d'y venir, il faut suivre Newton tout au long d'un parcours assez long au cours duquel il compare de différentes manières la méthode des normales de Descartes, dans sa version originale, avec des variations possibles de celle-ci relevant de la méthode des *maxima* et des *minima* de Fermat.

Bien que la pratique mathématique de Newton ne soit pas encore très sûre dans l'été 1664, celui-ci semble en fait avoir saisi l'exigence d'une modification radicale de la méthode des tangentes et des normales de Descartes propre à libérer cette méthode des difficultés algorithmiques qui l'accompagnent. Il semble de surcroît avoir compris, certainement grâce aux suggestions de Fermat, que ceci est possible grâce à la considération de deux points sur la courbe dont on cherche la normale ou la tangente, si proches l'un de l'autre que les puissances supérieures de la différence de leurs coordonnées peuvent être négligées. L'avantage de cette pratique ne vient pas des omissions qu'elle permet (car celles-ci ne font que simplifier des expressions qui dérivent à leur tour d'une complication de l'équation de départ due à la considération de deux points sur la courbe). Il vient plutôt de la possibilité, par cette astuce, de libérer la méthode des tangentes et des normales de la considération des conditions qu'une équation doit satisfaire pour avoir une racine double. Dans l'été 1664, Newton n'était pourtant pas en condition de profiter de cet avantage excepté dans certains cas particuliers. Il est donc naturel qu'il se lance dans une comparaison de différentes méthodes, comparaison qui l'occupera plusieurs mois.

5.1.2 L'application de la règle de Hudde et l'adaptation du théorème de van Heuraet

C'est justement à la méthode des normales de Descartes, et en particulier à la possibilité de simplifier cette méthode en lui appliquant la règle de Hudde, que sont consacrées les notes, probablement postérieures de quelques jours, que Whiteside a publiées à la suite de celles qu'on vient de considérer[13].

L'application de la règle de Hudde

Bien que Hudde lui-même eût présenté sa règle comme un algorithme pour la recherche des *maxima* et des *minima*, Newton la comprend d'emblée comme un algorithme pour la recherche de la sous-normale, qu'on peut appliquer à la méthode de Descartes, dans sa version originale.

L'argument dont il semble se réclamer pour justifier un tel usage de cette règle est très simple et doit avoir été courant parmi les mathématiciens réunis autour de van Schooten. Il est d'ailleurs avancé de manière explicite par van Heuraet, au cours des exemplifications de sa méthode de rectification[14]. Il est ainsi compréhensible que Newton n'emploie pas une seule ligne pour l'expliciter. Le triangle de Descartes ayant été construit, et ayant composé l'une ou l'autre des équations (3.2) avec l'équation exprimant la courbe donnée par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, on trouve, comme l'explique Descartes, une équation entre x, s et v ou entre y, s et v. Si on suppose que s est la normale à la courbe au point M de coordonnées x et y, il s'ensuit que si l'on remplace dans cette équation x ou y par n'importe quelle autre variable, disons t, alors cette équation a une racine double

[13] Cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 1, [2], 218 et § 2, 219-233.

[14] Cf. la section 3.5.2, en particulier p. 152.

$t = x$ ou $t = y$. Or, la substitution de t à x ou à y n'est pas opérationnellement essentielle. Pour trouver une égalité qui peut être employée pour déterminer v ou s en termes de x ou y, il suffit donc d'ordonner l'équation trouvée par rapport aux puissances de x ou de y et d'opérer sur elle conformément à la règle de Hudde. Les notes de Newton relèvent de la prise en compte de vingt-sept courbes différentes, toutes exprimées par des équations entières par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, dont celui-ci cherche à déterminer la sous-tangente, en se réclamant de cette méthode générale.

Comme dans l'équation (3.1) la variable s n'apparaît qu'une seule fois (à la deuxième puissance) tandis que la variable v y intervient deux fois (autant à la première qu'à la deuxième puissance), il est naturel de chercher à appliquer la règle de Hudde de manière à éliminer la première de ces variables, en obtenant ainsi une équation en v et x ou en v et y , à partir de laquelle la détermination de v en termes respectivement de x ou de y est facile. Ceci est possible si et seulement si l'équation exprimant la courbe donnée permet d'exprimer y, y^2 ou x en termes d'un polynôme fini ou infini dans l'autre coordonnée contenant éventuellement des puissances négatives de cette coordonnée. En d'autre termes, ceci est possible si et seulement si cette équation peut être mise sous une des trois formes suivantes :

$$\begin{aligned} x^m y^p &= \sum_{i=0}^{n} A_i x^i \qquad\qquad [p = 1, 2] \\ y^m x &= \sum_{i=0}^{n} A_i y^i \end{aligned} \tag{5.19}$$

où m et n sont deux nombres entiers positifs quelconques, dont le second peut éventuellement être infini. Ces cas sont donc les plus simples. De surcroît, comme la forme de l'équation (3.1) est telle qu'une application de la règle de Hudde à la résultante de la composition de cette équation avec l'équation exprimant la courbe donnée conduit à éliminer la variable s si et seulement si cette même application conduit à éliminer v^2, en fournissant ainsi une équation de premier degré en v, ces cas sont même très simples.

En effet, si on met l'équation (3.1) sous la forme

$$s^2 - v^2 = y^2 - 2xv + x^2 \tag{5.20}$$

et qu'on la compare avec une des équations (5.19), on obtient respectivement :

$$\begin{aligned} x^{2m}\left(s^2 - v^2\right) &= \sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{j=0}^{i} A_j A_{i-j}\right) x^i - 2vx^{2m+1} + x^{2m+2} \\ x^m\left(s^2 - v^2\right) &= \sum_{i=0}^{n} A_i x^i - 2vx^{m+1} + x^{m+2} \\ y^{2m}\left(s^2 - v^2\right) &= y^{2m+2} - 2v\sum_{i=0}^{n} A_i y^{m+i} + \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} A_j A_{i-j}\right) y^i \end{aligned} \tag{5.21}$$

Il suffit alors de choisir la progression $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ de manière à ce qu'on ait $\tau_{2m} = 0$, pour le premier ou le troisième cas, et $\tau_m = 0$, pour le deuxième cas, à fin de transformer ces équations, grâce à la règle de Hudde, en des équations de premier degré en v, où la variable

s n'apparaît pas. En particulier, si on prend respectivement $\tau_0 = -2m$ et $\tau_0 = -m$, avec $\eta = 1$ dans les deux cas, on a $\tau_i = i - 2m$ et $\tau_i = i - m$ $(i = 0, 1, ...)$ et donc, en appliquant la règle de Hudde par rapport à ces progressions :

$$
\begin{aligned}
v &= x + \frac{\sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^{i} A_j A_{i-j} \right) (i-2m)\, x^i}{2x^{2m+1}} \\
v &= x + \frac{\sum_{i=0}^{n} A_i \,(i-m)\, x^i}{2x^{m+1}} \\
v &= \frac{2y^{2m+2} + \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^{i} A_j A_{i-j} \right) (i-2m)\, y^i}{2 \sum_{i=0}^{n} A_i \,(i-m)\, y^{m+i}}
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

Parmi les vingt-sept courbes considérées par Newton, vingt-trois relèvent d'équations d'une des trois formes (5.19). Les polynômes intervenant dans ces équations sont naturellement tous finis et généralement très simples. Dans ces cas, il suffit d'appliquer pas à pas la procédure précédente, pour obtenir des cas particuliers des égalités (5.22)[15]. Dans les quatre exemples restants, Newton se comporte de manière à chaque fois différente. Dans un cas[16], il écarte la règle de Hudde et il suit l'argument de Descartes dans sa version originale. Dans un autre[17], il applique deux fois le théorème de Hudde, relativement à deux successions arithmétiques différentes, en parvenant ainsi à deux équations distinctes en s^2, qu'il compare pour éliminer s et déterminer v en termes de y. Dans un troisième cas, il abandonne son calcul après avoir calculé de façon erronée s^2 en termes de v^2 et y[18]. Finalement dans le dernier cas[19], il se limite à laisser un espace blanc qu'il ne comblera jamais.

Dans leur ensemble, les calculs par lesquels Newton cherche à déterminer la sous-tangente des courbes qu'il considère montrent que, vers la fin de l'été 1664, celui-ci a désormais parfaitement assimilé la règle de Hudde et qu'il a compris comment cette règle peut être appliquée pour simplifier la méthode des normales et des tangentes de Descartes et, dans certains cas, pour transformer cette méthode en un algorithme fort simple. Le fait que cette transformation n'apparaisse possible à Newton que dans certains cas dépend du fait que celui-ci n'a pas encore assimilé la leçon de Florimond. Il n'a pas encore compris que la considération d'un triangle auxiliaire permet d'éviter l'inutile et gênant passage aux carrés,

[15] Cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 1, [2], 218 (première égalité) et § 2, [1], 219 (deuxième égalité) ; [3], 221 (première égalité) ; [4]-[5], 221-222 (troisième égalité) ; [7]-[10], 224-225 (troisième égalité) ; [11], 225 (deuxième égalité) ; [13]-[14], 226-227 (première égalité) ; [15], 227 (troisième égalité, avec une petite erreur de transcription dans le calcul) ; [17], 227 (troisième égalité, avec une autre petite erreur de transcription dans le calcul [cf. *ibid.*, note (35)]) ; [18]-[19], 228 (deuxième égalité ; les courbes considérées sont deux cercles, le résultat est donc immédiat) ; [20]-[24], 228-232 (première égalité) ; [25], 232 (deuxième égalité) ; [26], 233 (première égalité).

[16] Cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 2, [2], 219-220.

[17] Cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 2, [6], 223. Les calculs de Newton sont en réalité erronés à cause de deux fautes initiales de transcription [cf. *ibid.* notes (15) et (17), 222-223].

[18] Cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 2, [12], 226 ; pour une reconstruction d'une possible continuation correcte du calcul, cf. *ibid.*, note (28), 226-227.

[19] Cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 2, [16], 227 et note (34).

qu'elle libère la méthode de Descartes de sa limitation au cas de courbes référées à un système de coordonnées orthogonales, et qu'elle conduit à des équations qui, transformées selon la règle de Hudde, apportent à coup sur une solution aisée du problème. *A fortiori*, il n'a pas encore compris que la considération de ce triangle auxiliaire permet l'introduction d'une nouvelle inconnue, le rapport $\frac{\sigma}{v}$, en termes de laquelle le problème des normales et des tangentes peut être formulé et résolu de la manière la plus simple et la plus générale.

L'adaptation du théorème de van Heuraet

Dans les notes de Newton il y a pourtant plus que ces calculs. Pour une bonne partie des courbes qu'il considère, celui-ci ne se limite pas, en effet, à calculer v (et de là $sn._x$) en termes de l'abscisse x ou de l'ordonnée y du point considéré ; ceci étant fait, il continue en abordant le problème de la quadrature de ces courbes.

Voici, par exemple, comment il raisonne lors de la prise en compte de sa cinquième courbe[20], une cubique d'équation $y^3 = a^2x$. Conformément à la troisième des égalités (5.22), on aura dans ce cas

$$v = \frac{a^4 + 3y^4}{3a^2y} \tag{5.23}$$

et donc

$$sn._x = v - x = \frac{a^4 + 3y^4}{3a^2y} - \frac{y^3}{a^2} = \frac{a^2}{3y} \tag{5.24}$$

Ce résultat ayant été établi, Newton continue en calculant le quatrième proportionnel Q_x entre l'ordonnée y, la sous-normale $sn._x$ et l'abscisse x :

$$Q_x = x\frac{sn._x}{y} = \frac{y}{3} \tag{5.25}$$

Il suppose ensuite qu'il existe une valeur $x = \varkappa$ de l'abscisse, telle que l'ordonnée et la sous-normale correspondantes, $y_\varkappa$ et $sn._\varkappa$ soient égales entre elles, et il calcule cette valeur. En ayant, par hypothèse

$$y_\varkappa = sn._\varkappa = \frac{a^2}{3y_\varkappa} \tag{5.26}$$

il s'ensuit

$$(y_\varkappa)^2 = \frac{a^2}{3} \tag{5.27}$$

et donc

$$\varkappa = \frac{a}{3\sqrt{3}} \tag{5.28}$$

Arrivé à ce point, il associe à la courbe donnée une nouvelle courbe référée au même système de coordonnées, dont l'ordonnée z satisfait à la proportion

$$y : sn._x = \varkappa : z \tag{5.29}$$

qui fournit l'équation

$$z = \varkappa\frac{sn._x}{y} = \varkappa\frac{Q_x}{x} = \frac{a^3}{9\sqrt{3}y^2} \tag{5.30}$$

[20]Cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 2, [4], 221.

ou bien

$$z^3x^2 = \frac{a^5}{729\sqrt{27}} \tag{5.31}$$

Ayant trouvé cette équation, Newton conclut, enfin, sans fournir aucune justification, que le trapézoïde délimité par l'axe des abscisses, la courbe exprimée par cette équation et les ordonnées z et $z_{\varkappa}$ de cette même courbe est égal au rectangle $R(\varkappa, y - y_{\varkappa})$ de base $\varkappa$ et hauteur $y - y_{\varkappa}$.

Il est aisé de vérifier que l'équation (5.30) correspond à celle qu'on indiquerait ainsi aujourd'hui :

$$z = \varkappa \frac{d}{dx}(y) \tag{5.32}$$

D'un point de vue purement algorithmique, la conclusion de Newton correspond donc à l'égalité

$$\int_{\varkappa}^{x} \varkappa \frac{d}{dx}(y)\, dx = \varkappa\, [y]_{\varkappa}^{x} \tag{5.33}$$

Elle ne peut pas néanmoins être justifiée en se réclamant de cette égalité. À la fin de l'été 1664, elle ne pouvait se fonder que sur l'adaptation du théorème de van Heuraet qu'on a présentée lors de la section 3.5.3.

Avant de venir à la justification de la démarche de Newton, il convient d'en prendre en compte d'autres applications. Ce dernier suit en fait à peu près la même démarche relativement à un certain nombre d'autres courbes parmi celles dont il calcule la sous-normale[21]. Parmi les autres, trois cas méritent d'être considérés en détail. Je commencerai par en considérer deux d'entre eux[22], relevant respectivement des courbes d'équation $x^3y = a^4$ et $x^4y = a^5$. Conformément à la première des égalités (5.22), on aura respectivement

$$\begin{aligned} v &= x - \frac{3a^8}{x^7} \\ v &= x - \frac{4a^{10}}{x^9} \end{aligned} \tag{5.34}$$

et donc[23]

$$\begin{aligned} sn._x = x - v &= \frac{3a^8}{x^7} \\ sn._x = x - v &= \frac{4a^{10}}{x^9} \end{aligned} \tag{5.35}$$

[21]Cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 2, [5], 221 (où Newton inverse les rôles de x et y et ne fait aucune mention explicite de la quadrature de la courbe d'équation $z = f(y)$) ; [7]-[8], 224 (où Newton se limite à trouver Q_x en termes de y) ; [9], 224 (où le calcul de l'ordonnée z est interrompu bientôt [cf. *ibid* ., note (20), 225]) ; [10], 225 (où Newton se limite à trouver Q_x en termes de y) ; [11], 225 (où Newton calcule autant $sn._x$ que $sn._y$ et détermine les équations $z = K\frac{sn._x}{y}$ et $z = K\frac{sn._y}{x}$, K étant une constante quelconque, et observe que la courbe exprimée par cette dernière équation peut être carrée) ; [13], [15] et [17]-[19], 226-228 (où Newton calcule directement l'ordonnée z comme le produit $K\frac{Q_x}{x}$ et ne fait aucune mention explicite de la quadrature de la courbe d'équation $z = f(x)$) ; [20], 228-229 (cf. ci-dessous) ; [21]-[22], 229-230 (analogues à [4]) ; [23]-[24], 230-232 (cf. ci-dessous) ; [25]-[26], 232-233 (où Newton se limite à calculer z comme le produit $K\frac{Q_x}{x}$ et ne fait aucune mention explicite de la quadrature de la courbe d'équation $z = f(x)$).

[22]Cf. respectivement Newton (MP), I, **2**, 2, § 2, [23], 230-231 et [24], 231-232.

[23]Les deux courbes en question étant des hyperboloïdes, leur sous-normale est négative ; Newton la prend pourtant en valeur absolue.

ce qui donne

$$\begin{aligned} Q_x &= x\frac{sn._x}{y} = \frac{3a^4}{x^3} \quad ; \quad \varkappa = a\sqrt[4]{3} \\ Q_x &= x\frac{sn._x}{y} = \frac{4a^5}{x^4} \quad ; \quad \varkappa = a\sqrt[5]{4} \end{aligned} \tag{5.36}$$

Bien que la proportion (5.29) fournisse alors les équations

$$\begin{aligned} z &= \varkappa\frac{Q_x}{x} = \sqrt[4]{3^5}\frac{a^5}{x^4} \\ z &= \varkappa\frac{Q_x}{x} = \sqrt[5]{4^6}\frac{a^6}{x^5} \end{aligned} \tag{5.37}$$

Newton passe à la considération les courbes d'équation

$$\begin{aligned} z &= \frac{a}{3}\frac{Q_x}{x} = \frac{a^5}{x^4} \\ z &= \frac{a}{4}\frac{Q_x}{x} = \frac{a^6}{x^5} \end{aligned} \tag{5.38}$$

et conclut que les trapézoïdes délimités par ces courbes, l'axe des abscisses, et les ordonnées z_a et z_{2a} de ces mêmes courbes sont respectivement égaux aux rectangles $R(\frac{a}{3}, y_a - y_{2a})$ et $R(\frac{a}{4}, y_a - y_{2a})$ de bases $\frac{a}{3}$ et $\frac{a}{4}$ et hauteur $y_a - y_{2a}$.

On comprend alors que la procédure de quadrature suivie par Newton n'assigne aucun rôle particulier à la valeur $x = \varkappa$ de l'abscisse. Celle-ci n'est qu'une valeur constante parmi d'autres qui peuvent entrer dans la définition de l'ordonnée z de la courbe à carrer. Les limites mêmes du trapézoïde délimité par cette courbe que Newton dit être égal à un rectangle ne dépendent pas nécessairement de cette valeur, et elles ne dépendent pas non plus, en général, de la constante qui entre dans la définition de z.

La démarche de Newton est alors en général la suivante. Une équation Algébrique $F(x, y) = 0$ d'une des trois formes (5.19) étant donnée en tant qu'équation d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, il s'agit d'abord de trouver la sous-normale $sn._x$ de cette courbe. Ceci étant fait, on définit une nouvelle courbe par l'équation

$$z = K\frac{sn._x}{y} = K\frac{Q_x}{x} \tag{5.39}$$

où Q_x est le quatrième proportionnel entre y, x et $sn._x$, et on choisit deux valeurs quelconques de l'abscisse x pour lesquelles l'ordonnée z de cette courbe prend à son tour des valeurs finies, disons $x = \kappa$ et $x = \xi$. On en conclut enfin que le trapézoïde délimité par l'axe des abscisses, la courbe d'ordonnée z et les ordonnées z_κ et z_ξ de cette courbe est égal au rectangle $R(K, y_\xi - y_\kappa)$ ou au rectangle $R(K, y_\kappa - y_\xi)$, selon si $y_\varkappa$ est plus grand ou plus petit que y_ξ. En introduisant la notation moderne pour les valeurs absolues pour indiquer la différence entre la plus grande et la plus petite de ces valeurs, et en se réclamant en même temps d'une notation déjà employée dans les chapitres précédents, cette conclusion pourra s'indiquer ainsi :

$$\sum\nolimits_\kappa^\xi [z] = \sum\nolimits_\kappa^\xi [K\frac{sn._x}{y}] = R(K, |y_\xi - y_\kappa|) \tag{5.40}$$

d'où il est aisé de tirer

$$s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[K\frac{sn._x}{y}]\right] = K\left|y_{\xi} - y_{\kappa}\right| \tag{5.41}$$

Une confirmation de cette interprétation de la démarche de Newton vient de la conclusion à laquelle Newton parvient en comparant entre eux les résultats atteints pour les deux courbes qu'on a considérées ci-dessus. En observant que ces courbes sont exprimées par des équations de la même forme, il conclut que[24] :

> whence supposeing x to be a line increasing in arithmetical proportion from the quantity of the line (a) until it be as long as b. the superficies resulting out of $\frac{a^3}{xx}$. $\frac{a^4}{x^3}$. &c. is found as follows $\frac{a^3}{xx} = aa - \frac{a^3}{b}$. $\frac{a^4}{x^3} = \frac{aa}{2} - \frac{a^4}{2bb}$. $\frac{a^5}{x^4} = \frac{aa}{3} - \frac{a^5}{3b^3}$. [...] &c.

Dans ma notation et selon l'interprétation précédente, cela s'écrit en fait ainsi :

$$s\left[\sum\nolimits_{a}^{b}[a\frac{a^{m+1}}{x^{m+1}}]\right] = \frac{a}{m}\left[\frac{a^{m+1}}{a^m} - \frac{a^{m+1}}{b^m}\right] \tag{5.42}$$

où m est un nombre entier strictement positif quelconque.

La procédure de quadrature par laquelle Newton obtient les résultats précédents ayant été exposée dans sa forme générale, il s'agit maintenant de comprendre comment ce dernier parvint à la justifier. Dans les notes dont on dispose, on ne trouve qu'une esquisse de justification se référant à l'hyperbole d'équation[25] $xy = a^2$. C'est le troisième cas que je vais considérer. Après avoir trouvé la sous-normale, $sn._x = \frac{a^4}{x^3}$ et avoir calculé la valeur $\varkappa$, tel que $sn._{\varkappa} = y_{\varkappa}$, c'est-à-dire $\varkappa = a$, Newton établit la nouvelle équation

$$z = \varkappa\frac{Q_x}{x} = \frac{a^3}{x^2} \tag{5.43}$$

et il argumente comme suit.

Supposons que les deux équations précédentes expriment respectivement les courbes VY et WZ par rapport au système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'axe AH et d'origine A (fig. 2), et qu'on pose $\mathsf{AQ} = \varkappa = a$ et $\mathsf{AP} = x$, en considérant les points Q, E et L comme des points fixes, respectivement sur sur l'axe AH, sur la courbe VY, et sur la courbe WZ, et les points P, M et N comme des points courant respectivement sur ce même axe et ces mêmes courbes. Si l'on fait l'hypothèse que l'ordonnée $\mathsf{PN} = z$ de la deuxième de ces courbes, translate tout au long de l'axe AH à partir de Q, de façon à balayer des trapézoïdes égaux en temps égaux, on doit en tirer comme conséquence que "le mouvement" avec lequel elle translate croît selon la même proportion que celle selon laquelle cette même ordonnée diminue[26] :

> [...] supposing the line PN always moves over the same superficies in the same time, it will increase in motion from QL in the same proportion that it decreaseth in lenght [...].

[24]Cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 2, [24], 232.
[25]Cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 2, [20], 228-229.
[26]Cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 2, [20], 228-229.

De là, continue Newton, il s'ensuit que le segment DB "will move uniformely from EC", de sorte que l' "espace" ECBD est égale à l' "espace" NPQL[27].

Si on suppose que le mouvement de translation de l'ordonnée est exprimé par la fonction $x = x(t)$ l'hypothèse de Newton revient, en termes modernes et en général, à poser la condition

$$\int_{x(\tau)}^{x(\theta)} zdx = \int_{x(\tau)}^{x(\theta)} \left(\varkappa\frac{dy}{dx}\right) dx = (\theta - \tau)H \tag{5.44}$$

où H est une constante quelconque et τ et θ deux valeurs quelconques de t. En calculant la seconde intégrale, on a

$$[y]_{x(\tau)}^{x(\theta)} = y_{x(\theta)} - y_{x(\tau)} = \frac{(\theta - \tau)H}{\varkappa} \tag{5.45}$$

et y est donc une fonction linéaire de t, comme le prétend Newton. Or, comme $x(0) = \varkappa$, de là il s'ensuit que

$$y_t = \frac{tH}{\varkappa} + y_{x=\varkappa} \tag{5.46}$$

Si $t = \vartheta$ et $x = \xi$ sont deux valeurs correspondantes de x et t on aura ainsi :

$$y_{x=\xi} = \frac{\vartheta H}{\varkappa} + y_{x=\varkappa} \tag{5.47}$$

et donc

$$\vartheta = \frac{\varkappa}{H}\left[y_{x=\xi} - y_{x=\varkappa}\right] \tag{5.48}$$

La conclusion à laquelle parvient Newton équivaut donc à l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \int_{\varkappa}^{\xi} zdx &= \varkappa\left[y_{x=\xi} - y_{x=\varkappa}\right] \\ &= \varkappa\left[y_{t=\vartheta} - y_{t=0}\right] \quad = \varkappa\left[\begin{array}{c} \frac{H}{\varkappa}\frac{\varkappa}{H}\left[y_{x=\xi} - y_{x=\varkappa}\right] \\ + y_{x=\varkappa} - y_{x=\varkappa} \end{array}\right] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \varkappa\left[y_{x=\xi} - y_{x=\varkappa}\right] \end{aligned} \tag{5.49}$$

qui ne dépend pas de la valeur de H. Les conditions imposées par Newton sont donc telles que, quelle que soit la fonction $y = y(x)$, sa conclusion ne dépend que de la linéarité de la fonction associée $y = y(t)$, qui est assurée par l'égalité (5.45).

Il est pourtant clair que Newton ne pouvait pas raisonner ainsi, et ceci non seulement parce que le raisonnement précédent se réclame du formalisme du calcul intégral, mais surtout parce qu'il suppose que le problème de la quadrature de la courbe WZ a déjà été résolu. Pour comprendre son argument partageons le en deux parties.

Dans la première partie il s'agit de prouver une implication de la forme

$$(A \wedge B) \Rightarrow C \tag{5.50}$$

où il faut poser :

A : les courbes VY et WZ sont liées entre elles par la relation indiquée par l'égalité (5.39), pour $K = \varkappa$;

[27]Cf. Newton (MP), I, **2**, 2, § 2, [20], 229.

B : quels que soient les points Q et P pris sur l'axe AH, le trapézoïde NPQL est balayé par l'ordonnée $\mathsf{PN} = z$ qui varie en translatant de Q à P de telle sorte qu'en temps égaux cette ordonnée balaye des parties égales de ce trapézoïde ;

C : la translation du segment constant qui balaye le rectangle EDBC, qui est entraînée par la translation de z, est uniforme, c'est à dire que l'ordonné y croît proportionnellement au temps.

Dans la deuxième partie, il s'agit de prouver une implication de la forme

$$\{A \wedge [(A \wedge B) \Rightarrow C]\} \Rightarrow D \tag{5.51}$$

où A, B et C sont comme ci-dessus et qu'on pose :

D : le trapézoïde NPQL est égal au rectangle EDBC construit sur la base $\mathsf{BD} = \mathsf{AQ} = \varkappa$.

Comme la prémisse A est supposée, la conjonction de ces deux preuves démontre le théorème que Newton veut prouver et qui est exprimé par l'égalité (5.40), où on aura posé $K = \varkappa$.

Considérons d'abord l'implication (5.50). L'égalité (5.44) exprime directement la prémisse $A \wedge B$ en employant le formalisme habituel du calcul intégral. Cette même prémisse aurait certes pu être formulée par Newton dans un formalisme qui lui était accessible, mais, quel que fût ce formalisme, seulement une solution préalable du problème des quadratures lui aurait alors permis de tirer de là une égalité correspondant à l'égalité (5.45) propre à exprimer dans ce formalisme la conclusion C. Newton ne peut donc pas tirer directement cette conclusion en partant de cette prémisse. Il doit passer par une étape intermédiaire. C'est à cette fin qu'il se réclame de la croissance du "mouvement" de translation. Si on pose :

E : l'ordonnée z "augmente en mouvement [...] dans la même proportion qu'elle diminue en longueur",

alors on peut reconstruire le parcours de Newton comme suit : celui-ci affirme d'abord que B implique E et ensuite que A et E impliquent ensemble C, ce qui conduit évidemment à affirmer l'implication (5.50).

La principale difficulté dans la compréhension de cet argument vient de la nature fort ambiguë de la prémisse E : que signifie au juste que l'ordonnée z "augmente en mouvement [...] dans la même proportion qu'elle diminue en longueur" ? Une manière d'exprimer cette hypothèse selon le formalisme différentiel, de sorte à ce qu'elle s'ensuive effectivement de B, est de l'exprimer par l'égalité

$$z\left(\frac{dx}{dt}\right)dt = H \tag{5.52}$$

où H est une constante quelconque. Cette égalité peut en fait être lue de deux manières. Elle nous dit d'abord que l'aire du rectangle infiniment petit construit sur l'ordonnée z et sur la différentielle de x prise par rapport au temps t, est constante. Cela exprime donc la prémisse B. Mais si on considère la différentielle $\left(\frac{dx}{dt}\right)dt$ comme la vitesse de variation de x, alors cette même égalité nous dit aussi que cette vitesse est inversement proportionnelle à z et elle exprime donc, dans ce même formalisme, la prémisse E. Or, si on opère sur l'égalité

(5.52) selon les règles du formalisme différentiel et qu'on se réclame de la prémisse A, on obtient sur le champ

$$\varkappa\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}dt = \varkappa\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\frac{dx}{dt}dt = \varkappa\frac{dy}{dt}dt = H \tag{5.53}$$

et donc, par intégration

$$\varkappa y = Ht + Cost. \tag{5.54}$$

qui exprime, dans le formalisme du calcul différentiel, la conclusion C.

S'il est clair que Newton n'aurait pas non plus pu prouver l'implication (5.50) de cette manière, il est clair aussi que cette preuve ne relève d'aucune circularité, car elle ne demande aucunement d'avoir déjà résolu le problème de la quadrature de la courbe WZ. Il est d'ailleurs facile de comprendre comment elle peut être transformée en une preuve qui était sans doute à la portée de Newton. Il suffit de partager le segment QP en une infinité de parties infiniment petites ou indivisibles, telles que pp' (fig. 3), correspondantes à l'augmentation de x réalisée dans un instant de temps, et de supposer que les rectangles tels que $\mathsf{p}'\mathsf{rnp}$ construits sur ces parties et sur l'abscisse $z = \mathsf{pn}$ correspondante sont constants. Il est clair que ceci est possible en général seulement si les parties telles que pp' ne sont pas égales entre elles, mais deviennent de plus en plus grandes à mesure que z diminue. Comme tout instant de temps est égal à tout autre instant de temps, la dimension de ces parties, peut bien être prise pour exprimer la vitesse de variation x, ou — comme le dit Newton dans un langage qui relève encore d'une mécanique de dérivation aristotélicienne — le "mouvement"[28] de x, et donc la translation de z. Si on indique ces parties du segment QP par le symbole "ε" la prémisse B peut bien s'exprimer en théorie des proportions par la proportion

$$\varkappa : z = \varepsilon : H \tag{5.55}$$

où H est une constante quelconque. Et cette même proportion peut aussi servir pour exprimer la prémisse E qui est donc équivalente à B. Pour démontrer la prémisse (5.50), il suffit l'argument que van Heuraet avait employé à l'occasion de la preuve de son théorème comme on l'a indiqué dans la section 3.5.3. Comme, conformément à la prémisse A,

$$\varkappa : \mathsf{pn} = \mathsf{pm} : \mathsf{ps} \tag{5.56}$$

on aura, pour la similitude des triangles psm, pmF et JmI,

$$\varkappa : \mathsf{pn}\,[= \mathsf{pF} : \mathsf{pm}] = \mathsf{IJ} : \mathsf{Jm} \tag{5.57}$$

De là en comparant cette proportion avec la proportion (5.55), où on aura posé $z = \mathsf{pn}$ et $\varepsilon = \mathsf{pp}' = \mathsf{JI}$, il s'ensuit

$$\mathsf{Jm} = \mathsf{VU} = H \tag{5.58}$$

qui exprime justement la conclusion C.

La preuve de l'implication (5.51) est à ce point immédiate. De l'implication (5.50) il s'ensuit que le rapport du trapézoïde NPQL à n'importe lequel des rectangles tels que rnpp'

[28] Je reviendrait sur cette conception du mouvement plus en détail à partir du chapitre 7 ; cf. en particulier la section 7.1.

est le même que le rapport du rectangle DBCE à n'importe lequel des rectangles VSRU. Mais de la proportion (5.57) qui dérive de la prémisse A, il s'ensuit que

$$R(\mathsf{pn}, \mathsf{Jl}) = \mathsf{rnpp}' = R(\varkappa, \mathsf{Jm}) = \mathsf{VSRU} \tag{5.59}$$

donc

$$\mathsf{NPQL} = \mathsf{DBCE} \tag{5.60}$$

ce qu'il fallait démontrer.

En réfléchissant sur cette preuve, on comprend d'emblée que $\varkappa$ n'entre en elle que comme une valeur constante quelconque et que rien n'exige que cette valeur soit en même temps celle de l'abscisse d'une limite du trapézoïde qu'il s'agit de carrer et celle de la constante qui intervient dans la définition de l'ordonnée z et fournit donc la base du rectangle auquel ce trapézoïde est déclaré être égal. Elle peut donc être remplacée, dans chacun de ces rôles, par deux valeurs constantes quelconques κ et K. En revanche, le passage des égalités (5.59) à l'égalité (5.60) n'est correct en général qu'à condition que la portion considérée de la courbe VY soit monotone. Sous cette condition, la preuve précédente est directement une preuve des égalités plus générales (5.40) et (5.41), sur lesquelles sont fondées les résultats énoncés dans les notes de Newton.

* * *

Une fois qu'il est interprété comme je viens de le proposer, l'argument de Newton se révèle être assez proche de celui de van Heuraet. La différence principale ne tient pas à la substitution de la la sous-normale à normale dans la proportion qui définit l'ordonnée z de la courbe WZ. La possibilité de cette substitution est banale et quiconque aurait pu imaginer l'exploiter[29]. La nouveauté principale dans l'approche de Newton consiste dans l'introduction du mouvement. Au lieu de démontrer d'emblée que, quel que soit la différence pp', le rectangle rnpp' est égal au rectangle VSRU et de conclure de là que le trapézoïde NPQL est égal au rectangle DBCE, Newton se réclame du mouvement de génération du trapézoïde NPQL pour démontrer la proportion

$$\mathsf{NPQL} : \mathsf{rnpp}' = \mathsf{DBCE} : \mathsf{VSRU} \tag{5.61}$$

La présence d'indivisibles ou infiniment petits ne sert donc, dans l'argument de Newton, qu'à rendre possible l'expression de la prémisse B sous une forme propre à rendre possible l'application de l'argument de van Heuraet, c'est-à-dire à confondre le rectangle rnpp' avec une portion du trapézoïde NPQL. Newton exploitera plus tard de manière bien plus massive le mouvement de génération des figures géométriques. Pour l'instant ce mouvement n'intervient que marginalement dans son parcours pour lui permettre de reformuler une preuve

[29] Cette possibilité est par exemple exploitée par Barrow, dans la XI$^{\text{ème}}$ leçon de ses *Geometrical Lectures* [cf. Barrow (1670), lect. XI, prop. XIX, 90-91], pour montrer justement que l' "espace" QLNP est égal au rectangle construit sur la constante K qui entre dans le définition de z et sur le segment DE. S'il est possible que Barrow ait présenté une telle adaptation de l'argument de van Heuraet au cours de ses leçons à l'université de Cambridge, à partir de 1664 [cf. la note (87), ci-dessous], on n'a pas d'évidences pour penser que Newton s'inspira des leçons de Barrow, plutôt que de la lettre de van Heuraet. En revanche, l'usage de le règle de Hudde, comme outil pour trouver les sous-normales des courbes données, rappelle l'usage de la même règle, de la part de van Heuraet, pour trouver la normale de la première courbe que ce dernier considère dans sa lettre, et suggère que Newton ait étudié cette lettre.

qu'il aurait pu obtenir différemment en s'appuyant complètement sur les suggestions de van Heuraet.

Cette différence entre l'argument de Newton et celui de van Heuraet ne touche pas en fait à l'essentiel : de même que celui de van Heuraet, l'argument de Newton est totalement indépendant de toute méthode ou algorithme qu'on pourrait employer pour résoudre les problèmes des normales et des quadratures. Il montre ainsi, tout simplement, le caractère inverse de ces problèmes, pris dans leur nature essentiellement géométrique. Pris en tant que tel, il dépend seulement du fait que les courbes considérées — et donc le trapézoïde qu'on se propose de carrer — sont référés à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales. Comme on l'a vu dans la section 3.5.3, la condition d'orthogonalité de ce système de coordonnées est d'ailleurs inessentiel. Pour se libérer de cette condition, il suffit de substituer le rapport de l'ordonnée à la sous-normale avec celui de la sous-tangente à l'ordonnée. Le même argument montre alors le caractère inverse des problèmes des tangentes et des quadratures, à une constante près. Newton ne fait pourtant pas cette remarque et se limite au cas de coordonnées cartésiennes orthogonales.

Le fait que l'argument employé par Newton et le théorème que celui-ci démontre ne tiennent qu'à la nature géométrique des problèmes des normales (et des tangentes) et des quadratures n'empêche évidemment pas que ce théorème puisse être appliqué pour justifier l'usage d'une certaine méthode propre à résoudre un de ces problèmes pour une certaine classe de courbes, pour obtenir une solution de l'autre problème, par rapport à une classe de courbes correspondante. Cette possibilité d'application est en revanche la raison essentielle de l'intérêt du théorème[30].

Supposons qu'une équation $F(x, y) = 0$ soit donnée, qu'elle soit référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par rapport auquel elle exprime une certaine courbe. Si on veut exploiter le théorème précédent, c'est-à-dire l'égalité (5.40) ou l'égalité (5.41), pour carrer cette courbe, on doit chercher à en exprimer l'ordonnée y par un produit tel que $K\frac{sn.[z]x}{z}$, où z est l'ordonnée d'une autre courbe (localement monotone) référée au même système de coordonnées et $sn.[z]_x$ est sa sous-normale. En revanche, si on veut exploiter le théorème précédent pour trouver la sous-normale de cette courbe, on doit chercher une courbe, référée au même système de coordonnées, dont l'ordonnée z est exprimée par un produit tel que $K\frac{f(x)}{y}$ ($f(x)$ étant une expression en x qui sera ensuite reconnue comme l'expression de la sous-normale cherchée) et qui est telle à délimiter un trapézoïde dont l'aire, prise entre les limites $x = \kappa$ et $x = \xi$, est à son tour exprimée par un produit tel quel $K\,|y_\xi - y_\kappa|$. La difficulté de ces deux démarches est évidente. Ce n'est de cette manière que le théorème précédent pouvait aider Newton à carrer une courbe ou à en trouver la sous-normale.

Rien n'empêche pourtant de raisonner à rebours : partir de la solution connue d'un de ces deux problèmes pour une certaine classe de courbes, et chercher à caractériser une autre classe de courbes pour lesquelles le problème inverse se trouve d'emblée résolu par la disponibilité de cette solution.

[30] Parmi les notes de Newton, on en trouve néanmoins certaines où ce dernier se réclame du lien géométrique entre les problèmes des normales et des quadratures pour résoudre des problèmes de statique sans aucune référence à des algorithmes Algébriques. Cf. par exemple Newton (MP), I, **2**, 3, § 3, 238-241 (où Newton inverse le rôle des coordonnées et considère la sous-normale prise sur l'axe des ordonnées).

Imaginons savoir que

$$s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right]=\mathcal{A}(\xi) \tag{5.62}$$

où $\mathcal{A}(\xi)$ est une certaine expression connue en ξ, et z est une racine d'une équation $F(x,z) = 0$ d'une forme déterminée, que, pour simplifier, on suppose croissante et positive. On aura alors, grâce à l'égalité (5.41)

$$y_{\xi}=\frac{\mathcal{A}(\xi)}{K}+y_{\kappa} \tag{5.63}$$

où K est une constante positive. Toute courbe exprimée par une équation de la forme

$$y=\frac{\mathcal{A}(x)}{K}+y_{\kappa} \tag{5.64}$$

aura ainsi une sous-normale $sn._{x}$ donnée par l'égalité :

$$sn._{x}=\frac{1}{K}zy \tag{5.65}$$

Voici un exemple fort simple. Supposons donnée l'équation

$$z=\sum_{i=0}^{n}B_{i}x^{i} \tag{5.66}$$

à partir de laquelle on sait obtenir, de quelque manière que ce soit, l'égalité

$$s\left[\sum\nolimits_{0}^{\xi}[z]\right]=\mathcal{A}(\xi)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}B_{i}\xi^{i+1} \tag{5.67}$$

L'équation (5.64) prendra alors la forme

$$y=\frac{1}{K}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}B_{i}x^{i+1}+y_{0} \tag{5.68}$$

Et il suffit alors de poser

$$A_{i}=\frac{1}{(i+1)K}B_{i} \tag{5.69}$$

pour conclure que toute courbe exprimée par une équation de la forme

$$y=A+\sum_{i=0}^{n}A_{i}x^{i+1} \tag{5.70}$$

a une sous-normale donné par l'égalité

$$\begin{aligned} sn._{x} &= \frac{1}{K}\left(\sum_{i=0}^{n}K(i+1)A_{i}x^{i}\right)\left(A+\sum_{i=0}^{n}A_{i}x^{i+1}\right) \\ &= y\left(\sum_{i=0}^{n}(i+1)A_{i}x^{i}\right) \end{aligned} \tag{5.71}$$

comme on sait être le cas.

Bien que mathématiquement possible, cette démarche n'a pas d'intérêt historique, car elle conduit à résoudre un problème que Newton apprendra bientôt à résoudre en général (comme on le verra dès la section 5.2), en se ré clamant de la solution préalable d'un problème que Newton est parvenu à résoudre plus tard, et seulement dans certains cas particuliers.

La démarche inverse — que Newton esquisse lors de son traitement des courbes d'équations $x^3y = a^4$ et $x^4y = a^5$ — a en revanche un intérêt historique majeur, car, comme on le verra dès le prochain chapitre 6, c'est justement en suivant cette démarche que Newton parvint à certains de ses résultats les plus importants en matière de quadratures. Imaginons connaître la racine

$$y = \mathcal{A}(x) \tag{5.72}$$

d'une équation $F(x, y) = 0$ qui est censée exprimer une courbe par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales. Supposons aussi qu'on sait déterminer la sous-normale $sn._x$ de cette courbe et qu'on a

$$sn._x = \mathcal{N}(x) \tag{5.73}$$

où $\mathcal{N}(x)$ est une certaine expression connue en x. On pourra alors construire l'équation

$$z = K\frac{\mathcal{N}(x)}{y} = K\frac{\mathcal{N}(x)}{\mathcal{A}(x)} \tag{5.74}$$

qu'on pourra interpréter comme l'expression d'une courbe référée au même système de coordonnées auquel est référée la courbe d'équation $F(x, y) = 0$, et en tirer sur le champ l'égalité

$$s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}\left[K\frac{\mathcal{N}(x)}{\mathcal{A}(x)}\right]\right] = K\left|\mathcal{A}(\xi) - \mathcal{A}(\kappa)\right| \tag{5.75}$$

pourvu que la courbe d'équation $y = \mathcal{A}(x)$ soit monotone entre κ et ξ.

La possibilité d'employer cette démarche pour parvenir à carrer certaines courbes me paraît être la découverte essentielle que les notes de Newton contiennent et, en tout cas, celle dont les conséquences seront les plus importantes. Or, l'applicabilité de cette démarche dépend structurellement de la possibilité d'exprimer explicitement y en termes de x. C'est la raison fondamentale qui conduira Newton à privilégier, dans l'expression des courbes à carrer, les équations de la forme $y = f(x)$.

Il faut pourtant observer que, en tant que telle, cette découverte ne porte guère sur la possibilité d'exprimer une courbe d'une manière convenable. Une fois qu'on a assumé qu'une courbe est référée à des coordonnées cartésiennes (qui pour simplifier sont supposées orthogonales), l'argument de Newton est indépendant de tout formalisme Algébrique et donc de la manière de laquelle cette courbe est exprimée. C'est seulement grâce à ce dépassement de l'Algèbre que Newton — en se servant à l'occasion, bien qu'implicitement, de considérations infinitésimalistes non seulement pour simplifier des procédures algorithmiques — parvient à saisir la connexion intrinsèque entre le problème des normales ou des tangentes et le problème des quadratures. Cette connexion ayant été saisie, la réciprocité des algorithmes aptes à résoudre ces problèmes dans des cas particuliers ne pourra ensuite être comprise que comme l'expression nécessaire d'un lien géométrique plus profond et original. Loin d'apparaître *a posteriori* comme une remarque à propos d'algorithmes découverts indépendamment, elle sera ainsi une condition posée *a priori*, dont la détermination de ces algorithmes va dépendre de manière essentielle.

Mais le dépassement du plan de l'Algèbre permet aussi à Newton de saisir le rôle du rapport entre l'ordonnée et la sous-normale ou, de façon plus générale, entre la sous-tangente et l'ordonnée, ce qui n'est rien que le rapport $\frac{\sigma}{v}$ de Florimond. Comme van Heuraet, Newton semble voir de surcroît la possibilité de transposer ce rapport à des triangles infinitésimaux. C'est justement cette transposition d'un tel rapport du fini à l'infiniment petit qui rend sa preuve possible. Pourtant, dans son argument il n'y a aucune trace d'une identification de ce rapport avec le rapport entre les incréments infiniment petits des coordonnées de la courbe considérée. Cette identification n'interviendra explicitement dans les arguments de Newton que quelques mois plus tard[31]. L'insistance de ce dernier à considérer, l'un après l'autre, plusieurs exemples essentiellement similaires — dans lesquels il passe constamment de la détermination de $v = x + sn._x$ à la détermination du quatrième proportionnel entre l'ordonnée, la sous-normale, et une constante quelconque — témoigne de la recherche d'un invariant algorithmique, directement pensé comme l'expression Algébrique du rapport entre la sous-normale et l'ordonnée.Néanmoins, Newton ne semble pas encore voir comment les liens entre ces deux invariants peuvent être établi *a priori*, c'est-à-dire qu'il ne semble pas voir dans le rapport entre la sous-tangente et l'ordonnée un invariant fondamental dont la détermination conduit d'emblée à la solution de plusieurs problèmes géométriques.

5.2 Septembre 1664 : l'algorithme pour la sous-normale d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales et exprimée par une équation Algébrique quelconque

Bien que les deux méthodes pour la détermination de la sous-normale mises au point par Newton dans les notes qu'on a considéré dans les deux sections précédentes permettent de résoudre très aisément le problème des normales (et donc des tangentes) pour de larges classes de courbes, elles ne sont pas encore des méthodes générales. Il n'est pas difficile d'imaginer une courbe, même assez simple, dont la normale et la tangente ne peuvent pas être trouvées aisément par ces méthodes. C'est par exemple le cas de la cubique exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par l'équation

$$x^3 + y^3 - axy = 0 \tag{5.76}$$

qui avait déjà fait l'objet de l'attention de van Schooten[32]. Celle-ci est justement l'une des courbes dont Newton se propose de déterminer l'axe, dans une courte note, probablement postérieure de quelques jours à celles qu'on vient de considérer, que Whiteside a datée du septembre 1664[33].

[31]Cf. la section 5.5.
[32]Cf. Newton (MP), I, **2**, 3, § 1, note (1), 234, où Whiteside réfère à Van Schooten (1657).
[33]Cf. Newton (MP), I, **2**, 3, § 1, 234-236.

Newton définit l'axe d'une courbe comme une corde qui coupe cette courbe en deux points en lui étant perpendiculaire dans les deux ; en particulier, il est la plus grande et/ou le la plus petite de ces cordes. Pour trouver l'axe d'une courbe, il faut donc passer par la détermination de ses normales. Parmi les trois exemples considérés par Newton, deux relèvent d'un cercle, dont les normales se calculent aisément par la deuxième des égalités (5.22). L'autre concerne la cubique d'équation (5.76). Pour déterminer la sous-normale de cette courbe par la méthode des *maxima* et *minima* de Fermat, en suivant la suggestion de van Schooten, il faut d'abord résoudre une équation de troisième degré. Pour la déterminer par la méthode de Descartes, il faut passer en revanche par une équation de sixième degré, car on ne peut se servir d'aucune des égalités (5.22). Naturellement, rien n'aurait empêché Newton de passer par ces longs détours pour parvenir à ce résultat, mais il est probable que, s'il l'avait fait, ces notes en contiendraient des traces. Au contraire, tout de suite après avoir écrit l'équation (5.76), il écrit, sans aucune justification explicite, l'égalité[34]

$$sn._x = \frac{3x^2y - ay^2}{ax - 3y^2} \tag{5.77}$$

Il s'agit donc de comprendre comment il obtint cette égalité.

On trouve une réponse dans une autre note, sans doute rédigée à peu-près dans les mêmes jours, et consacrée aussi à la recherche des axes de certaines courbes[35]. Pour parvenir à trouver ces axes, Newton cherche d'abord les normales à ces courbes, et il énonce pour cela une règle générale propre à fournir l'expression de la sous-normale d'une courbe exprimée par une équation Algébrique référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales. Voici ce qu'il écrit[36] :

> If $\mathsf{AP} = x$ (fig. 4). $\mathsf{PM} = y$. & y being perpendicular to x describes the crooked line with one of its extreames. Then reduce the equation (expressing the nature of the line) to one side soe that it be $= 0$. Then find the perpendicular MG which is done by finding $\mathsf{PG} = v$. for $vv + yy = \mathsf{MG}^2$.
>
> (In finding $\mathsf{PG} = v$[37] observe this rule. Multiply each terme of the equation by so many units as x hath dimensions in the terme, divide it by x & multiply it by y for a Numerator. Againe multiply each terme of the equation by soe many units as y hath dimensions in each terme & divide it by $-y$ for a denominator : in the valor of v.

La règle est claire. Si on suppose que la courbe en question est exprimée par une équation Algébrique quelconque

$$\sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j} x^{i-j} y^j \right] = 0 \tag{5.78}$$

[34]En modifiant la notation de Descartes, et en revenant à la notation qu'il avait employée lors de sa première tentative de trouver la normale d'une hyperbole [cf. la note (7), ci-dessus], Newton indique la sous-normale $sn._x$ par la lettre "v". C'est une notation qu'il maintiendra par la suite.

[35]Cf. Newton (MP), I, **2**, 3, § 2, 236-238. Whiteside date aussi cette note de septembre 1664.

[36]Cf. Newton (MP), I, **2**, 3, § 2, 236.

[37]Cf. la note (34), ci-dessus.

et que l'on applique cette règle, on obtient sur le champ l'égalité :

$$sn._x = -y\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(i-j)A_{i-j,j}x^{i-j-1}y^j}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}jA_{i-j,j}x^{i-j}y^{j-1}} \tag{5.79}$$

dont l'égalité (5.77) n'est qu'un cas particulier.

Il s'agit donc de comprendre comment Newton aurait pu parvenir à justifier cette règle, qu'il ne fait qu'énoncer. Parmi les outils dont il aurait pu disposer, il y en a au moins deux qui auraient pu le conduire, plus ou moins aisément, à ce résultat.

Il aurait d'abord pu se réclamer de la méthode des tangentes de Florimond, en observant que si le système de coordonnées auquel la courbe est référé est orthogonal (comme il le suppose), alors

$$sn._x = y\frac{\sigma}{\upsilon} \tag{5.80}$$

et en ayant recours à l'égalité (3.56). On pourrait penser que la difficulté essentielle de cette démarche consiste dans l'établissement de l'égalité (3.56). Néanmoins, ce n'est pas mon opinion. Certes, Newton ne disposait pas d'une notation convenable pour pouvoir démontrer cette égalité en toute généralité, mais, s'il avait partagé les prémisses de Florimond, il aurait pu parvenir à dévoiler, en raisonnant sur des équations particulières, un invariant algorithmique associé au rapport $\frac{\sigma}{\upsilon}$. Le point est plutôt, comme on l'a observé ci-dessus, que Newton ne donne aucun signe, dans les autres notes de la même période, de partager les prémisses de Florimond, et surtout d'avoir compris la possibilité de réduire les problèmes des normales et des tangentes au problème de la détermination du rapport $\frac{\sigma}{\upsilon}$.

En deuxième lieu, il aurait pu se servir de la méthode des *maxima* et *minima* de Fermat. Comme on le verra ci-dessous[38], Newton rédigera des preuves acceptables de sa règle huit mois plus tard, en se servant de cette méthode. Pour le faire, il emploiera pourtant une notation particulièrement heureuse, dont on ne retrouve aucune trace dans des notes précédentes. Il concentrera de surcroît son attention sur le rapport entre les incréments infiniment petits des coordonnées de la courbe considérée, ce que, à la fin de l'été de 1664, il ne semble pas encore habitué à faire.

Il est donc plus probable qu'il ait dérivé sa règle en généralisant les résultats obtenus au cours du traitement des 27 courbes dont relèvent les notes discutées dans la section 5.1.2[39]. Certes, cette généralisation ne pouvait pas concerner la méthode par laquelle ces résultats sont obtenus — qui ne s'applique, comme on l'a vu, qu'à des courbes exprimées par des équations fort particulières — mais aurait pu néanmoins dériver de l'observation d'un invariant propre à la forme de l'expression qui exprime ces résultats. Cette hypothèse est confirmée par deux références successives que Newton fait à sa règle, où il couple cette dernière à la méthode des normales et des tangentes de Descartes[40].

S'il en est ainsi, on doit en conclure que les recherches successives que Newton consacre au problème des tangentes et des normales ne visent qu'à comprendre la raison qui justifie cette règle, à évaluer la possibilité de l'exprimer d'une manière plus convenable — propre

[38]Cf. la section 5.5.1.
[39]C'est aussi l'opinion de Whiteside [cf. Newton (MP), I, **2**, 3, § 2, note (2), 236-237].
[40]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [1], 250 (avec note (7)) et [2], 252 (avec note (16))].

à conduire, au moins dans certains cas, à une expression de la sous-normale ou de la sous-tangente d'une courbe donnée en termes d'une seule de ses coordonnées —, et enfin à explorer les possibilités d'une application de cette règle à la solution d'autres problèmes, connectés de quelque manière avec ceux des normales et des tangentes, mais distincts de ceux-ci.

5.3 Entre la fin de 1664 et le mois de février 1665 : de la normale à la "quantité de courbure"

La première et la plus importante de ces applications concerne le problème de la courbure ("*crookednesse*"). C'est l'objet d'un assez large ensemble des notes qui s'étalent dès la fin de 1664 au printemps 1665[41].

Dans la première moitié du XVII^ème^ siècle, la notion de courbure, et en particulier celle de quantité ponctuelle de courbure (qui constitue le véritable objet des recherches de Newton), n'étaient pas des notions courantes, bien que la notion liée de centre de courbure (d'une conique) avait été implicitement introduite par Apollonius dans les propositions V.51-52 des *Coniques*.

Dans ces propositions, Apollonius avait montré ceci : si AL (fig. 5) est une conique quelconque, AH son axe, ou, si cette conique est une ellipse, son axe majeur, et BD est n'importe quelle demi-droite perpendiculaire à AH — telle que la distance AB du pied de cette perpendiculaire au sommet de la conique est plus grande que la moitié du côté droit de cette même conique, et, dans le cas où cette conique est une ellipse, plus petite du demi-axe majeur —, alors il y a un et un seul point C de BD, tel que de ce point on peut tirer vers la conique AL une et une seule droite CM, telle que le segment GM découpé sur cette droite par l'axe et la section conique, soit un *minimum* ; pour tout autre point de BD, soit on peut tirer vers AL deux droites comme celle-ci, soit on n'en peut tirer aucune, selon si ce point est pris sur le segment CB ou sur la demi-droite CD[42]. Il est facile de montrer que les droites telles que CM, sur lesquelles la conique et son axe découpent des segments minimaux, sont des normales à cette conique[43].

Il s'ensuit que le point C sépare les points de BD où passent deux normales à la conique de ceux où n'en passe aucune. Comme ce point est unique sur BD et qu'il est tel qu'une seule des demi-droites qui en sont issues et coupent la conique au-delà de son sommet est normale à cette dernière, le théorème d'Apollonius associe à chaque point B pris sur l'axe AH d'une conique, un et un seul point M de cette conique. Ce point est, pour ainsi dire, le point où la dernière des normales à la conique qu'on peut tirer de la demi-droite BD et qui coupent cette conique après avoir coupé son axe, coupe cette même conique. Considérons deux points N et N' où les normales EN et EN' qui passent par un point E de BD autre que C coupent la conique. Ces normales EN et EN' coupent donc la normale CM respectivement en deux points V et V' qui s'approchent du point C d'autant plus que le point E s'approche lui aussi de ce même point. Le point C est donc le point de la normale à la conique tirée du point M dont les points d'intersection de cette normale avec les normales à la conique

[41] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 1-2, 245-271.
[42] Sur ce résultat d'Apollonius cf. Heath (1921), II, 164-166 and Knorr (1986), 315-318.
[43] Cf. la note 47 au chapitre 3, ci-dessus.

en des points autres que M s'approchent de plus en plus, au fur et à mesure que ces points s'approchent de M. Cette considération suggère de renverser l'argument d'Apollonius et de chercher à déterminer le point C non pas comme un point de la demi-droite DB considérée comme une demi-droite fixée, mais comme un point de la normale à la conique en un point M fixé.

Ce point pourrait alors être justement pensé comme le point de cette normale dont les points d'intersection de celle-ci avec les normales à la conique dans des points autres que M s'approchent de plus en plus, au fur et à mesure que ces points s'approchent de M.

Le théorème d'Apollonius suggère alors[44] d'associer à chaque point d'une conique, un point, pris sur la normale à cette conique en ce point, qui jouit de la propriété qu'on vient d'énoncer. Il suffit alors d'appeler ce point "centre de courbure" pour en tirer une définition implicite du centre de courbure d'une conique dans un quelconque de ses points. La généralisation de cette définition implicite est facile : le centre de courbure d'une courbe quelconque en l'un quelconque de ces points, disons M, est le point C pris sur la normale à cette courbe en M, dont les points d'intersection de celle-ci avec les normales à cette courbe en des points autres que M s'approchent de plus en plus, au fur et à mesure que ces points s'approchent de M. Il s'ensuit que ce point est le seul point de la normale à la courbe en question au point M, par lequel ne passe qu'une normale à cette courbe qui coupe celle-ci au voisinage de M.

On a donc deux définitions équivalentes du centre de courbure d'une courbe en un point quelconque de celle-ci, dont aucune ne dépend de la prise en compte d'une notion de quelque manière analogue à celle de différentielle seconde. Naturellement, le théorème d'Apollonius n'assure pas, en tant que tel, qu'un point comme celui-ci existe pour tout point de n'importe quelle conique ; *a fortiori*, il n'assure pas que ceci est le cas pour tout point pris sur n'importe quelle courbe ; en suggérant deux manières de le définir, il incite néanmoins à le chercher.

Si on suppose qu'à tout point de toute courbe il correspond un point qui satisfait à ces définitions et qu'on le reconnaît ainsi comme le centre de courbure de cette courbe en ce point, on peut ensuite passer de cette définition à celle de quantité ponctuelle de courbure. On commence par définir la quantité de courbure d'un arc de courbe comme étant l'angle formé par les deux normales tirées des extrémités de cet arc. Ceci étant fait, il est naturel de définir la quantité de courbure d'un point d'une courbe comme la quantité de courbure d'un certain arc (choisi comme paramètre) pris sur le cercle dont le rayon est le rayon de courbure de cette courbe en ce point[45]. Le problème de la quantité ponctuelle de courbure

[44]Cf. Apollonius (CT), Introduction, vol. I, xlix, note 3 and liii.

[45]Parmi les notes que Newton consacre au problème de la quantité de courbure qu'on va considérer ci-dessous, une qui porte, de la main du même Newton, la date du décembre 1664 [cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [1], 248-251], se termine par un théorème que ce dernier a probablement ajouté plus tard [cf. *ibid.*, note (15), 251]. En partant de la prémisse que la "courbure de tout cercle entier s'élève à 4 angles droits", il en conclut que les courbures de deux arcs de cercles égaux (en longueur), pris sur deux cercles distincts, sont entre elles dans le rapport inverse des rayons de ces cercles. En effet, si sur un cercle de rayon r, on prend un arc s égal à la circonférence d'un autre cercle de rayon r' , on a

$$s = 2\pi r'$$

et donc

$$r' : r = s : 2\pi r = courb._r(s) : courb._r(2\pi r)$$

où le symbole "$courb._x(z)$" indique la courbure de l'arc z pris sur le cercle de rayon x. De là, comme

$$courb._r(2\pi r) = courb._{r'}(2\pi r')$$

d'une certaine courbe se réduit alors au problème du centre de courbure de cette courbe dans chacun de ses points.

Le parcours qu'on vient d'esquisser n'est certainement pas un parcours aisé. Il conduit néanmoins du théorème d'Apollonius jusqu'à une définition générale de la quantité ponctuelle de courbure, sans passer par la prise en compte d'aucune notion analogue à celle de différentielle seconde, et donc, *a fortiori*, sans passer par le formalisme du *calcul*, quelle que soit la version dans laquelle ce formalisme se présente. On comprend ainsi comment le problème de la détermination de la quantité ponctuelle de courbure d'une courbe quelconque peut avoir surgi, en dehors du contexte du *calcul*, comme un problème proprement géométrique. Et c'est justement en termes proprement géométriques, en se servant de la métaphore d'un fil tendu, que Huygens définira dans l'*Horologium oscillatorium* la développante d'une courbe donnée — cette dernière étant qualifiée de "développée" de la première —, en montrant que la tangente à cette développée dans chacun de ses points est normale à la développante[46].

Le traité de Huygens n'apparut pourtant qu'en 1673. Quand Newton aborda la question, entre la fin de 1664 et le printemps 1665, il ne pouvait donc pas se prévaloir des lumières de Huygens. Quelques semaines plus tôt, lorsqu'il était à la recherche de la normale d'une hyperbole, il avait implicitement confondu[47] un arc très petit d'une telle courbe avec un arc de cercle appartenant à un cercle qui, par hypothèse, était censé lui être tangent. Néanmoins, ce cercle n'était qu'un parmi l'infinité de cercles tangents à la courbe en question, et la

---

il s'ensuit que

$$courb._r(s) : courb._{r'}(2\pi r') = r' : r$$

Il suffit alors (même si Newton ne croit pas nécessaire de le spécifier) de prendre sur un autre cercle de rayon $\tilde{r}$ un nouveau arc $\tilde{s}$ égal à s et donc à $2\pi r'$ et de répéter le même argument relativement à cet arc, pour obtenir

$$courb._{\tilde{r}}(\tilde{s}) : courb._{r'}(2\pi r') = r' : \tilde{r}$$

et donc, par comparaison,

$$courb._r(s) : courb._{\tilde{r}}(\tilde{s}) = \tilde{r} : r$$

ce qui démontre le théorème de Newton en général.

Comme la courbure d'un arc de cercle dont la longueur est donnée est différente selon le cercle sur lequel cet arc est pris, pour calculer la quantité ponctuelle de courbure d'une courbe donnée en un certain point, il suffit de fixer un paramètre ϖ, de déterminer le cercle dont le rayon de courbure de cette courbe en ce point est le rayon, et de calculer la quantité de courbure d'un arc égal à ϖ pris sur ce cercle. Si R est ce rayon de courbure alors la quantité de courbure de la courbe au point en question, disons ρ, sera égale à la quantité de courbure d'un arc égal à ϖ, pris sur un cercle de rayon R. Or, le théorème précédent nous dit que si r est le rayon d'un cercle de circonférence égale à ϖ, alors

$$courb._R(\varpi) : courb._r(2\pi r) = r : R$$

Comme on a supposé que

$$courb._r(2\pi r) = 2\pi$$

de là il s'ensuit que

$$courb.(\varpi) = \rho = \frac{2\pi r}{R} = \frac{\varpi}{R}$$

Il suffit alors de poser, par convention, $\varpi = 1$, pour en conclure que

$$\rho = \frac{1}{R}$$

conformément à la définition aujourd'hui habituelle.

[46]Cf. Huygens (1673), partie III, 59-90, en particulier pp. 59-62.

[47]Cf. la section 5.1.1.

méthode appliquée par Newton prescrivait de le déterminer, parmi ceux-ci, conformément à un critère parfaitement extrinsèque par rapport à la nature de la courbe, ce cercle n'étant que le cercle tangent à la courbe donnée dont le centre se trouvait sur la droite choisie comme axe du système de coordonnées à laquelle cette courbe avait été référée. En l'espace de quelques semaines, Newton comprit probablement ceci : en confondant un arc très petit d'une courbe donnée avec un arc de cercle tangent à cette courbe, dont le centre se trouve sur l'axe du système de coordonnées à laquelle cette dernière est référée on peut parvenir à déterminer la normale à cette courbe ; pourtant, ceci ne signifie guère que cette courbe a avec ce cercle une relation privilégiée qu'elle n'a pas avec l'infinité des autres cercles tangents ; parmi cette infinité de cercles tangents, il y en a néanmoins un qui, pour ainsi dire, se confonde avec cette courbe, mieux que n'importe quel autre, car il en partage non seulement la tangente, mais aussi la courbure ; ce cercle est justement celui dont le centre est le point auquel les points d'intersection entre la normale à la courbe au point considéré et les normales à cette même courbe en d'autres points s'approchent de plus en plus, au fur et à mesure que ces points s'approchent de M.

C'est justement ce point, qui ne dépend évidemment que de la nature de la courbe donnée, que Newton cherche alors à déterminer. Les considérations précédentes suggèrent une manière fort naturelle d'y parvenir. Il suffit de considérer deux points de la courbe en question, de déterminer les normales à cette courbe à ces deux points, d'en trouver l'intersection, et d'étudier comment celle-ci varie lorsque les deux points en question s'approchent l'un de l'autre, ou même de chercher la position de cette intersection, lorsque les deux points en question sont considérés comme infiniment proches l'un de l'autre. Celle-ci est justement la démarche que, plus ou moins explicitement, Newton semble suivre dans ses recherches.

5.3.1 Les premières notes de la fin de l'automne 1664

Quelques courts calculs, que Whiteside a datés de la fin de l'automne 1664, témoignent d'une première approche de la question[48]. Bien qu'ils relèvent d'arguments quelque peu différents, ces calculs partagent une structure commune qu'on pourrait reconstruire comme suit.

Soient $\mathsf{AMM'}$ (fig. 6) une courbe quelconque référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'axe AH et d'origine A, M et $\mathsf{M'}$ deux points quelconques pris sur cette courbe, respectivement d'abscisse $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{AP'} = x + o$, et C le point d'intersection des normales tirées de ces points, respectivement MC et $\mathsf{M'C}$. En supposant que o est un incrément très petit, et que C est donc le centre de courbure de $\mathsf{AMM'}$ au point M, il s'agit de déterminer les coordonnées AB et BC du point C, en termes des coordonnées $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{PM} = y$ du point M.

Des considérations géométriques élémentaires permettent d'abord de tirer les proportions

$$\begin{array}{l} \mathsf{PM} : \mathsf{PG} = \mathsf{DM} : \mathsf{DC} \\ \mathsf{P'M'} : \mathsf{P'G'} = \mathsf{BC} : \mathsf{BG'} \\ \mathsf{PM} : \mathsf{PG} = \mathsf{BC} : \mathsf{BG} \end{array} \tag{5.81}$$

[48]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 1, 245-248.

Il suffit de poser $\mathsf{AB} = x_C$ et $\mathsf{BC} = y_C$ pour réécrire ces proportions sous la forme

$$\begin{array}{l} y : sn._x = (y - y_C) : (x_C - x) \\ y_{x+o} : sn._{x+o} = y_C : (x + o + sn._{x+o} - x_C) \\ y : sn._x = y_C : x + sn._x - x_C \end{array} \tag{5.82}$$

d'où on tire respectivement les égalités :

$$\begin{array}{l} y\,(x_C - x) = (y - y_C)\, sn._x \\ y_{x+o}\,(x - x_C) = (y_C - y_{x+o})\, sn._{x+o} - oy_{x+o} \\ y\,(x - x_C) = (y_C - y)\, sn._x \end{array} \tag{5.83}$$

Il s'agit alors de combiner de manière convenable ces égalités, de façon à obtenir d'autres égalités qui, interprétées à rebours, se transforment en des équations du premier degré en les inconnues y_C ou x_C. En élimant par exemple la différence $x_C - x$ entre la première et la deuxième de ces égalités, ou y_C entre la deuxième et la troisième, on obtient respectivement

$$\begin{array}{l} y_C \left(\dfrac{sn._{x+o}}{y_{x+o}} - \dfrac{sn._x}{y} \right) = sn._{x+o} - sn._x + o \\ x_C \left(\dfrac{sn._x}{y} - \dfrac{sn._{x+o}}{y_{x+o}} \right) = \dfrac{sn._x}{y}\,(x + o + sn._{x+o}) - \dfrac{sn._{x+o}}{y_{x+o}}\,(x + sn._x) \end{array} \tag{5.84}$$

Il est clair que ces équations ne dépendent pas de la méthode par laquelle on va chercher à déterminer les termes autres que y_C et x_C qui y interviennent. En tant que telles, elles ne font donc qu'indiquer comment le problème du centre de courbure peut être réduit au problème de la normale, en indiquant un lien intrinsèque entre ces deux problèmes géométriques. En revanche, les conditions de solution de ces équations, et donc du problème du centre de courbure, ne sont pas indépendantes de la méthode qu'on emploie pour résoudre le problème de la normale. Ces équations ne concernent de surcroît le centre de courbure qu'à condition que l'incrément o soit suffisamment petit pour rendre possible l'identification des points M et M' après avoir déterminé, séparément, les normales en ces points et avoir exprimé les conditions de leur intersection. Ceci revient à dire que cet incrément doit pouvoir être omis après (et seulement après) avoir calculé $sn._x$ et $sn._{x+o}$, avoir écrit l'une ou l'autre des équations (5.84), et l'avoir réduite à sa forme la plus simple. Pour pouvoir écrire ces équations sous une forme non seulement générale, mais aussi propre à indiquer un algorithme standard dont l'application conduit à la détermination des coordonnées du centre de courbure, il faut ainsi franchir une étape ultérieure que le simple argument géométrique qui conduit à ces équations ne permet guère de franchir. La convenance et la généralité des méthodes de solution du problème dépendent de la manière dont elle conduisent à franchir cette étape ultérieure.

Or, bien que les calculs que Newton exécute à la fin de l'automne 1664 montrent que ce dernier avait, à cette époque, compris que le problème du centre de courbure se réduit à celui de la normale par l'établissement d'équations telles que les (5.84), ils montrent aussi qu'il n'avait su franchir cette étape ultérieure que par rapport à quelques courbes particulières, exprimées par des équations assez simples. Cela ne tient pas tout simplement au fait que ses calculs ne concernent que des courbes exprimées par des équations particulières, à savoir la parabole d'équation $y^2 - ax = 0$ et l'hyperbole d'équation $xy - a^2 = 0$[49]. Bien que très

[49]Cf. respectivement Newton (MP), I, **2**, 4, § 1, [Exemple 1^{st}], 245-246, et [Exemple 2^{nd}], 246-248.

simples, ces exemples sont largement suffisants pour indiquer une démarche générale. Le point est que rien dans la considération de ces exemples ne semble montrer que Newton ait remarqué la possibilité de réduire la solution du problème du centre de courbure pour une courbe exprimée par n'importe quelle équation Algébrique, au calcul de certains invariants algorithmiques fondamentaux. Ainsi, cette démarche, encore que générale, n'aurait pas conduit Newton à la solution du problème pour toute courbe exprimée par une équation Algébrique, faute de son incapacité à exécuter les calculs qu'elle prescrit.

Voici comment celle-ci peut être reconstruite dans un cas assez simple, dans lequel Newton aurait certainement pu la suivre jusqu'au but. Supposons qu'il s'agisse de déterminer le centre de courbure d'une courbe exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par une équation telle que

$$x^m y^p = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i \qquad [p = 1, 2] \tag{5.85}$$

où m et n sont des nombres entiers positifs quelconques. Il suffit alors de se réclamer des deux premières des égalités (5.22), et de poser, par simplicité,

$$\begin{gathered} \left(\sum_{j=0}^{i} A_j A_{i-j} \right) (i - 2m) = C_i \\ A_i (i - m) = D_i \end{gathered} \tag{5.86}$$

pour réécrire les équations (5.84) sous les formes

$$\begin{aligned} y_C \left[\sum_{i=0}^{n} D_i \left(\begin{array}{c} (x+o)^{i-m-1} - \\ x^{i-m-1} \end{array} \right) \right] = \\ = o + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2n} C_i \left(\begin{array}{c} (x+o)^{i-2m-1} \\ -x^{i-2m-1} \end{array} \right) \end{aligned} \tag{5.87}$$

et

$$\begin{aligned} & x_C \left[\sum_{i=0}^{n} D_i \left(\begin{array}{c} x^{i-m-1} - \\ (x+o)^{i-m-1} \end{array} \right) \right] = \\ & = \left\{ \begin{array}{c} \left(\sum_{i=0}^{n} D_i x^{i-m-1} \right) \left(\begin{array}{c} x + o + \\ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2n} C_i \, (x+o)^{i-2m-1} \end{array} \right) \\ - \left(\sum_{i=0}^{n} D_i \, (x+o)^{i-m-1} \right) \left(\begin{array}{c} x + \\ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2n} C_i x^{i-2m-1} \end{array} \right) \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{5.88}$$

si $p = 1$, et

$$y_C \left(\frac{\sum_{i=0}^{n} D_i (x+o)^{i-m-1}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} A_i (x+o)^{i-m}}} - \frac{\sum_{i=0}^{n} D_i x^{i-m1-}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} A_i x^{i-m}}} \right) = = \sum_{i=0}^{n} D_i \left(\begin{array}{c} (x+o)^{i-m-1} - \\ x^{i-m-1} \end{array} \right) \tag{5.89}$$

et

$$x_C \left(\frac{\sum_{i=0}^{n} D_i x^{i-m-1}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} A_i x^{i-m}}} - \frac{\sum_{i=0}^{n} D_i (x+o)^{i-m-1}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} A_i (x+o)^{i-m}}} \right) = = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sum_{i=0}^{n} D_i x^{i-m-1}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} A_i x^{i-m}}} \left(x + o + \frac{\sum_{i=0}^{n} D_i (x+o)^{i}}{2 (x+o)^{m+1}} \right) \\ - \frac{\sum_{i=0}^{n} D_i (x+o)^{i-m-1}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} A_i (x+o)^{i-m}}} \left(x + \frac{\sum_{i=0}^{n} D_i x^{i}}{2 x^{m+1}} \right) \end{array} \right\} \tag{5.90}$$

si $p = 2$. Il est facile de voir que tous les termes de ces équations où n'apparaît pas le facteur o peuvent être éliminés par simplification. On pourra donc diviser par o et, ensuite, négliger tous les termes où o apparaît comme un facteur. Cela nous donnera des équations du premier degré en les inconnues y_C ou x_C — où n'apparaît plus l'incrément o — dont la simple solution fournit l'ordonnée ou l'abscisse du point C. Lorsque ces coordonnées ont été déterminées, il est enfin aisé d'appliquer le théorème de Pythagore pour trouver le rayon de courbure MC.

Bien que ce parcours ne comporte, dans les cas considérés, aucune difficulté de principe, il est facile de se rendre compte que le volume des calculs qu'il exige croît beaucoup plus rapidement que la complexité de l'équation de départ. C'est ainsi que, bien qu'il ne considère que des équations fort simples, Newton commet quelques erreurs[50] et ne parvient au résultat correct que dans le cas de l'hyperbole d'équation $xy = a^2$, et après deux tentatives. Étant, dans ce cas,

$$sn._x = -\frac{a^4}{x^3} \tag{5.91}$$

les équations (5.84) se réduisent à

$$\begin{aligned} y_C \left(\frac{(x+o)^2 - x^2}{x^2 (x+o)^2} \right) a^2 &= \frac{(x+o)^3 - x^3}{x^3 (x+o)^3} a^4 + o \\ x_C \left(x^2 - (x+o)^2 \right) &= x^2 \left(x - \frac{a^4}{x^3} \right) - (x+o)^2 \left(x + o - \frac{a^4}{(x+o)^3} \right) \end{aligned} \tag{5.92}$$

d'où, en suivant le parcours qu'on vient d'indiquer, il est facile de tirer

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{3a^4 + x^4}{2xa^2} \\ x_C &= \frac{a^4 + 3x^4}{2x^3} \end{aligned} \tag{5.93}$$

et, en indiquant par "$R_{x,C}$" le rayon de courbure relatif au point d'abscisse x :

$$R_{x,C} = \sqrt{(x_C - x)^2 + (y - y_C)^2} = \frac{\sqrt{(a^4 + x^4)^3}}{2x^3 a^2} \tag{5.94}$$

Après avoir trouvé cette dernière égalité, Newton l'entend comme une équation en l'inconnue x et applique la règle de Hudde pour trouver, sans difficulté, le point de courbure maximale de l'hyperbole, c'est-à-dire $x = a$.

La considération de ces exemples devrait éclairer le jugement précédent à propos de la démarche de Newton. Tout ce que Newton peut faire pour parvenir à la solution du problème du centre de courbure est de calculer explicitement les sous-normales à la courbe donnée en deux points respectivement d'abscisse x et $x+o$, substituer les expressions qui expriment ces sous-normales dans les équations générales (5.84), et simplifier les équations ainsi obtenues, en espérant pouvoir enfin parvenir à deux équations de premier degré respectivement en les variables y_C et x_C, où o n'apparaît plus et où n'apparaît qu'une seule des coordonnées x et y. S'il n'a pas réduit le problème du centre de courbure pour une courbe exprimée par n'importe quelle équation Algébrique, au calcul de certains invariants algorithmiques fondamentaux, c'est qu'il n'a pas vu la possibilité de mettre les équations générales (5.84) sous une forme propre à rendre clair la façon dont les coordonnées du centre de courbure peuvent être calculées, en opérant des transformations standard sur l'équation de la courbe donnée.

5.3.2 Décembre 1664 - février 1665 : deux méthodes pour la recherche du centre de courbure

Newton ne devait pas être satisfait des acquis de ses calculs de la fin de l'automne, car au cours des mois suivants, il revint à trois reprises sur la question du centre de courbure.

[50]Cf Newton (MP), I, **2**, 4, § 1, notes (5) et (12), 246.

C'est l'objet de trois notes, dont deux datées de décembre 1664 et l'une de février 1665, qui se suivent de près dans le même cahier où l'on trouve les calculs de l'automne, connu depuis comme le *Wast Book*[51].

En ne restant qu'au cas de la parabole d'équation $y^2 - ax = 0$, Newton observe, dans la première de ces notes[52], que sa "quantité de courbure" peut être déterminée par deux méthodes différentes, qui se réclament, l'une et l'autre de la première des proportions (5.82).

Avant de présenter ces méthodes, il convient d'observer que cette dernière proportion nous permet, quelle que soit la manière dont on détermine l'un des segments $y - y_C$ ou $x_C - x$, de déterminer l'autre de ces segments, pourvu qu'on connaisse y et $sn._x$. Lorsque les segments $y - y_C$ et $x_C - x$ ont été déterminés, il est ensuite facile de déterminer le rayon de courbure $R_{x,C}$ en appliquant le théorème de Pythagore, ce qui nous donne en général

$$R_{x,C} = (y - y_C)\sqrt{1 + \left(\frac{sn._x}{y}\right)^2} = (x_C - x)\sqrt{1 + \left(\frac{y}{sn._x}\right)^2} \tag{5.95}$$

La solution du problème du centre de courbure ne tient ainsi qu'à la détermination de l'un des segments $y - y_C$ ou $x_C - x$.

La première des méthodes de Newton ne diffère de celle qu'il avait suivie quelques mois auparavant que par le choix de l'égalité géométrique de départ. On verra pourtant que cette différence, apparemment mineure, se révèle essentielle. De même que la similitude des triangles MPG et MDC fournit la première des proportions (5.82), la similitude des triangles $\mathsf{M'P'G'}$ et $\mathsf{M'D'C}$ fournit l'autre proportion :

$$y_{x+o} : sn._{x+o} = (y_{x+o} - y_C) : [x_C - (x + o)] \tag{5.96}$$

En éliminant $\mathsf{D'C} = x_C - (x + o)$ entre ces deux proportions, Newton obtient l'égalité

$$\frac{(y - y_C)}{y} sn._x - o = \frac{(y_{x+o} - y_C)}{y_{x+o}} sn._{x+o} \tag{5.97}$$

sur laquelle il opère comme sur les égalités (5.84) pour tirer, dans le cas considéré, l'égalité

$$y_C = -\frac{4x\sqrt{ax}}{a} \tag{5.98}$$

d'où il lui est ensuite facile de déterminer x_C et $R_{x,C}$.

La seconde méthode est en revanche essentiellement différente de celle de l'automne. Après avoir tiré de la première des proportions (5.82) l'égalité

$$(y - y_C)\, sn._x + xy - yx_C = 0 \tag{5.99}$$

Newton exploite l'équation de la courbe pour éliminer x de cette équation. En posant en général

$$\begin{aligned} x &= g(y) \\ sn._x &= n(y) \end{aligned} \tag{5.100}$$

[51]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [1]-[3], 248-263.
[52]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [1], 248-251.

où $g(y)$ et $n(y)$ sont deux expressions où n'apparaît que la variable y, ceci revient à écrire l'équation (5.100) sous la forme

$$[y - y_C]\, n(y) + yg(y) - yx_C = 0 \tag{5.101}$$

Si on suppose que le point C, de coordonnées x_C et y_C, est un point fixé de manière arbitraire, alors cette équation exprime les conditions qu'un point de la courbe donnée doit respecter pour que la droite qui le joint à C soit une normale à cette courbe. Ses racines donnent ainsi les ordonnées de points de la courbe qui satisfont à cette condition. Il s'ensuit qu'une éventuelle racine double de cette équation indique un point de la courbe où les extrémités de deux normales tirées du point C viennent coïncider. Il suffit alors de se réclamer du théorème d'Apollonius et de la définition qu'il suggère pour le centre de courbure, pour en conclure que le point C est dans ce cas le centre de courbure d'une telle courbe à ce point. C'est exactement ce qu'observe Newton[53] :

> Now tis evident that when the lines $\mathsf{CM'}$ et MC are coincident that MC is the radius of a circle which hath the same quantity of crookednesse which the Parabola $\mathsf{M'MA}$ hath at the point C.

Pour trouver le centre de courbure d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales et exprimée par une équation Algébrique connue, dans un quelconque de ces points, il suffira alors de renverser cet argument en supposant que le point M pris sur cette courbe, de coordonnées x et y, est fixé, de remplacer dans l'équation (5.101) y par n'importe quelle autre variable, disons t, et de calculer les valeurs de x_C et y_C qui font que cette équation a une racine double $t = y$. Encore une fois, la substitution de t à y n'est pas opérationnellement essentielle. Pour obtenir le résultat voulu, il suffit d'ordonner l'équation (5.101) par rapport aux puissances de y et d'opérer sur elle conformément à la règle de Hudde. Cela fournit des égalités qu'on peut lire à rebours, en tant qu'équations en les variables x_C et y_C. Les racines de ces équations fournissent les coordonnées du centre de courbure de la courbe donnée au point d'ordonnée y.

C'est exactement ce que fait Newton. Si elle est référée à la courbe d'équation $y^2 - ax = 0$, l'équation (5.101) devient

$$2y^3 + \left(a^2 - 2ax_C\right) y - a^2 y_C = 0 \tag{5.102}$$

En appliquant deux fois la règle de Hudde à cette équation, en posant respectivement $\tau_i = i - 1$ et $\tau_i = i$, on obtient les nouvelles équations

$$\begin{aligned} &4y^3 + a^2 y_C = 0 \\ &6y^3 + \left(a^2 - 2ax_C\right) y = 0 \end{aligned} \tag{5.103}$$

d'où il est facile de tirer

$$\begin{aligned} y_C &= -\frac{4y^3}{a^2} = -\frac{4x\sqrt{ax}}{a} \\ x_C &= \frac{6y^2 + a^2}{2a} = \frac{a}{2} + 3x \end{aligned} \tag{5.104}$$

[53]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [1], 250. J'ai changé les lettres par lesquelles Newton indique les points sur sa figure, de manière à adapter cette citation à la figure 6, où il s'agira alors de supposer que la courbe $\mathsf{AMM'}$ est la parabole d'équation $y^2 - ax = 0$.

qui fournissent la solution du problème.

La présentation de ces deux méthodes pour déterminer le centre de courbure de la parabole d'équation $y^2 - ax = 0$ épuisent la première des notes de décembre[54]. Dans les deux notes qui suivent, Newton se limite pour l'essentiel à reformuler la seconde méthode de différentes manières, en l'appliquant à d'autres coniques. Il ne revient sur la première méthode que'à une seule occasion, à la fin de la troisième note[55], et encore par rapport à la parabole d'équation $y^2 = ax$. Je vais discuter la première méthode un peu plus loin, après avoir discuté les différentes formulations de la seconde proposées par Newton.

La seconde méthode, ou méthode cartésienne

La deuxième des notes de décembre[56] s'ouvre[57] avec une exposition et une justification générale de cette seconde méthode, se servant de l'exemple donné par l'ellipse d'équation $y^2 - ax + \frac{a}{b}x^2 = 0$. Cette exposition est suivie par trois autres exemples[58], relevant respectivement de l'hyperbole d'équation $y^2 - ax - \frac{a}{b}x^2 = 0$, de la même parabole d'équation $y^2 - ax = 0$ considérée dans la note précédente, et d'une nouvelle parabole d'équation $y^2 - ay + ax = 0$. Au cours du traitement de ce dernier exemple, Newton formule à nouveau sa méthode en termes généraux en ajoutant quelques éléments nouveaux à sa justification[59]. C'est justement cette justification qui nous intéresse le plus.

Newton observe explicitement que si dans l'égalité (5.99) on considère x_C et y_C comme des constantes fixées de manière arbitraire, alors cette égalité peut être lue comme une équation exprimant les conditions qu'un point de la courbe doit respecter pour que la droite qui le joint au point C soit une normale. Sans pour autant citer Apollonius, il observe ensuite que la courbure d'un arc de courbe compris entre deux points qui respectent cette condition est d'autant plus proche de celle de l'un ou l'autre des deux cercles dont les rayons sont donnés par les segments pris sur les normales en ces points, entre ces mêmes points et le point C, que ces points sont proches l'un de l'autre. Supposons maintenant que la position du point C varie jusqu'à devenir telle que deux de ces points viennent à coïncider, disons au point M, c'est-à-dire, dans le langage de Newton, que le point C soit pris "for the point where [...][deux normales] ceased to intersect at theire coincidence"[60]. Alors le cercle dont le segment MC est le rayon aura la même courbure que la courbe au point M. Il s'ensuit que si l'équation tirée de l'égalité (5.99) en éliminant l'une des deux variables x ou y grâce à l'équation de la courbe a une racine double, alors cette racine donne la valeur d'une des deux coordonnées d'un point de la courbe qui est tel que le point C est le centre de courbure de la courbe en ce point. Il suffit alors de chercher les valeurs de x_C et y_C qui font que cette équation ait une racine double, pour avoir *ipso facto*, les coordonnées du centre de courbure au point de coordonnées x et y.

Si la manière dont Newton présente cette justification rappelle l'argument d'Apollonius, ce qui est essentiel est que cet argument est de cette manière réinterprété dans le cadre d'une méthode parfaitement analogue à celle que Descartes avait suggérée pour la recherche

[54]Le théorème qui clôt cette note fut probablement ajouté plus tard : cf. la note (45), ci-dessus.
[55]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [3], 263.
[56]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [2], 252-259.
[57]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [2], 252-255.
[58]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [2], 255-259.
[59]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [2], 258-259.
[60]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [2], 253.

des normales. On pourrait même dire que l'argument d'Apollonius est employé par Newton comme un moyen pour montrer que cette dernière méthode s'applique aussi bien à la recherche des normales qu'à celle des centres de courbures. En passant, cette justification explicite de la seconde des deux méthodes de Newton fournit, de surcroît, une justification implicite de la première, en suggérant la possibilité de lire cette première méthode comme un raccourci de la seconde. On comprend alors les raisons de la préférence de Newton pour cette dernière méthode : non seulement celle-ci est une méthode qui s'intègre parfaitement à la géométrie cartésienne, mais elle cache aussi, en dernière instance, les raisons qui font que la première méthode conduit à des résultats corrects.

* * *

Comme la méthode des normales de Descartes, cette méthode s'applique en principe à toute courbe exprimée par une équation Algébrique référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales. Il s'agit d'éliminer x ou y entre l'équation de la courbe et l'égalité (5.99). Pour cela, il faut pourtant pouvoir disposer d'une expression en x et y de la sous-normale $sn._x$. De l'égalité (5.79), on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}x^{i-j}y^{j}\right] = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \displaystyle(x-x_C)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} jA_{i-j,j}x^{i-j}y^{j-1} \\ \displaystyle-(y-y_C)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(i-j)A_{i-j,j}x^{i-j-1}y^{j} \end{array}\right\} = 0 \end{array}\right. \tag{5.105}$$

dont il s'agit de déterminer une résultante soit en x, soit en y . Cela n'est pourtant possible en général qu'à condition de pouvoir exprimer soit x en termes de y, soit y en termes de x. Pour que la méthode en question puisse être effectivement appliquée, il faut donc que l'équation de la courbe puisse être mise sous une des deux formes $y = f(x)$ ou $x = g(x)$. Même dans ce cas, l'application de cette méthode est pourtant loin d'être aisée sauf dans quelques cas particuliers. Parmi ces cas, il y a évidemment ceux des coniques, et cela, plus que la fidélité aux arguments d'Apollonius, semble expliquer les choix des exemples de Newton. Ce qui est plus important est pourtant que même dans les cas les plus simples, l'application de cette méthode conduit à des résultats dans lesquels il est difficile de détecter la présence d'un invariant algorithmique qu'on puisse, par généralisation, supposer propre à fournir, dans chaque cas, les coordonnées du centre de courbure.

Considérons comme exemple une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'équation

$$x^m y - \sum_{i=0}^{n} A_i x^i = 0 \tag{5.106}$$

où m et n sont des nombres entiers positifs quelconques. En comparant la première des égalités (5.22) avec l'égalité (5.99) et la résultante de cette comparaison avec l'équation

(5.106), on obtient

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{j=0}^{i}A_jA_{i-j}\right)(i-2m)\,x^{i-2m-1}\\ -y_C\sum_{i=0}^{n}A_i(i-m)x^{i-m-1}+x-x_C\end{array}\right\}=0 \tag{5.107}$$

ou bien

$$\left.\begin{array}{r}\sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{j=0}^{i}(j-m)A_jA_{i-j}\right)x^{i-2m-1}\\ -y_C\sum_{i=0}^{n}A_i(i-m)x^{i-m-1}+x-x_C\end{array}\right\}=0 \tag{5.108}$$

d'où la règle de Hudde permet de tirer sans difficultés l'égalité

$$y_C=\frac{\sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{j=0}^{i}(j-m)A_jA_{i-j}\right)(i-2m-1)x^{i-2m-2}+1}{\sum_{i=0}^{n}A_i(i-m)(i-m-1)x^{i-m-2}} \tag{5.109}$$

et donc :

$$y-y_C=\frac{\left[\begin{array}{c}\left(\sum_{i=0}^{n}A_ix^{i-m}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}A_i(i-m)(i-m-1)x^{i-m-2}\right)\\ -\sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{j=0}^{i}(j-m)A_jA_{i-j}\right)(i-2m-1)x^{i-2m-2}-1\end{array}\right]}{\sum_{i=0}^{n}A_i(i-m)(i-m-1)x^{i-m-2}} \tag{5.110}$$

De là, il est facile ensuite de passer à la détermination de $R_{x,C}$ grâce à l'égalité (5.95).

Cet exemple me paraît très instructif, car il montre, dans son extrême simplicité, la limite intrinsèque de la méthode cartésienne adoptée par Newton. En effet, s'il est facile de voir que le polynôme

$$\sum_{i=0}^{n}(i-m)(i-m-1)A_ix^{i-m-2} \tag{5.111}$$

résulte du polynôme

$$\sum_{i=0}^{n}(i-m)A_ix^{i-m-1} \tag{5.112}$$

comme ce dernier résulte du polynôme

$$y = \sum_{i=0}^{n} A_i x^{i-m} \tag{5.113}$$

qui exprime l'ordonnée de la courbe donnée — c'est-à-dire qu'il résulte de ce polynôme par une double application de la règle de Hudde, selon la position $\tau_i = i$, suivie à chaque coup d'une division par x — , il est en revanche assez difficile de reconnaître les liens entre cette procédure et celle qui conduit du polynôme (5.113) à l'autre polynôme

$$\begin{gathered}\left(\sum_{i=0}^{n} A_i x^{i-m}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} A_i(i-m)(i-m-1)x^{i-m-2}\right) \\ -\sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{j=0}^{i}(j-m)A_jA_{i-j}\right)(i-2m-1)x^{i-2m-2}-1\end{gathered} \tag{5.114}$$

qui entre dans l'expression de $y - y_C$[61].

Ce n'est que la manifestation la plus évidente d'un trait essentiel de la méthode de Newton : à cause de la nature de la règle de Hudde, cette méthode demande qu'on opère non pas sur la forme générale de l'équation (5.99), mais sur la forme que cette équation, ou,

[61] Cela n'est facile que lorsque $m = 0$, car

$$\sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{j=0}^{i} jA_jA_{i-j}\right)(i-1)x^{i-2} = \sum_{i=0}^{2n-2}\left(\sum_{j=1}^{i+2} j(i+1)A_jA_{i-j+2}\right)x^i$$

et

$$\left(\sum_{i=0}^{n} A_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} A_i i(i-1)x^{i-2}\right) = \sum_{i=0}^{2n-2}\left(\sum_{j=1}^{i+2} j(j-1)A_jA_{i-j+2}\right)x^i$$

et donc

$$\begin{aligned} y - y_C &= \frac{\sum_{i=0}^{2n-2}\left(\sum_{j=1}^{i+2} j(j-i-2)A_jA_{i-j+2}\right)x^i - 1}{\sum_{i=0}^{n} A_i i(i-1)x^{i-2}} \\ &= -\frac{\left[1+\left(\sum_{i=0}^{n} A_i i x^{i-1}\right)^2\right]}{\sum_{i=0}^{n} A_i i(i-1)x^{i-2}} \end{aligned}$$

et :

$$R_{x,C} = \sqrt{\frac{\left[1+\left(\sum_{i=0}^{n} A_i i x^{i-1}\right)^2\right]^3}{\left(\sum_{i=0}^{n} A_i i(i-1)x^{i-2}\right)^2}}$$

comme on sait aujourd'hui.

pour être plus précis, l'équation

$$(y - y_C)\,\frac{sn._x}{y} + x - x_C = 0 \tag{5.115}$$

prend dans chaque cas particulier, une fois qu'on a mis à la place de $\frac{sn._x}{y}$ l'expression Algébrique qui exprime ce rapport dans ce cas. Ce rapport n'entre donc pas dans cette méthode comme un invariant (autant géométrique qu'algorithmique). Ainsi, les liens géométriques qui lient ce rapport avec le rayon de courbure restent irrémédiablement cachés, tandis que les liens algorithmiques qui lient l'équation de la courbe à l'expression du rayon de courbure ne peuvent, dans les cas les plus simples, qu'être retrouvés *a posteriori*, en comparant, cas par cas, cette équation et cette expression[62]. Bien qu'on puisse la décrire en général, cette méthode ne tient donc pas à une égalité générale qui manifeste un algorithme propre au problème du centre de courbure, mais seulement à une démarche régulière qu'il faut suivre cas par cas.

Cette limite de la méthode de Newton me paraît plus profonde et essentielle que celle qui tient aux difficultés que cette démarche rencontre lorsque, après substitution, on retrouve dans l'équation (5.115) plusieurs termes affectés par les facteurs y_C ou x_C[63].

* * *

Certes, Newton ne pouvait pas comparer, en décembre 1664, sa méthode avec la formule différentielle qui exprime le rayon de courbure, et il ne pouvait donc pas voir, comme nous, dans cette caractéristique essentielle de cette méthode, une limite profonde. Il lui était pourtant facile de se rendre compte que cette méthode ne pouvait conduire à la solution du problème que dans certains cas, et en suivant des procédures algorithmiques difficiles à décrire une fois pour toutes. Et cela pouvait être pour lui une raison d'insatisfaction.

C'est probablement la raison qui le poussa à revenir sur sa méthode deux mois plus tard, dans sa troisième note[64], et à chercher à la reformuler.

Au lieu de se réclamer d'une solution déjà donnée pour le problème de la normale et de partir de l'équation (5.99), pensée comme l'expression des conditions qu'un point de la courbe doit respecter pour que la droite qui le joint au point C soit une normale, il suppose connaître le rayon de courbure de la courbe donnée au point M de coordonnées x et y et écrit l'équation du cercle correspondant (le cercle "également courbé", comme dit Newton[65]) :

$$y^2 - 2yy_C + y_C^2 + x_C^2 - 2xx_C + x^2 - R_{x,C}^2 = 0 \tag{5.116}$$

En suivant encore Descartes, il observe ensuite que ce cercle n'est tangent à la courbe au point M qu'à condition que cette équation ait une racine double. En appliquant la règle de Hudde à cette équation on obtient ainsi une nouvelle équation qui, lorsque x_C et y_C sont

[62] Cf. la note (61) ci-dessus.

[63] Cette difficulté se manifeste clairement même dans le premier exemple de Newton, celui de l'ellipse d'équation $y^2 - ax + \frac{a}{b}x^2 = 0$ [cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [2], 252-255]. Il est pourtant impossible de la voir si, comme Whiteside [cf. pour exemple, *ibid.*, note (22), 253], on reconstruit la méthode de Newton "en termes plus modernes, et plus généralement", en remplaçant l'application de la règle de Hudde par l'algorithme différentiel.

[64] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [3], 259-263.

[65] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [3], 259.

considérées comme des constantes, exprime les conditions que le point M doit respecter pour que la droite qui le joint à C soit une normale à la courbe. Cette nouvelle équation peut alors se substituer à l'équation (5.99) comme point de départ de la démarche décrite ci-dessus consistant en une nouvelle application de la règle de Hudde, propre à fournir une égalité qui, lue comme une équation en l'une des variables x_C, y_C ou $R_{x,C}$, permet de déterminer cette variable en termes de x ou y.

Pour ce faire, il faut naturellement que dans les deux applications de la règle de Hudde on choisisse τ_i de sorte à éliminer, l'une après l'autre, deux des termes x_C, y_C ou $R_{x,C}$, qui entrent dans l'équation (5.116). Pour rendre possible la première de ces applications de la règle de Hudde, il faut néanmoins que l'équation (5.116) soit réduite à une équation entière où n'apparaît qu'une seule parmi les variables x et y. Lorsque ceci est fait, il est encore possible qu'une seule application de cette règle ne soit pas suffisante à éliminer l'un de ces termes, et qu'il soit nécessaire pour cela d'appliquer cette règle deux fois à la même équation (relativement à des progressions arithmétiques différentes), en comparant ensuite les équations obtenues. Dès que l'équation de la courbe donnée se complique un peu, la nouvelle démarche proposée par Newton devient ainsi assez pénible. En revanche, lorsque cette équation est assez simple, et est en particulier telle que le terme $R_{x,C}$ n'affecte, dans l'équation tirée de l'équation (5.116) par élimination de x ou y, qu'une seule puissance, respectivement de y ou de x, il suffit de choisir convenablement τ_i lors de la première application de la règle de Hudde, pour obtenir une nouvelle équation qui est nécessairement équivalente à l'équation (5.99).

Le seul avantage que la nouvelle démarche suggérée par Newton peut ainsi avoir sur celle suivie dans les notes de décembre, tient à une éventuelle simplification algorithmique, rendue possible par des choix convenables de τ_i. Cet avantage ne peut pourtant apparaître que dans certains cas particuliers, que Newton évite d'ailleurs de prendre en compte, en se limitant à considérer encore une fois la parabole d'équation $y^2 = ax$. Encore que ce n'est donc pas de cette manière qu'il puisse l'atteindre, l'objectif visé par Newton est cependant assez clair. Celui-ci cherche à donner à sa méthode une transparence opérationnelle suffisante pour rendre possible la découverte, derrière la démarche qu'elle prescrit, d'un algorithme facile et général. C'est un but auquel il ne parviendra que quelques mois plus tard.

La première méthode, ou méthode à la Fermat

C'est probablement en visant ce même but que Newton revient, à la fin de sa note de février[66], sur sa première méthode.

Après avoir observé[67] que la démarche qu'on vient de décrire revient au même que de supposer que l'équation (5.116) a une racine triple, c'est à dire qu'au point M viennent à coïncider trois intersections entre la courbe donnée et le cercle de centre C et rayon $R_{x,C}$, il imagine un cercle tangent à la courbe donnée au point M qui coupe de surcroît cette courbe en un autre point M′. Considérons à nouveau la figure 6. Ce cercle aura naturellement son centre sur la droite MC, mais ce centre ne sera pas en général le centre de courbure de cette courbe. Pour qu'il en soit ainsi il faudrait que le point M′ vienne à coïncider avec le point M. Supposer que le point C dans cette figure puisse être pris pour le centre de courbure cherché revient donc à supposer que le point M et le point M′ sont entre eux si proches

[66] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [3], 263.
[67] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [3], 262.

qu'il est possible de les confondre l'un avec l'autre. C'est ce que Newton exprime en posant $\mathsf{P'M'} - \mathsf{PM} = o$ et en traitant o comme un incrément dont les puissances supérieures peuvent être négligées, lorsqu'on considère les relations entre les côtés des triangles semblables MPG et MDC, d'un côté, et $\mathsf{M'P'G'}$ et $\mathsf{M'D'C}$, de l'autre. Comme les droites MC et $\mathsf{M'C}$ sont prises par hypothèse comme normales à la courbe, ceci nous ramène à la première méthode, avec la seule différence que maintenant l'incrément principal qu'on considère n'est plus celui de l'abscisse, mais celui de l'ordonnée. Comme Newton l'a désormais compris, ces deux incréments sont liés entre eux par une relation qui tient à la nature de la courbe. Cette différence ne concerne donc que le choix de l'une de ces coordonnées comme variable principale.

Encore une fois, Newton se limite pourtant à considérer la parabole d'équation $y^2 - ax = 0$, et il ne fait, pour l'essentiel, que répéter les mêmes calculs qu'il avait exécuté dans la première des ses notes de décembre, en termes de la variable y plutôt que de la variable x. Cela ne vaut certes pas la peine de le suivre dans ces calculs fort simples.

Il convient en revanche de s'interroger sur les raisons qui le poussèrent à revenir à sa première méthode, après avoir considéré les possibilités fournies par la seconde. L'argument qu'il emploie pour justifier cette première méthode confirme qu'il a compris que celle-ci n'est au fond rien d'autre qu'une simplification algorithmique de la seconde. Mais, si ceci l'avait poussé précédemment à préférer la seconde méthode — qui rend explicites les raisons qui permettent de justifier la première — c'est maintenant la simplicité algorithmique qui semble primer. Comme on l'a noté ci-dessus, Newton ne semble désormais intéressé que par la recherche d'un algorithme facile et général, pour le centre de courbure. Si le cas trivial de la parabole d'équation $y^2 - ax = 0$ n'est certes pas suffisant, à lui tout seul, pour montrer que c'est justement en suivant la première méthode, plutôt que la seconde, que cet objectif peut être atteint, il est difficile d'imaginer que Newton n'ait pas envisagé cette possibilité, laissant à des réflexions futures de l'évaluer de près.

5.4 Mai 1665 : développées et plus grande ou plus petite courbure

Entre le mois de février et le mois de mai 1665, Newton n'ajouta pas d'autres notes au *Waste Book*. Quand il revint à son cahier, il se préoccupa d'abord, plutôt que de poursuivre ses recherches sur la méthode la plus convenable pour déterminer le centre de courbure, d'étudier de possibles conséquences de la solution de ce problème. C'est l'objet de deux notes, datées du mois de mai 1665, qui dans le *Wast Book* précèdent de quelques pages deux autres notes, datées respectivement du 20 et du 21 mai 1665, où il est par contre question de formules générales pour la sous-normale et pour le centre de courbure. Ces deux dernières notes feront l'objet de la section suivante. Je m'occuperai ici des deux premières.

Dans la première de ces notes[68], Newton raisonne sur le lieu géométrique des centres de courbure d'une courbe quelconque. Il pointe ainsi son attention sur une courbe associée à toute courbe donnée que, quelques années plus tard, Huygens qualifiera de"développée" de cette courbe[69]. Newton ne mentionne aucune source où il aurait appris à considérer les

[68]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [4]-[5], 263-264.
[69]Cf. la note 46, ci-dessus.

développées d'une courbe donnée, et il est d'ailleurs difficile d'imaginer une source possible[70]. Il ne reste donc qu'à supposer qu'il ait imaginé lui même cette courbe, en considérant le polygone C, C', C'', ...(fig. 7) dont les sommets sont les points d'intersection successifs des normales tirées à une courbe AML aux points M, M', M'', M''' ...très proches l'un de l'autre, qui s'approchent d'autant plus de la développée que les points M, M', M'', M''' ...s'approchent l'un de l'autre. Cette image de la développée, comme la limite du polygone $\mathsf{CC'C''}$...suggère d'emblée que la normale à une courbe à n'importe quel point de celle-ci est tangente à la développée de cette courbe. C'est justement ce que note Newton, en observant de surcroît que de là il s'ensuit que la développée est "comme mesurée"[71] par la normale, de sorte que la considération de cette dernière permet de rectifier la développée.

Au lieu de justifier cette conclusion, Newton l'éclaire par un exemple. Supposons (fig. 8) que la courbe cCV est la développée de la courbe AML et que l'axe AH est tangent à cCV au point V. Il s'ensuit que V est le centre de courbure de AML au point A et que AV est normale à cette courbe à ce point. Newton observe alors qu'il suffit de prendre sur MC un point S tel que $\mathsf{MS} = \mathsf{AV}$ parce que le segment CS — qui résulte en soustrayant du rayon de courbure CM le plus court des rayons de courbure de la courbe AML — est égal à la portion CV de la développée cCV. Sans autre justification, il en conclut enfin que si la courbe AML "est une parabole", alors la courbe cCV est celle "dont [van] Heuraet trouva la longueur"[72].

La situation décrite par Newton est en effet celle qui se vérifie lorsque AML est la parabole d'équation $y^2 - ax = 0$ et de rayon de courbure

$$\begin{aligned} R_{x,C} &= \sqrt{ax}\left(1+\frac{4x}{a}\right)\sqrt{1+\frac{a}{4x}} \\ &= \sqrt{\frac{16x^3}{a}+12x^2+3ax+\frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2}{a}\left(\frac{a}{2}+2x\right)^3} \end{aligned} \tag{5.117}$$

Dans ce cas, $\mathsf{AV} = R_{0,C} = \frac{a}{2}$ est le plus petit des rayons de courbure. Si on pose $\mathsf{VB} = x_C - \frac{a}{2} = w$ et $\mathsf{BC} = y_C = z$ et on réfère la développée cCV à l'axe AH et à l'origine V, alors on a, conformément aux égalités (5.104),

$$\begin{cases} z = -\dfrac{4y^3}{a^2} \\ w = 3x = \dfrac{3y^2}{a} \end{cases} \tag{5.118}$$

et donc, en éliminant y entre ces deux équations :

$$27az^2 = 16w^3 \tag{5.119}$$

Le segment

$$\mathsf{CS} = \left[\sqrt{\frac{2}{a}\left(\frac{a}{2}+2x\right)^3} - \frac{a}{2}\right]_{x=\frac{\xi}{3}} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{\left(1+\frac{4\xi}{3a}\right)^3} - 1\right) \tag{5.120}$$

[70] Sur les résultats de Newton à propos de la courbure, cf. Whiteside (1960-1962), 376-380.
[71] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [4], 263.
[72] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [4], 264.

est donc égal à la portion de la courbe exprimée par l'équation (5.119) comprise entre l'abscisse $w = 0$ et l'abscisse $w = \xi$. Or, la substitution $\frac{16}{27a} \to \frac{1}{a}$ transforme cette équation dans l'autre équation

$$az^2 = w^3 \tag{5.121}$$

de sorte qu'en faisant référence à cette dernière équation, la conclusion précédente peut s'exprimer par l'égalité

$$\Lambda_0^\xi [z] = \frac{8a}{27}\sqrt{\left(1 + \frac{9\xi}{4a}\right)^3} - \frac{8}{27}a = \sqrt{\frac{1}{a}\left(\frac{4}{9}a + \xi\right)^3} - \frac{8}{27}a \tag{5.122}$$

qui est équivalente à l'égalité (3.126) établie par van Heuraet, car $\xi = \chi - \frac{4}{9}a$.

En raisonnant sur la développée d'une parabole, Newton retrouve donc le résultat paradigmatique que van Heuraet avait donné comme exemple de sa méthode de rectification. Si on en reste à la note de mai 1665, l'argument qui justifie cette conclusion est cependant loin d'être clair. Newton se limite à affirmer que l'extrémité de n'importe quel segment constant — perpendiculaire à la normale d'une courbe donnée, et tiré d'un point de celle-ci dont la distance avec le point M, où cette normale coupe cette courbe, est fixe — décrit, en même temps que le point M court sur la courbe, une autre courbe dont le centre de courbure est, pour chaque position de M, le même que celui de la courbe donnée. En appliquant cette considération à la courbe AML, ceci revient à dire que, quels que soient les segments constants Ss, Mm et SM, les deux premiers étant perpendiculaires à CM, les normales mg et sf aux courbes $\mathsf{rsr'}$ et $\mathsf{tmt'}$ décrites par les points m et s, se rencontrent en C, qui est en même temps le centre de courbure des courbes AML, $\mathsf{rsr'}$ et $\mathsf{tmt'}$.

Comme l'observe Whiteside[73], rien n'assure que ceci soit le cas en général. Néanmoins, la considération des courbes telles que $\mathsf{rsr'}$ et $\mathsf{tmt'}$ n'est pas sans préfigurer l'argument que Newton emploiera dix-huit mois plus tard, dans le *Traité d'octobre 1666*[74], pour justifier la même conclusion générale dont l'égalité (5.122) dérive. Cet argument se sert de la considération d'une infinité de courbes parallèles à la courbe AM, toutes orthogonales à la normale CM, qui "appliquent" chaque point de CS à un point de CV sans produire aucun "glissement". Ces points fonctionnent ici comme des indivisibles, dont la dimension reste la même, lorsqu'on les considère comme des composants du segment CS et de la courbe CV, de sorte que l'argument de Newton tient à une franche application de la méthode des indivisibles, dans la version de Torricelli[75]. Le problème est donc le suivant : soit Newton était en possession de cet argument dès le mois de mai 1665 — mais alors il est difficile de comprendre pourquoi il ne l'a pas employé explicitement — soit il n'était pas en sa possession — et alors il est difficile de comprendre comme il a pu envisager que le segment CS soit égal à la portion CV de la courbe cCV, car cela ne semble géométriquement clair que si l'on transforme la vague image des courbes $\mathsf{tmt'}$ et $\mathsf{rsr'}$ dans un argument précis tel que celui du *Traité d'octobre 1666*. Les substitutions qu'il faut opérer pour retrouver la courbe considérée par van Heuraet à partir de la parabole d'équation $y^2 - ax = 0$ ne sont guère naturelles, et la démarche proposée par ce dernier diffère de manière essentielle de celle suivie par Newton. Il est ainsi peut probable que Newton soit parvenu à sa conclusion *a posteriori*, en généralisant le résultat de van Heureat.

[73]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, note (52), 264-265.
[74]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, probl. 9, 432-433. Je reviendrai sur cet argument dans la section 11.2.4.
[75]Cf. Torricelli (1644), en particulier le traité *De solido acuto Hyperbolico*, II, 93-135

En l'absence d'une réponse plausible pour cette question, je ne peux qu'observer que Newton ne reviendra plus sur la rectification des développées avant le mois d'octobre 1666, lorsque, tout en présentant deux démarches possibles pour parvenir à la rectification d'une courbe — une issue, en dernière instance, de l'argument de van Heuraet, et l'autre fondée sur la considération des développées —, il ne s'efforcera guère d'éclairer les liens entre ces deux démarches.

* * *

Dans la deuxième note de mai 1665[76], Newton expose deux différentes méthodes pour résoudre le problème de la plus grande ou de la plus petite courbure d'une conique donnée[77], en appliquant la première à la parabole d'équation $y^2 - ya + ax = 0$ et la deuxième à cette même parabole et à l'ellipse d'équation $ax^2 - akx + ky^2 = 0$.

La première méthode tient à la recherche d'un *minimum* ou d'un *maximum* du rayon de courbure — ce qui fournit respectivement un *maximum* ou un *minimum* de courbure[78] — en appliquent la règle de Hudde[79]. Ceci revient, évidemment, à transformer l'équation $z = R_{x,C}$ en une équation entière en z et x, ou en z et y, et à appliquer cette règle à une telle équation pour la transformer en une nouvelle équation où n'apparaît que la variable x ou la variable y ; les racines de cette dernière équation donneront ensuite les *maxima* ou les *minima* cherchés.

* * *

La méthode est fort simple, mais elle cache une difficulté. L'exemple choisi par Newton pour mettre la méthode à l'épreuve permet justement de voir cette difficulté. Pourtant, ce dernier semble comprendre cette difficulté d'une manière erronée, et il en conclut que le théorème de Hudde n'est correct qu'à condition que le polynôme auquel il s'applique ait au moins deux racines réelles[80]. Évidemment, il n'est pas ainsi, car ce théorème — étant fondé, en dernière instance, sur une propriété de la factorisation des polynômes — ne distingue pas entre racines réelles et racines imaginaires : si un polynôme à coefficients réels ${}_nP(x)$ est donné et qu'il à 2μ ($\mu = 1, 2, \dots \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) racines doubles imaginaires, le polynôme ${}_nP^*(x)$ conserve toutes ces racines.

Pour comprendre correctement la difficulté dont il est question, et expliquer en même temps l'erreur de Newton, il faut d'abord distinguer entre deux espèces de situations dans lesquelles il est possible d'appliquer la règle de Hudde. Il est possible d'abord que cette règle soit appliquée pour chercher les conditions qui font qu'une certaine équation $f(x) = 0$ a une racine double déterminée $x = X$, ou pour calculer le rapport $\frac{\sigma}{v}$ relatif à un point déterminé d'une certaine courbe donnée. Dans ce cas, le fait que le théorème de Hudde ne

[76] Cf. Newton (MP), I, 2, 4, § 2, [5], 265-271.

[77] Au début de sa note, là où il commence à exposer sa première méthode, Newton indique, en marge de la page, la date "Décembre 1664" ; avant de passer ensuite à l'exposition de la deuxième méthode, il écrit, au milieu de la page, la date "mai 1665" [cf. *ibid.*, 265 et 268 ; cf aussi la planche II, entre les pages 268 et 269]. Par la première de ces dates, Newton voulait probablement indiquer que la première de ses méthodes était, pour l'essentiel, en sa possession dès le mois de décembre précédent.

[78] Cf. la note (45), ci-dessus.

[79] Cf. la section 3.3.2.

[80] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 2, [5], 267. Whiteside commente longuement la faute de Newton dans la note (65), *ibid.*, 266-268. Mes observations, à propos de cette question, sont suggérées par celles de ce dernier, encore qu'elles ne coïncident pas avec celles-ci.

distingue pas entre racines réelles et racines imaginaires ne comporte aucune difficulté, car la valeur de la racine double dont il est question est établie *a priori*. Mais il est aussi possible que cette règle soit appliquée pour déterminer la valeur de x qui corresponde à une racine double d'une certaine équation. Ceci est le cas lorsqu'il s'agit de calculer les *maxima* ou les *minima* d'une quantité z, dont on sait qu'elle satisfait à une équation Algébrique $z = f(x)$, et qu'on pose[81] pour l'occurrence $f(x) - Z = 0$. Il est alors possible que la règle de Hudde nous conduise à des valeurs de x imaginaires. Si par exemple, on a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$,on aura $\frac{1}{3}x^3 + 2x - Z = 0$ et, en appliquant la règle de Hudde, $x^2 + 2 = 0$ qui n'a que deux racines imaginaires. Dans ce cas, on n'a qu'à conclure que la quantité z n'a pas de *maxima* ou de *minima* réels, c'est-à-dire que, quel que soit Z réel, l'équation $\frac{1}{3}x^3 + 2x - Z = 0$ ne peut avoir qu'une seule racine réelle.

Or, en raisonnant sur la parabole d'équation $y^2 - ya + ax = 0$, Newton semble parvenir à la conclusion que ceci est justement le cas de l'équation $R_{x,C} - Z = 0$, à laquelle il faut appliquer la règle de Hudde pour trouver les *maxima* ou le *minima* du centre de courbure, encore que la parabole en question ait évidemment un point de courbure maximale correspondant à son sommet. Il en conclut donc que la règle de Hudde conduit ici à l'erreur, car elle ne montre pas un *minimum* réel qui est en revanche présent. Il est aisé de comprendre le raisonnement de Newton et son erreur. Comme le diamètre de la parabole en question est parallèle à l'axe, il s'ensuit (comme le montre bien la figure 9) que, quel que soit le point M pris sur la parabole, le seul autre point M' de celle-ci, tel que le rayon de courbure dans M soit égal au rayon de courbure dans M' a la même abscisse que M. Donc, quel que soit le segment Z, il n'y a qu'une valeur de x qui correspond à des points de la parabole où le rayon de courbure est égal à Z. Ceci est parfaitement correct, mais ne permet pas de conclure que l'équation $R_{x,C} - Z = 0$ a une seule racine réelle quel que soit Z (évidement réel), car il est encore possible qu'elle ait trois racines réelles (dont deux égales) pour une valeur de x à laquelle ne correspond aucun point de la parabole. Et ceci est justement le cas. En effet, une fois réduite en forme entière, l'équation $R_{x,C} - Z = 0$ se transforme dans la suivante

$$16x^3 - 24ax^2 + 12ax - 2a^3 + aZ^2 = 0 \qquad (5.123)$$

de laquelle, en appliquant la règle de Hudde on trouve

$$4x^2 - 4ax + a^2 = 0 \qquad (5.124)$$

qui a une racine double $x = \frac{a}{2}$, qui, tout en correspondant à un *minimum* de $R_{x,C}$ (et en particulier à la valeur $R_{x,C} = 0$), ne correspond à aucun point de la parabole.

Ce n'est donc pas de la règle de Hudde que vient la difficulté, mais de l'application de cette règle à la recherche des *maxima* et des *minima* d'une quantité à laquelle sont assignées des propriétés géométriques (dans ce cas les propriétés d'un rayon de courbure) qui ne dépendent pas uniquement de la nature de l'expression Algébrique qui exprime cette quantité. Cette règle ne souffre pas d'exceptions lorsqu'elle est appliquée à la recherche des *maxima* et des *minima* d'une quantité exprimée par une expression Algébrique ; mais il est possible qu'elle conduise à déterminer des *maxima* et *minima* qui, tout en étant parfaitement réels, ne soient pas géométriquement acceptables. C'est donc la méthode pour la recherche des *maxima* et des *minima* des rayons de courbure, et non pas la règle de Hudde, qui fait défaut.

[81] Cf. la section 3.3.2.

Malgré sa compréhension erronée de la difficulté, Newton saisit la manière pour parvenir à un résultat correct. Il remplace x dans l'équation $R_{x,C} - Z = 0$ par sa valeur $\frac{ay-y^2}{a}$ donnée par l'équation de la courbe, et trouve une nouvelle équation en y à laquelle il applique la règle de Hudde pour trouver la condition $y = \frac{a}{2}$, qui donne le point de courbure *maximale*, c'est-à-dire le sommet de la parabole, de coordonnées $x = \frac{a}{4}$, $y = \frac{a}{2}$. Ce n'est certes pas surprenant qu'en travaillant sur les ordonnées de la parabole, il est possible de dépasser la difficulté. En effet, cette dernière possède un et un seul point pour chaque valeur possible de y, et la difficulté précédente est donc éliminée d'emblée. Celle de Newton n'est donc pas une astuce, mais une démarche suggérée par la nature de la courbe étudiée. L'enseignement que Newton semble tirer de la considération de cette difficulté est ainsi d'ordre général : l'application de n'importe quel algorithme Algébrique à la solution d'un problème géométrique ne peut pas se substituer complètement à la considération de la nature intrinsèque du problème ; derrière tout algorithme se cachent des relations géométriques qui en justifient l'applicabilité et qu'on ne doit pas perdre de vue, si on veut éviter de parvenir à de fausses conclusions. L'effort de retrouver, derrière les algorithmes employés, les relations géométriques qui en rendent raison sera, par la suite, une attitude constante de Newton, qui ira de pair avec l'effort de généraliser et de simplifier ces algorithmes, ainsi qu'avec la propension à les étudier comme tels, indépendamment de leurs applications géométriques possibles.

* * *

Cette attention à la nature proprement géométrique du problème considéré est d'ailleurs évidente dès la deuxième partie de la note que Newton consacre à la question de la plus grande ou de la plus petite courbure, où il est question de la deuxième méthode pour résoudre ce problème. Cette méthode tient en fait à une caractéristique propre des développées des coniques. Newton observe que ces développées sont toutes symétriques par rapport aux diamètres des coniques correspondantes et sont telles que les normales à ces coniques tirées de points symétriques des leurs développées coupent ces mêmes coniques en deux points qui sont eux-aussi symétriques par rapport aux diamètres. Une conique aura ainsi un *maximum* ou un *minimum* de courbure en tout point qui correspond à un point double de son développée, car d'un tel point, on pourra tirer deux normales coïncidentes à la conique. Pour déterminer les points de plus grande ou de plus petite courbure d'une conique, il suffira alors de chercher les points doubles de son développée. Bien que cet argument témoigne d'une compréhension profonde de la nature d'une conique, il ne peut évidemment pas donner lieu à une méthode générale pour la recherche des extrême de courbure. Dans les perspectives de ma recherche, il n'est pas nécessaire de le considérer de près.

5.5 20-21 mai 1665 : Les méthodes se transforment en théorèmes

Les recherches menées par Newton, à partir de l'automne 1664, à propos de normales et de centres de courbures culminent dans les deux notes du 20 et 21 mai 1665[82]. Le but de ces notes est déclaré dès le début. Il s'agit d'établir des “théorèmes” : dans la

[82] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, respectivement [1], 272-280 et [2], 280-297.

première note, des "théorèmes concernant les questions de *maxima* et de *minima*" ; dans la seconde, des "théorèmes pour trouver la courbure dans les lignes"[83]. Ce que Newton appelle "théorèmes" sont des égalités générales qui fournissent la sous-normale, la sous-tangente, les coordonnées du centre de courbure, et le rayon de courbure d'une courbe exprimée, par rapport à un certain système de coordonnées cartésiennes, par n'importe quelle équation Algébrique entière. Pour ce qui est de la sous-normale, Newton était parvenu à une égalité de la sorte dès le mois de septembre 1664[84]. Son but est maintenant de démontrer cette égalité en toute généralité et d'en tirer une égalité analogue concernant la sous-tangente. Pour ce qui est en revanche du centre et du rayon de courbure, Newton n'avait fait que décrire des démarches aptes à déterminer ce centre et ce rayon en partant de l'équation de la courbe. Son but est donc de substituer à la description de ces démarches des égalités analogues à celle relative à la sous-normales.

À propos de la méthode à suivre pour obtenir ces résultats, Newton n'a plus de doute : ses nombreuses applications et reformulations d'une méthode d'inspiration cartésienne, autant pour le problème des normales que pour celui des centres de courbure, semblent l'avoir convaincu de la nécessité de chercher un parcours plus aisé, se réclamant des suggestions de Fermat.

5.5.1 20 mai : deux preuves pour l'algorithme de la sous-normale et de la sous-tangente

La note du 20 mai, se divise en deux parties. Dans la première, Newton présente une preuve parfaitement générale pour l'égalité (5.79). Dans la seconde, il modifie localement cette preuve, et parvient à démontrer une égalité analogue à celle-ci pour la sous-tangente.

Le passage de la première à la seconde de ces formules ne se résume pas, trivialement, à une application de l'égalité

$$stg._x = \frac{y^2}{sn._x} \tag{5.125}$$

Cette égalité n'est correcte qu'à condition que les courbes sur lesquelles elle porte soient référées à des coordonnées cartésiennes orthogonales, et ceci est aussi le cas de l'égalité (5.79). Dans la deuxième partie de sa note, Newton semble chercher une preuve pour son égalité qui ne dépende pas de l'angle du système de coordonnées cartésiennes auquel la courbe dont on cherche la sous-tangente est référée. Si au bout de sa preuve, il parvient à l'égalité qui dérive de l'égalité (5.79) conformément à l'égalité (5.125), ce n'est que parce que le rapport entre la sous-tangente et les coordonnées d'une courbe est invariant sous le changement de l'angle formé par ces coordonnées. Ceci n'est pourtant pas le cas du rapport entre la sous-normale et ces mêmes coordonnées. La preuve que Newton fournit dans la deuxième partie de sa note contient ainsi, comme un cas particulier, la preuve qu'il fournit dans la première partie de celle-ci, mais non *viceversa.*

[83]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, respectivement [1], 272 et [2], 280.
[84]Cf. la section 5.2.

La première preuve

Pour obtenir sa première preuve, Newton part d'un exemple fort simple, donné par l'hyperbole d'équation

$$y^2 = ax + x^2 \tag{5.126}$$

et raisonne sur cet exemple en cherchant ce qui, dans l'argument qui le concerne, ne dépend pas de la nature particulière de l'équation considérée. En raisonnant comme il l'avait déjà fait presque un an auparavant, à la fin de l'été 1664[85], il considère un point $\mathsf{\Gamma}$ sur l'axe auquel la courbe est référée et deux points M et M' sur cette courbe (fig. 1), respectivement d'abscisse $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{AP}' = x + o$, et il suppose que les segments $\mathsf{\Gamma M}$ et $\mathsf{\Gamma M}'$ sont égaux entre eux. En posant comme ci-dessus $\mathsf{P\Gamma} = w_*$ et $\mathsf{P'M'} = z$, cela conduit à l'équation

$$w_*^2 + y^2 = (w_* - o)^2 + z^2 \tag{5.127}$$

ou bien

$$y^2 = z^2 - 2w_*o + o^2 \tag{5.128}$$

En calculant y^2 et z^2 à partir de l'équation de la courbe et en simplifiant on obtient l'autre équation :

$$2o - 2w_* + a + 2x = 0 \tag{5.129}$$

Mais, continue Newton, pour que $\mathsf{\Gamma M}$ soit une normale à la courbe, il faut que les points M et M' "se joignent", c'est-à-dire que PP' "s'évanouissent dans le rien"[86]. L'égalité (5.129) se transforme alors dans la suivante

$$sn._x = x + \frac{a}{2} \tag{5.130}$$

qui résout le problème.

Naturellement ce n'est pas ce simple argument, qui dérive pour l'essentiel de la méthode que Newton avait déjà mise au point dès la fin de l'été 1664, qui intéresse ce dernier. Cet argument n'est que le prétexte pour deux observations qui vont jouer le rôle de lemmes dans la preuve de l'égalité (5.79).

Ces observations sont possibles parce que Newton a finalement compris ce qu'il n'avait pas compris neuf mois plus tôt, c'est-à-dire qu'il est possible d'appliquer les suggestions de Fermat à la recherche de normales même si on ne dispose pas d'une expression de l'une de ses coordonnées en termes de l'autre, la possibilité de se référer à une équation Algébrique entière entre ces coordonnées étant suffisante[87]. En effet, comme M et M' sont deux points de la courbe, la même équation qui lie entre eux x et y, lie aussi entre eux $x + o$ et z. Avant

[85] Cf. la section 5.1.1.

[86] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [1], 273. C'est la première occasion où Newton interprète o comme un incrément évanouissant, une interprétation de laquelle il devra se réclamer plusieurs fois ensuite.

[87] La méthode de Fermat, telle qu'elle est appliquée par van Schooten à la recherche des normales, fut reformulée par Barrow à la fin de la deuxième de ses *Geometrical Lectures* [cf. Barrow (1670), 80-84], où elle est d'ailleurs appliquée à la recherche de la sous-tangente. Bien que ces *Leçons* fussent publiées plus tard, il est possible qu'elles aient été délivrées autour des années 1663-1664. C'est en particulier la conjecture de Child, qui suggère de surcroît que Newton y ait assisté [cf. Barrow (GLC), 7]. La présence de Newton à ces cours (encore qu'ils eussent effectivement lieu) est pourtant assez douteuse [cf. Newton (MP), I, **1**, Introduction, note (26), 10-11]. Newton ne suivit probablement que les leçons délivrées par Barrow après sa nomination comme *Lucasian Professor* en 1664 [cf. Barrow (1683) and Newton (MP), I, **2**, Introduction, appendix 1, 150]. S'il en est ainsi, il se peut que Newton ne sut jamais (avant la publication des *Geometrical Lectures* en 1670) que Barrow avait appliqué la méthode de *maxima* et des *minima* de Fermat à la solution

du problème de la sous-tangente, ou qu'il le sut assez tard grâce à des contacts avec Barrow lui-même. Quoiqu'il en soit, la comparaison des deux preuves proposées par Newton dans sa note du 20 mai avec l'interprétation donnée par Barrow de la méthode de Fermat montre des similarités qu'il est bon de mettre en relief. Voici donc la méthode proposée par Barrow.

En supposant que la courbe est donnée, Barrow considère deux points proches sur celle-ci, un de coordonnées génériques x et y et l'autre de coordonnées $x-e$ et $y-a$. En faisant appel à la nature de la courbe, il cherche ensuite une équation entre x, y, e et a, dans laquelle il élimine autant les puissances de e et de a supérieures à la première, que les produits de ces quantités. Ceci étant fait, l'équation résultante sera évidemment telle que tous ses termes ne contenant ni e ni a puissent être éliminés par simplification. On aura ainsi une résultante ne contenant que des termes où e et a apparaissent séparément et à la puissance première. Or, si on indique par "t" la sous-tangente, on a la proportion $a : e = y : t$. Barrow remplace alors dans cette équation a par y et e par t, et il obtient une équation de premier degré en t dont la racine fournit la sous-tangente.

Une fois que la courbe est exprimée par une équation Algébrique entière en x et y, cette démarche présente au moins deux suggestions essentielles. D'abord, elle suggère de commencer par remplacer dans l'équation entière exprimant la courbe, prise en tant que telle et avant toute explicitation, les variables x et y par leurs valeurs incrementées et d'opérer sur l'équation résultante par omission des puissances supérieures des incréments e et a pour obtenir une nouvelle équation sur laquelle opérer des nouvelles substitutions. Ceci est, pour l'essentiel, ce que fait Newton dans sa première preuve, bien qui'il écrive "z" là où Barrow écrit "$y+a$" — ce qui cache évidemment le rôle de l'incrément de l'ordonnée. En deuxième lieu, la démarche de Barrow suggère de déplacer l'attention de la sous-normale vers la sous-tangente et de s'appuyer sur la proportion $a : e = y : t$ qui lie les incréments des coordonnées avec l'ordonnée et la sous-tangente de toute courbe. Cette relation tient à la prise en compte du triangle caractéristique et permet d'exprimer y par une expression de premier degré en a, e et t, invariante sous le changement de l'angle formé par les coordonnées. Ceci est, pour l'essentiel, ce que Newton fait dans sa seconde preuve.

Voici maintenant, pour résumer la situation, comment la démarche proposée par Barrow peut conduire, à l'aide d'une notation moderne, à une formule générale pour la sous-tangente. Supposons que la proportion exprimant la courbe se transforme dans l'équation

$$F(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j,j}x^{i-j}y^{j}=0$$

On aura alors par substitution,

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j,j}(x-e)^{i-j}(y-a)^{j}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j,j}\left[\sum_{h=0}^{i-j}(-)^{h}\binom{i-j}{h}x^{i-j-h}e^{h}\right]\left[\sum_{h=0}^{j}(-)^{h}\binom{j}{h}y^{j-h}a^{h}\right]\end{aligned}$$

et donc, grâce à une première omission,

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j,j}\left[x^{i-j}-(i-j)x^{i-j-1}e\right]\left[y^{j}-jy^{j-1}a\right]=0$$

et, par simplification et grâce à une seconde omission,

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j,j}jx^{i-j}y^{j-1}a+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j,j}(i-j)x^{i-j-1}y^{j}e=0$$

d'où, en posant $a=y$ et $e=t$, on tire enfin :

$$t=-\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j,j}jx^{i-j}y^{j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j,j}(i-j)x^{i-j-1}y^{j}}=-\frac{y\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j,j}jx^{i-j}y^{j-1}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j,j}(i-j)x^{i-j-1}y^{j}}$$

de considérer les relations entre ces points et le point Γ, quel que soit ce point, on peut donc opérer dans l'équation de la courbe les substitutions $x \to x+o$ et $y \to z$. Si la courbe en question est exprimée par l'équation (5.126), on aura ainsi la nouvelle équation

$$z^2 = a(x+o) + (x+o)^2 \tag{5.131}$$

qu'on pourra comparer avec l'équation (5.128) — qui ne dépend pas de la nature particulière de la courbe considérée — pour éliminer z. Cela donne

$$y^2 + 2w_* o - o^2 = a(x+o) + (x+o)^2 \tag{5.132}$$

d'où, en simplifiant selon l'équation de la courbe, en divisant par o, et en supprimant enfin les termes affectés par le facteur o, on obtient l'égalité (5.130).

Pour comprendre les deux observations de Newton, il faut les rapporter à cette reformulation de la démarche qui conduit à cette dernière égalité. Voici ces observations[88] :

i) comme, en suivant la démarche précédente, on omet les termes affectés du facteur o après une seule division par ce même facteur, on peut éliminer d'emblée tous les termes où intervient le facteur o^2 ;

ii) en posant dans l'équation donnée $x+o$ à la place de x et z à la place de y, et en opérant conformément à l'observation (*i*), on obtient une nouvelle équation formée par tous les termes de l'équation donnée, avec z à la place de y, plus ces mêmes termes (selon cette même substitution), multipliés par o et par l'exposant de x, et divisés par x.

L'intérêt de ces remarques tient évidemment au fait qu'elles relèvent de toutes sortes d'équations Algébriques entières. Ceci est exactement ce que Newton a désormais compris. En notation moderne, leur contenu peut donc se formuler ainsi : quel que soit l'équation Algébrique entière

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}x^{i-j}y^j = 0 \tag{5.133}$$

les substitutions $x \to x+o$ et $y \to z$ opérées dans cette équation conduisent à la nouvelle équation

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}x^{i-j}z^j + \frac{o}{x}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}(i-j)x^{i-j}z^j = 0 \tag{5.134}$$

C'est sur cette équation que la preuve de Newton va désormais porter.

Cette preuve se sert de surcroît d'une notation nouvelle. Son deuxième pas consiste justement en l'introduction de cette notation. Newton observe que, quelle que soit l'équation de départ, il est toujours possible de l'ordonner selon les puissances de la seule variable y et d'indiquer les différents coefficients de ces puissances — qui ne sont à leur tour que des polynômes en x — par des lettres quelconques[89]. Les mêmes lettres, surmontées par deux points, peuvent en suite servir à indiquer ces mêmes polynômes dans lesquels chaque terme

[88]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [1], 273-274.

[89]Newton suit ici la suggestion de Descartes, qui avait employé une notation de la sorte dans le troisième livre de la *Géométrie* ; il montre de cette manière ne porter désormais son attention que sur des schémas d'équations, plutôt que sur des équations conçues comme des expressions univoques d'une courbe [cf. la note (97)] du chapitre 1, ci-dessus.

a été multiplié par l'exposant de x dans ce même terme[90]. En introduisant des indices, les équations (5.133) et (5.134) peuvent alors s'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n} \mathfrak{x}_j y^j = 0 \\ &\sum_{j=0}^{n} \mathfrak{x}_j z^j + \frac{o}{x} \sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{x}}_j \; z^j = 0 \end{aligned} \tag{5.135}$$

où on aura posé, pour tout j ($j = 0, 1, \ldots, n$),

$$\mathfrak{x}_j = \sum_{i=0}^{n-j} A_{i,j} x^i \qquad ; \qquad \ddot{\mathfrak{x}}_j = \sum_{i=0}^{n-j} i A_{i,j} x^i \tag{5.136}$$

n étant un nombre entier positif quelconque.

Après avoir introduit ces notations heureuses, Newton rédige d'abord sa preuve en raisonnant sur des schémas d'équations exprimant n'importe quelle équation de degrés 2 et 3 par rapport à y[91], et il généralise ensuite ses résultats en observant que le même argument peut être répété pour des schéma d'équations exprimant n'importe quelle équation d'un degré quelconque par rapport à y. Voici cette preuve référée d'emblée au cas général.

Grâce à l'égalité

$$\mathfrak{x}_0 = - \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{x}_j y^j \tag{5.137}$$

résultante de la première des équations (5.135), la deuxième des équations (5.135) peut être écrite sous la forme suivante

$$\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{x}_j y^j - \frac{o}{x} \sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{x}}_j \; z^j = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{x}_j z^j \tag{5.138}$$

[90] Newton emploie en particulier des lettres pointées telles que "$\ddot{a}$", "$\ddot{c}$", "$\ddot{e}$", "$\ddot{g}$", "$\ddot{m}$", "$\ddot{n}$", "$\ddot{p}$", etc. : cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [1], 274-276. Il ne faut pas confondre cette notation avec celle que Newton emploiera seulement dans le *De Methodis* pour indiquer les fluxions secondes.

[91] Cf. la note (90), ci-dessus. Newton écrit ces schémas d'équations ainsi :

$$a + cy + y^2 e = 0$$

et

$$a + cy + ey^2 + gy^3 = 0$$

En comparant cette équation avec l'équation (5.128), on obtient, par omission du terme o^2,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{X}_j y^j - \frac{o}{x}\sum_{j=0}^{n}\ddot{\mathfrak{X}}_j\ z^j \quad &= \sum_{j=1}^{n}\mathfrak{X}_j\left(y^2+2w_*o\right)^{\frac{j}{2}} \\ &= \sqrt{y^2+2w_*o}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\mathfrak{X}_{2j-1}\left(y^2+2w_*o\right)^{j-1} \\ &\quad+\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\mathfrak{X}_{2j}\left(y^2+2w_*o\right)^{j}\end{aligned}\tag{5.139}$$

et, de là, conformément au développement binomial pour de exposants entiers positifs et à l'observation (i), on tire :

$$\begin{aligned}y\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\mathfrak{X}_{2j-1}y^{2j-2} - o\left(\frac{1}{x}\sum_{j=0}^{n}\ddot{\mathfrak{X}}_j\ z^j + w_*\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}2j\mathfrak{X}_{2j}y^{2(j-1)}\right) = \\ = \sqrt{y^2+2w_*o}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\mathfrak{X}_{2j-1}\left(y^2+2w_*o\right)^{j-1}\end{aligned}\tag{5.140}$$

Or, conformément à l'observation (i), le développement d'une puissance entière d'un binôme de la forme $(A+oB)$ se réduit à ses deux premiers termes. En passant au carré, en développant le binôme $\left(y^2+2w_*o\right)^{j-1}$et en divisant enfin pour $2o$, on obtient donc :

$$\frac{y}{x}\sum_{j=0}^{n}\ddot{\mathfrak{X}}_j\ z^j + w_*j\mathfrak{X}_j y^{j-1} = 0\tag{5.141}$$

De là, en substituant désormais y à z[92], et en se rappelant que, lorsque $\mathsf{\Gamma M}=\mathsf{\Gamma M'}$, w_* n'est rien que la sous-normale, on obtient enfin sans difficulté l'égalité :

$$sn._x = -\frac{\frac{y}{x}\sum_{j=0}^{n}\ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^j}{\sum_{j=1}^{n}j\mathfrak{X}_j y^{j-1}} = -y\frac{\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j}iA_{i,j}x^{i-1}y^j}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-j}jA_{i,j}x^iy^{j-1}}\tag{5.142}$$

qui est parfaitement équivalente à l'égalité (5.79).

Ayant donné sa preuve[93], Newton peut énoncer son théorème essentiellement dans les

[92] Qu'on observe que conformément à l'observation (i) la substitution de$\sqrt{y^2+2w_*o}$ à z dans les termes où apparaît le facteur o est équivalente à la substitution de z avec y. Newton ne fait donc que renvoyer cette substitution, qu'il aurait pu opérer dès le début, jusqu'à la dernière étape de sa preuve.

[93] La preuve de Newton aurait pu être remarquablement simplifiée si, au lieu de passer au carré pour éliminer la racine contenue dans l'équation (5.140), celui-ci avait eu recours au développement de cette racine en appliquant l'égalité (4.78), à laquelle il était parvenu quelques mois auparavant. Le fait que Newton ne voit pas cette possibilité confirme le jugement que j'ai donné dans la section 4.3.2 [cf. p. 204] : loin de voir dans cette égalité un résultat général — ou a *fortiori* un cas particulier du développement du binôme pour un exposant rationnel quelconque —, il n'y voit pour l'instant qu'un outil localement utile.

mêmes termes qu'il l'avait fait quelques mois auparavant[94], tout en observant explicitement que ce théorème ne vaut que si les coordonnées de la courbe sont orthogonales.

La seconde preuve

Après avoir présenté quelques exemples de son théorème, Newton écrit[95] :

> The Perpendiculars to crooked lines & also the Theorems for finding them may otherwise more conveniently be found thus.

Et il fait suivre sa deuxième preuve[96], où il n'est d'ailleurs explicitement question que de la sous-normale.

Il ne dit pas explicitement dans quel sens cette nouvelle preuve lui parait "plus convenable". Sans doute est-elle algorithmiquement plus simple, mais elle est aussi plus générale, car elle porte sur des courbes référées à un système de coordonnées cartésiennes quelconques. Newton remarque explicitement, à trois reprises, ce dernier point, mais il ne le fait qu'après avoir présenté une preuve préliminaire, portant sur l'ellipse exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par l'équation $ay^2 + bx^2 - bx = 0$, et après avoir généralisé cette preuve au cas d'une courbe exprimée, par rapport à un système de coordonnées de la même sorte, par n'importe quelle équation entière de deuxième degré en y[97]. Au cours de cette entrée en matière, Newton trouve autant la sous-tangente que la sous-normale des courbes en question et n'observe pas que la restriction au cas de coordonnées orthogonales concerne seulement la sous-normale. Ensuite, il se réfère explicitement à des courbes référées à un système de coordonnées cartésiennes quelconques, et il ne raisonne plus que sur la sous-tangente. Il semble donc naturel de penser que Newton juge sa preuve "plus convenable" grâce à sa facilité algorithmique. C'est d'ailleurs à cette facilité qu'il semble se référer lorsqu'il observe[98] :

> Note that the found$\overline{\text{acon}}$ of this oper$\overline{\text{acon}}$ & of that by which Florimond de Beaune (in his notes on Cartes pag 131) found tangents are almost the same.

Le "fondement" que la méthode de Newton partage avec celle de Florimond consiste en la considération d'un triangle auxiliaire dont deux côtés sont entre eux dans le même rapport de la sous-tangente et de l'ordonnée. Newton avait déjà implicitement considéré un triangle de la sorte dans le court argument qu'il avait employé pour justifier les quadratures qu'il avait obtenues à la fin de l'été 1664[99], mais il n'avait pas encore identifié ce triangle au le triangle caractéristique formé par la tangente et les deux incréments infiniment petits des coordonnées de la courbe. C'est exactement dans cette identification que réside la nouveauté essentielle de sa preuve, une nouveauté qui marque un pas décisif dans les développements de ses (recherches)[100].

[94] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [1], 276 et la section (5.2).
[95] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [1], 278.
[96] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [1], 278-280.
[97] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [1], 278-279.
[98] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [1], 280.
[99] Cf. la section 5.1.2, en particulier p. 242.
[100] Whiteside ne semble malheureusement pas voir cette nouveauté essentielle, lorsqu'il suggère que les deux preuves de Newton sont dans le fond analogues [cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, notes (30), 279 et (32), 280-281].

En supposant d'emblée (fig. 10)[101] que le point T pris sur l'axe AH, auquel est rapportée la courbe AML, est le pied de la tangente à cette courbe au point M, et que RR' est un incrément "infiniment petit"[102], de sorte que le point M' peut être considéré en même temps comme appartenant à la courbe et à sa tangente[103], Newton observe d'abord que la similarité des triangles MRT et $\mathsf{M'IM}$ permet d'écrire la proportion

$$stg._x : y = o : z - y \tag{5.143}$$

où on aura posé évidemment $\mathsf{AR} = x$, $\mathsf{RM} = y$ et $\mathsf{R'M'} = z$.

À partir de cette proportion et de l'égalité

$$z = y + \frac{o}{stg._x} y \tag{5.144}$$

qui en dérive, la preuve de Newton devient très simple, et celui-ci peut se limiter à en fournir l'esquisse. Voici une reconstruction de cette preuve, référée à une courbe exprimée par l'équation entière (5.133). Grâce à l'égalité (5.144), l'équation (5.138) se transforme dans la suivante :

$$\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{X}_j y^j - \frac{o}{x} \sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j \, z^j - \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{X}_j \left(y + \frac{o}{stg._x} y \right)^j = 0 \tag{5.145}$$

De là, il suffit d'appliquer le développement binomial pour des exposants naturels quelconques en se rappelant de l'observation (i), de simplifier et de diviser enfin par o pour obtenir

$$\frac{1}{x} \sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j \, z^j + \frac{1}{stg._x} \sum_{j=1}^{n} j \mathfrak{X}_j y^j = 0 \tag{5.146}$$

[101]Newton dessine en vérité la courbe comme référée à des coordonnées orthogonales, autant lors de sa preuve préliminaire, référée à l'ellipse d'équation $ay^2 + bx^2 - bx = 0$, que lors de sa preuve générale : cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [1], 278 et 279.

[102]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [1], 278.

[103]Newton ne remarque pas encore ceci explicitement, bien que son argument relève essentiellement de cette ambiguïté qui va devenir classique. Il sera plus explicite dans la note du 21 mai : cf. la note (113), ci-dessous.

d'où, en remplaçant z par y[104], on tire sans autres difficultés[105] :

$$\begin{aligned} stg._x &= -\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} j\mathfrak{X}_j y^j}{\frac{1}{x}\sum\limits_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j\, y^j} = -\frac{y\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j} jA_{i,j}x^i y^{j-1}}{\sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j} iA_{i,j}x^{i-1}y^j} \\ &= -\frac{y\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{i} jA_{i-j,j}x^{i-j}y^{j-1}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{i}(i-j)A_{i-j,j}x^{i-j-1}y^j} \end{aligned} \tag{5.147}$$

Avant de quitter la note du 20 mai, une dernière remarque est nécessaire. Bien que Newton ait finalement vu, lors de cette note, la possibilité d'identifier le rapport entre la sous-tangente et l'ordonnée avec le rapport entre les incréments infiniment petits des coordonnées de la courbe considérée, il n'est pas encore parvenu à assigner à ce rapport le rôle d'un invariant fondamental constituant le véritable objet inconnu sur lequel porte le problème des tangentes et des normales. Il est symptomatique que de la proportion (5.143), il ne tire pas l'égalité

$$y = stg._x \frac{z-y}{o} \tag{5.148}$$

en cherchant ensuite à déterminer le rapport $\frac{z-y}{o}$, comme l'avait fait Florimond[106], mais qu'il en tire plutôt l'égalité (5.144) et il cherche à déterminer directement la sous-tangente.

---

[104] Cf. la note (92) ci-dessus : conformément à l'observation (i) la substitution de z avec $y + \frac{o}{stg._x}y$ dans les termes où apparaît le facteur o est équivalente à la substitution de z avec $\sqrt{y^2 + 2w_* o}$.

[105] En obéissant au souci d'une généralité non essentielle, Newton observe [cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [1], 280 et note (34), 281] que, “since an equation is the same when multiplied by soe many units as the unknowne quantity hath dimensions, that it would bee if multiplied by any other Arithmetical progression”, le même théorème pourrait être “mieux énoncé” en prescrivant de multiplier chaque terme du polynôme $F(x, y)$ entrant dans l'équation de la courbe non pas par les exposants de y et de x, mais par les termes successifs d'une progression arithmétique quelconque (qui doit évidement être, même si Newton ne le spécifie pas, de raison égale dans les deux cas). En effet, quel que soient a, b et η, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j}(a+j\eta)\,A_{i,j}x^i y^{j-1}}{\sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j}(b+i\eta)\,A_{i,j}x^{i-1}y^j} &= \frac{\frac{a}{y}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j} A_{i,j}x^i y^j + \eta\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j} jA_{i,j}x^i y^{j-1}}{\frac{b}{x}\sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j} A_{i,j}x^i y^j + \eta\sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j} iA_{i,j}x^{i-1}y^j} \\ &= \frac{0+\eta\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j} jA_{i,j}x^i y^{j-1}}{0+\eta\sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j} iA_{i,j}x^{i-1}z^j} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j} jA_{i,j}x^i y^{j-1}}{\sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j} iA_{i,j}x^{i-1}z^j} \end{aligned}$$

[106] Cf. l'égalité (3.35) et les conséquences qui en suivent.

5.5.2 21 mai : l'algorithme du centre de courbure

On pourrait penser que celle-ci n'est au fond qu'une remarque extrinsèque, qui concerne tout au plus l'attitude psychologique de Newton. En comparant la proportion (5.143) et l'égalité (5.147), celui-ci aurait pu aisément déduire l'égalité

$$\begin{aligned}\frac{z-y}{o} &= -\frac{y\sum\limits_{j=0}^{n}\ddot{\mathfrak{X}}_j\, y^j}{x\sum\limits_{j=1}^{n} j\mathfrak{X}_j y^j} = -\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j} iA_{i,j}x^{i-1}y^j}{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j} jA_{i,j}x^i y^{j-1}} \\ &= -\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{i}(i-j)A_{i-j,j}x^{i-j-1}y^j}{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{i} jA_{i-j,j}x^{i-j}y^{j-1}}\end{aligned} \tag{5.149}$$

On pourrait donc penser que s'il ne l'a pas fait c'est qu'il ne visait, dans la note du 20 mai, que la détermination de la sous-tangente et/ou de la sous-normale. Pourtant, il suffit de passer à la considération de la note du 21 mai pour se rendre compte que l'absence d'une égalité telle que (5.149) n'est pas le simple effet d'une visée adressée à la détermination de la sous-tangente et/ou de la sous-normale. Dans cette dernière note, Newton démontre trois égalités qui fournissent respectivement les coordonnées du centre de courbure et le rayon de courbure d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales et exprimée par une équation Algébrique entière.

* * *

Pour faire ceci, il aurait pu observer que le rapport $\frac{z-y}{o}$ n'est que le rapport des incréments des coordonnées de la courbe évalué au point M d'abscisse $\mathsf{PM} = x$. En indiquant par "e" l'incrément de l'ordonnée correspondant à l'incrément o de l'abscisse, il aurait alors pu poser $\frac{z-y}{o} = \left[\frac{e}{o}\right]_x$ et obtenir, en exploitant les relations géométriques qui lient la sous-normale et la sous-tangente lorsque les coordonnées sont orthogonales, les égalités :

$$\frac{sn_x}{y} = \frac{z-y}{o} = \left[\frac{e}{o}\right]_x \qquad ; \qquad \frac{sn_{x+o}}{z} = \left[\frac{e}{o}\right]_{x+o} \tag{5.150}$$

Or, comme en posant dans l'égalité (5.97) $y_{x+o} = z = y + (z - y)$, on obtient

$$(y - y_C)\,\frac{\frac{sn._x}{y} - \frac{sn._{x+o}}{z}}{o} - 1 = \frac{z-y}{o}\,\frac{sn._{x+o}}{z} \tag{5.151}$$

de là, il aurait pu tirer

$$y - y_C = -\frac{1 + \left[\frac{e}{o}\right]_x \left[\frac{e}{o}\right]_{x+o}}{\frac{\left[\frac{e}{o}\right]_{x+o} - \left[\frac{e}{o}\right]_x}{o}} \tag{5.152}$$

et donc, d'après la première des égalités (5.95) :

$$R_{x,C} = -\frac{1 + \left[\frac{e}{o}\right]_x \left[\frac{e}{o}\right]_{x+o}}{\frac{\left[\frac{e}{o}\right]_{x+o} - \left[\frac{e}{o}\right]_x}{o}}\sqrt{1 + \left[\frac{e}{o}\right]_x^2} \tag{5.153}$$

Par le biais de ces égalités, il aurait pu réduire le problème de la détermination du centre de courbure au problème de la recherche des relations, autant géométriques qu'algorithmiques, entre le rapport $\left[\frac{e}{o}\right]_x$ et le produit $\left[\frac{e}{o}\right]_x \left[\frac{e}{o}\right]_{x+o}$, d'une part, et le rapport $\frac{\left[\frac{e}{o}\right]_{x+o} - \left[\frac{e}{o}\right]_x}{o}$ d'autre part.

Or, o étant un incrément constant, les rapports $\left[\frac{e}{o}\right]_x$ et $\left[\frac{e}{o}\right]_{x+o}$ ne diffèrent que par la valeur de e, de sorte qu'on a

$$\left[\frac{e}{o}\right]_x = \frac{[e]_x}{o} \qquad ; \qquad \left[\frac{e}{o}\right]_{x+o} = \frac{[e]_{x+o}}{o} \tag{5.154}$$

et donc

$$\left[\frac{e}{o}\right]_x \left[\frac{e}{o}\right]_{x+o} = \frac{[e]_x [e]_{x+o}}{o^2} \qquad ; \qquad \frac{\left[\frac{e}{o}\right]_{x+o} - \left[\frac{e}{o}\right]_x}{o} = \frac{[e]_{x+o} - [e]_x}{o^2} \tag{5.155}$$

Et, comme o est aussi un incrément infiniment petit, il s'ensuit que

$$\frac{[e]_x [e]_{x+o}}{o^2} = \left(\frac{[e]_x}{o}\right)^2 \tag{5.156}$$

et donc

$$R_{x,C} = -\frac{\left[1 + \left(\frac{[e]_x}{o}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{[e]_{x+o} - [e]_x}{o^2}} \tag{5.157}$$

qui, à la notation près, correspond à l'égalité différentielle connue.

Une fois que cette égalité eût été démontrée, il aurait suffit de chercher un algorithme propre à calculer, pour n'importe quelle courbe exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par une équation Algébrique, les rapports $\frac{[e]_x}{o}$ et $\frac{[e]_x - [e]_{x+o}}{o^2}$, pour obtenir une expression du rayon de courbure de cette courbe.

Newton n'emprunte pas ce parcours, qui, pour l'essentiel, sera en revanche suivi par Jean Bernoulli et par tous les autres mathématiciens appliquant le calcul différentiel[107]. En suivant un parcours assez proche de celui qu'il avait déjà suivi dans les notes du mois de février, il cherche les relations géométriques qui lient les coordonnées du centre de courbure et le rayon de courbure aux sous-normales $sn._x$ et $sn._{x+o}$; il exprime ces relations par des égalités convenables qu'il compare avec l'égalité (5.142) ; et il cherche à retrouver des invariants algorithmiques qui lient ces égalités à l'équation de la courbe.

* * *

Encore une fois, l'argument de Newton s'articule en deux volets : d'abord celui-ci considère des exemples particuliers qui suggèrent un parcours déductif et une notation convenable ; ensuite, il exploite cette notation pour généraliser sa preuve. Le premier volet est pourtant maintenant beaucoup moins linéaire que dans la note du 20 mai.

[107] Cf. par exemple l'Hôpital (1696), Sect. V, prop. I, 74-76.

Newton considère d'abord[108] le cas simple donné par la parabole exprimée par l'équation $x^2 - ay = 0$. Il revient à l'égalité (5.97), d'où en posant, comme ci-dessus, $y_{x+o} = z$ et en calculant

$$sn._x = \frac{2xy}{a} \qquad ; \qquad sn_{x+o} = \frac{2xz + 2oz}{a} \tag{5.158}$$

il tire l'équation :

$$2xy - ao = 2xz + 2oz - 2oy_C \tag{5.159}$$

De là, en observant que (les coordonnées étant orthogonales) l'on peut poser

$$z = y + \frac{o}{y} sn._x \tag{5.160}$$

il tire

$$2y_C - a = \frac{4x^2}{a} + 2z \tag{5.161}$$

et donc, en posant finalement y à la place de z :

$$y_C = \frac{a}{2} + \frac{2x^2}{a} + y \tag{5.162}$$

qui résout le problème.

Cet exemple fort simple suggère un premier argument fondé sur les égalités (5.97), (5.160) et (5.142) qu'on peut chercher à généraliser.

Pour montrer cet argument à l'œuvre sur un exemple un peu plus général[109], fourni par une courbe générique exprimée par une équation quelconque de premier degré en y, $p + qy = 0$, Newton remarque qu'en accord avec l'observation (ii) et avec l'égalité (5.142) on a, dans ce cas :

$$sn._{x+o} = -\frac{\ddot{p}\ xz + \ddot{q}\ xz^2 + \dot{\ddot{p}}\ zo + \dot{\ddot{q}}\ z^2 o}{qx^2 + \ddot{q}\ xo} \tag{5.163}$$

où les symboles "$\dot{\ddot{p}}$" et "$\dot{\ddot{q}}$" dénotent[110] respectivement les polynômes $\ddot{p}$ et $\ddot{q}$ dans lesquels chaque terme a été multiplié par l'exposant de x et par son prédécesseur. Si on pose

$$p = \sum_{i=0}^{n} A_{i,0} x^i \qquad ; \qquad q = \sum_{i=0}^{n-1} A_{i,1} x^i \tag{5.164}$$

on aura ainsi, dans notre notation :

$$\dot{\ddot{p}} = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) A_{i,0} x^i \qquad ; \qquad \dot{\ddot{q}} = \sum_{i=2}^{n-1} i(i-1) A_{i,1} x^i \tag{5.165}$$

Après avoir introduit cette notation, Newton remplace dans l'égalité (5.97) sn_x et sn_{x+o} par leurs expressions respectives données par les égalités (5.142) et (5.163), et opère comme

[108] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [2], 280-281.
[109] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [2], 282-283.
[110] Cette notation est de Newton : cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, 282-288. Encore une fois, on ne doit pas la confondre avec celle que Newton utilisera dans le *De Methodis* pour indiquer les fluxions troisièmes.

ci-dessus, conformément à l'observation (i), en substituant $y + \frac{o}{y} sn._x$ à z, pour obtenir enfin :

$$y_C = \frac{\left(\ddot{p} + \ddot{q}\, y\right)\left(\ddot{p} + 3\,\ddot{q}\, y\right) - qy\left(\dot{\ddot{p}} + \dot{\ddot{q}}\, y\right) + q^2x^2}{2\,\ddot{q}\left(\ddot{p} + \ddot{q}\, y\right) - q\left(\dot{\ddot{p}} + \dot{\ddot{q}}\, y\right)} \tag{5.166}$$

ou bien :

$$y - y_C = -\frac{\left(\ddot{p} + \ddot{q}\, y\right)^2 + q^2x^2}{2\,\ddot{q}\left(\ddot{p} + \ddot{q}\, y\right) - q\left(\dot{\ddot{p}} + \dot{\ddot{q}}\, y\right)} \tag{5.167}$$

qui résout le problème.

Cette procédure peut naturellement être appliquée à n'importe quelle courbe exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par une équation entière quelconque, $\sum_{j=0}^{n} \mathfrak{X}_j y^j = 0$, en observant qu'conformément à l'observation (ii) on a

$$\begin{aligned} sn._{x+o} &= -\frac{\frac{z}{x}\sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j\, z^j + \frac{oz}{x^2}\sum_{j=0}^{n} \dot{\ddot{\mathfrak{X}}}_j\, z^j}{\sum_{j=1}^{n} j\mathfrak{X}_j z^{j-1} + \frac{o}{x}\sum_{j=1}^{n} j\,\ddot{\mathfrak{X}}_j\, z^{j-1}} \\ &= -\frac{xz\sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j\, z^j + oz\sum_{j=0}^{n} \dot{\ddot{\mathfrak{X}}}_j\, z^j}{x^2\sum_{j=0}^{n} j\mathfrak{X}_j z^{j-1} + ox\sum_{j=0}^{n} j\,\ddot{\mathfrak{X}}_j\, z^{j-1}} \end{aligned} \tag{5.168}$$

où on aura posé, quelque soit j,

$$\dot{\ddot{\mathfrak{X}}}_j = \sum_{i=0}^{n-j} i(i-1)A_{i,j}x^i \tag{5.169}$$

Il est pourtant aisé de se rendre compte que de cette manière on obtient très vite des équations assez compliquées dont il est difficile, sans disposer d'une notation employant des indices, de reconnaître la forme générale. C'est sans doute la raison qui poussa Newton à chercher une procédure algorithmiquement plus simple. Sans modifier la structure de son argument, il ne fait que remplacer l'égalité (5.97) par une nouvelle égalité, choisie de façon à rendre plus aisés les calculs qui conduisent — par substitutions, simplifications et omissions successives — de cette égalité jusqu'à l'expression des coordonnées du centre de courbure et du rayon de courbure. Pour obtenir cette nouvelle égalité, il compare[111] la première des proportions (5.82) avec la proportion (5.96) et élimine $x_C - x$ entre ces proportions (plutôt que $x_C - (x + o)$, comme il avait fait dans la première des deux notes de décembre 1664,

[111] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [2], 283-285.

pour obtenir l'égalité (5.97)[112]), en posant $y_{x+o} = z$ et $z - y_C = (y - y_C) + \frac{o}{y} sn._x$[113]. Il obtient ainsi l'égalité[114]

$$zsn._x - ysn._{x+o} = \frac{sn._{x+o}sn._x + yz}{y - y_C} o \tag{5.170}$$

qui va désormais prendre la place de l'égalité (5.97) comme point de départ de la procédure algorithmique.

Cette procédure obéit naturellement aux mêmes principes que Newton avait suivi dans la note du 20 mai et qui l'avaient conduit, dans la première partie de la note du 21 mai, à la détermination de l'égalité (5.167). Celui-ci l'applique successivement[115] à des courbes d'équation $p + qy^m = 0$ ($m = 1, 2, 3, 4$), où p et q sont, comme ci-dessus, des polynômes quelconques en x. Pour justifier la généralité de sa méthode, il répète enfin les mêmes calculs par rapport à la cubique d'équation $x^3 + axy + y^3 = 0$[116]. En employant une notation se servant d'indices, cette procédure peut être présentée en général comme suit.

En remplaçant dans le premier membre de l'égalité (5.170) $sn._x$ et $sn._{x+o}$ par leurs expressions données respectivement par les égalités (5.142) et (5.170), on obtient d'abord

$$\left.\begin{array}{l} \left(\sum_{j=1}^{n} j\mathfrak{X}_j y^{j-1}\right)\left(x\sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j\ z^j + o\sum_{j=0}^{n} \dddot{\mathfrak{X}}_j\ z^j\right) \\ -\left(x\sum_{j=0}^{n} j\mathfrak{X}_j z^{j-1} + o\sum_{j=0}^{n} j\ \ddot{\mathfrak{X}}_j\ z^{j-1}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^j\right) \end{array}\right\} = \\ = xo\frac{sn._{x+o}sn._x + yz}{(y - y_C)\,zy}\left(\begin{array}{c} x\sum_{j=0}^{n} j\mathfrak{X}_j z^{j-1} \\ +o\sum_{j=0}^{n} j\ \ddot{\mathfrak{X}}_j\ z^{j-1} \end{array}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\mathfrak{X}_j y^{j-1}\right) \tag{5.171}$$

[112]Cf. la section 5.3.2, p. 253.

[113]On note qu'une telle égalité dépend de la supposition que le point M′ appartienne en même temps à la courbe et à sa tangente au point M, ce que Newton justifie désormais en observant que la différence entre les ordonnées de la courbe et de cette tangente au point d'abscisse $x + o$ est proportionnelle à o^2, de sorte qu'elle "s'évanouit" lorsque o est infiniment petit" [cf. Newton (MP), I, 2, 4, § 3, [2], 284-285]. Cette supposition intervient donc désormais non seulement dans la procédure algorithmique, mais aussi dans la détermination de la relation géométrique qui fournit le point de départ de cette procédure.

[114]En se référant à une figure qui représente une courbe concave et croissante dans le quadrant des coordonnées positives, Newton suppose que y_C est plus grand que y, il pose $c = y_C - y$, et il écrit "c", là où j'écris "$y - y_C$" [cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [2], 284-285]. Les égalités qui suivent diffèrent donc de celles effectivement écrites par Newton par le signe de $y - y_C$.

[115]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [2], 285-288.

[116]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [2], 288-289.

d'où en replaçant z par $y + \frac{o}{y} sn._x$ dans les termes qui ne sont pas affectés par le facteur o, en simplifiant conformément à l'observation (i), et en divisant par o, il est facile d'obtenir :

$$\left.\begin{array}{l} x\dfrac{sn._x}{y}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j\mathfrak{X}_j y^{j-1}\right)\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j\ \ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^{j-1}\right) \\ +\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j\mathfrak{X}_j y^{j-1}\right)\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \dot{\ddot{\mathfrak{X}}}_j\ z^{j}\right) \\ -x\dfrac{sn._x}{y}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^{j}\right)\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j(j-1)\mathfrak{X}_j y^{j-2}\right) \\ -\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^{j}\right)\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j\ \ddot{\mathfrak{X}}_j\ z^{j-1}\right) \end{array}\right\} = \\ = x\frac{sn._{x+o} sn._x + yz}{(y-y_C)\, zy}\left(\begin{array}{c} x\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j\mathfrak{X}_j z^{j-1} \\ +o\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j\ \ddot{\mathfrak{X}}_j\ z^{j-1}\end{array}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\mathfrak{X}_j y^{j-1}\right) \tag{5.172}$$

D'ici, en négligeant les termes où apparaît o et en posant donc y à la place de z et $sn._x$ à la place de $sn._{x+o}$[117] et en remplaçant enfin $sn._x$ par son expression donnée par l'égalité (5.142), on obtient enfin :

$$y - y_C = \frac{\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j\mathfrak{X}_j y^{j-1}\right)\left[\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^{j}\right)^2 + x^2\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j\mathfrak{X}_j y^{j-1}\right)^2\right]}{\left[\begin{array}{c} \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \dot{\ddot{\mathfrak{X}}}_j\ y^{j}\right)\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j\mathfrak{X}_j y^{j-1}\right)^2 \\ -2\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^{j}\right)\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j\ \ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^{j-1}\right)\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j\mathfrak{X}_j y^{j-1}\right) \\ +\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^{j}\right)^2\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j(j-1)\mathfrak{X}_j y^{j-2}\right)\end{array}\right]} \tag{5.173}$$

[117]On note que la substitution de sn_{x+o} avec $sn._x$ à ce stade de la procédure équivaut d'un point de vue algorithmique à la supposition de l'égalité (5.156).

Il est facile de vérifier que si l'équation de départ est de la forme $p + qy^m = 0$, l'égalité (5.173) se transforme en la suivante :

$$y - y_C = y \frac{\left(\ddot{p} + \ddot{q}\, y^m\right)^2 + x^2 \left(mqy^{m-1}\right)^2}{mq \left(\dot{\ddot{p}} + \dot{\ddot{q}}\, y^m\right) y^m - 2m\, \ddot{q} \left(\ddot{p} + \ddot{q}\, y^m\right) y^m + (m-1) \left(\ddot{p} + \ddot{q}\, y^m\right)^2} \tag{5.174}$$

qui, pour $m = 1, 2, 3, 4$ correspond aux quatre égalités obtenues par Newton pour les courbes d'équation $p+qy^m = 0$[118]. De là, ce dernier n'a ensuite aucune difficulté à tirer quatre autres égalités fournissant la différence $x_C - x$ en termes des polynômes p et q. Après avoir obtenu ces huit égalités, il écrit[119] :

> But were both the unknowne quantitys of divers dimensions the valors of c & d [c'est-à-dire, respectivement $y_C - y$[120] et $x_C - x$] might bee found after the same manner.

Pour justifier cette déclaration, Newton se limite à donner l'exemple de la cubique d'équation $x^3 - axy + y^3 = 0$, mais, au lieu de ses nouvelles notations, il remplace d'emblée $sn._x$ et $sn._{x+o}$ par les expressions que ces variables prennent dans ce cas particulier, ce qui cache à jamais la forme générale des égalités qu'il obtient. Cela n'empêche que Newton ait trouvé la manière de raisonner en général, car à la suite de ce dernier exemple, il introduit de nouvelles notations et il les emploie aussitôt pour écrire trois égalités parfaitement générales, fournissant respectivement les coordonnées du centre de courbure et le rayon de courbure d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales et exprimée, par rapport à ce système, par n'importe quelle équation entière[121].

D'abord Newton indique par le symbole "$\mathcal{X}$" le polynôme en x et y qui constitue le premier membre de n'importe quelle équation entière $F(x, y) = 0$. Si par symétrie par rapport à la première des égalités (5.136) on pose, pour tout i ($i = 0, 1, \ldots, n$),

$$\mathfrak{Y}_i = \sum_{j=0}^{n-i} A_{i,j} y^j \tag{5.175}$$

on en tire, dans notre notation

$$\mathcal{X} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j} x^{i-j} y^j = \sum_{i=0}^{n} \mathfrak{Y}_i x^i = \sum_{j=0}^{n} \mathfrak{X}_j y^j \tag{5.176}$$

Ensuite, Newton indique :

— par le symbole "$\bullet\mathcal{X}$" le polynôme $\mathcal{X}$, où les coefficients de chaque puissance x^i ($i = 0, 1, \ldots n$) de x ont été multipliés par le terme τ_i d'une succession arithmétique quelconque $\{\tau_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$;

[118] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, notes : (50), 285 ; (56) et (58), 286 ; et (60), 287 ; et la note (114), ci-dessus.

[119] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, 1 3 [2], 288.
[120] Cf. la note (114), ci-dessus.
[121] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [2], 289-290.

— par le symbole "$\mathcal{X}_{\bullet}$" le polynôme $\mathcal{X}$, où les coefficients de chaque puissance y^j $(j = 0, 1, \ldots n)$ de y ont été multipliés par le terme θ_j d'une succession arithmétique quelconque $\{\theta_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, de raison égale [122] à $\{\tau_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$;

— par le symbole "${}_{\because}\mathcal{X}$" le polynôme ${}_{\bullet}\mathcal{X}$, où les coefficients de chaque puissance x^i $(i = 0, 1, \ldots n)$ de x ont été multipliés par le terme τ_{i-1} de la succession arithmétique $\{\tau_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$;

— par le symbole "$\mathcal{X}_{\because}$" le polynôme $\mathcal{X}_{\bullet}$, où les coefficients de chaque puissance y^j $(j = 0, 1, \ldots n)$ de y ont été multipliés par le terme θ_{j-1} de la succession arithmétique[123] $\{\theta_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$;

— par le symbole "${}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet}$" le polynôme ${}_{\bullet}\mathcal{X}$, où les coefficients de chaque puissance y^j $(j = 0, 1, \ldots n)$ de y ont été multipliés par le terme θ_j de la succession arithmétique $\{\theta_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, ou — ce qui revient au même — le polynôme $\mathcal{X}_{\bullet}$, où les coefficients de chaque puissance x^i $(i = 0, 1, \ldots n)$ de x ont été multipliés par le terme τ_i de la succession arithmétique[124] $\{\tau_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$.

[122] Pour cette spécification essentielle, cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [2], 294 and note (75), 290.

[123] Pour ce qui est des symboles "${}_{\because}\mathcal{X}$" et "$\mathcal{X}_{\because}$", Newton prescrit en vérité que les coefficients, respectivement de x^i dans ${}_{\bullet}\mathcal{X}$ et de y^i dans $\mathcal{X}_{\bullet}$ soient multipliés par les termes des deux progressions arithmétiques quelconques [cf. la note (122), ci-dessus] "dont une est plus grande que l'autre par un terme" [cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [2], 290]. Pour obtenir les polynômes ${}_{\because}\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}_{\because}$, on pourra donc multiplier respectivement ces coefficients par τ_{i+1} et θ_{i+1}, au lieu que par τ_{i-1} et θ_{i-1}.

[124] Pour obtenir le polynôme ${}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet}$, Newton prescrit en vérité de multiplier les coefficients des puissances x^i de $\mathcal{X}$ pour "la plus grande des successions qui multipliaient ${}_{\because}\mathcal{X}$" et ensuite les coefficients des puissances y^j pour "la plus grande des successions qui multipliaient $\mathcal{X}_{\because}$" [cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [2], 290]. Si dans les polynômes ${}_{\because}\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}_{\because}$ les coefficients respectivement de x^i et y^j sont multipliés par τ_i et τ_{i+1} et par θ_i et θ_{i+1}, pour obtenir ${}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet}$ il faut multiplier les coefficients des puissances x^i de $\mathcal{X}$ pour τ_{i+1} et ensuite les coefficients des puissances y^j pour θ_{i+1} [cf. la note (123), ci-dessus]. Il ne sera pas difficile de vérifier que les argument suivants peuvent être aisément adaptés, en conduisant aux mêmes conclusions, dans le cas où on adopte cette dernière convention.

Dans notre notation, ces conventions fournissent respectivement les égalités :

$$
\begin{aligned}
{}_{\bullet}\mathcal{X} &= \sum_{i=0}^{n} \tau_i \left[\sum_{j=0}^{n-i} A_{i,j} y^j \right] x^i = \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{i=0}^{n-j} A_{i,j} \tau_i x^i \right] y^j = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j} \tau_{i-j} x^{i-j} y^j \\
\mathcal{X}_{\bullet} &= \sum_{j=0}^{n} \theta_j \left[\sum_{i=0}^{n-j} A_{i,j} x^i \right] y^j = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n-i} A_{i,j} \theta_j y^j \right] x^i = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j} \theta_j x^{i-j} y^j \\
{}_{\therefore}\mathcal{X} &= \sum_{i=0}^{n} \tau_{i-1} \tau_i \left[\sum_{j=0}^{n-i} A_{i,j} y^j \right] x^i = \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{i=0}^{n-j} A_{i,j} \tau_{i-1} \tau_i x^i \right] y^j = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j} \tau_{i-j-1} \tau_{i-j} x^{i-j} y^j \\
\mathcal{X}_{\therefore} &= \sum_{j=0}^{n} \theta_{j-1} \theta_j \left[\sum_{i=0}^{n-j} A_{i,j} x^i \right] y^j = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n-i} A_{i,j} \theta_{j-1} \theta_j y^j \right] x^i = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j} \theta_{j-1} \theta_j x^{i-j} y^j \\
{}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet} &= \sum_{i=0}^{n} \tau_i \left[\sum_{j=0}^{n-i} A_{i,j} \theta_j y^j \right] x^i = \sum_{j=0}^{n} \theta_j \left[\sum_{i=0}^{n-j} A_{i,j} \tau_i x^i \right] y^j = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j} \tau_{i-j} \theta_j x^{i-j} y^j
\end{aligned}
\tag{5.177}
$$

Si on prend $\{\tau_i\}_{i=-\infty}^{\infty} = \{\theta_j\}_{j=-\infty}^{\infty} = i = j$, et on pose aussi, par symétrie avec la deuxième des égalités (5.136) et avec l'égalité (5.169),

$$
\ddot{\mathfrak{Y}}_i = \sum_{j=0}^{n-i} j A_{i,j} y^j \qquad ; \qquad \overset{\therefore}{\mathfrak{Y}}_i = \sum_{i=0}^{n-i} j(j-1) A_{i,j} y^j \tag{5.178}
$$

on en tire ainsi :

$$
\begin{aligned}
{}_{\bullet}\mathcal{X} &= \sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{n-j} iA_{i,j}x^i\right]y^j = \sum_{j=0}^{n}\ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^j \\
\mathcal{X}_{\bullet} &= \sum_{j=0}^{n} j\left[\sum_{i=0}^{n-j} A_{i,j}x^i\right]y^j = \sum_{j=0}^{n} j\mathfrak{X}_j y^j \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{n-i} jA_{i,j}y^j\right]x^i = \sum_{i=0}^{n}\ddot{\mathfrak{Y}}_i\ x^i \\
{}_{\therefore}\mathcal{X} &= \sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{n-j} i(i-1)A_{i,j}x^i\right]y^j = \sum_{j=0}^{n}\dddot{\mathfrak{X}}_j\ y^j \\
\mathcal{X}_{\therefore} &= \sum_{j=0}^{n} j(j-1)\left[\sum_{i=0}^{n-j} A_{i,j}x^i\right]y^j = \sum_{j=0}^{n} j(j-1)\mathfrak{X}_j y^j \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{n-i} j(j-1)A_{i,j}y^j\right]x^i = \sum_{i=0}^{n}\ddot{\mathfrak{Y}}_i\ x^i \\
{}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet} &= \sum_{j=0}^{n} j\left[\sum_{i=0}^{n-j} iA_{i,j}x^i\right]y^j = \sum_{i=0}^{n} i\left[\sum_{j=0}^{n-i} jA_{i,j}y^j\right]x^i \\
&= \sum_{j=0}^{n} j\ \ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^j = \sum_{i=0}^{n} i\ \ddot{\mathfrak{Y}}_i\ x^i
\end{aligned}
\tag{5.179}
$$

et il est donc aisé de vérifier que l'égalité (5.173) n'est qu'un cas particulier, donné justement par la position $\{\tau_i\}_{i=-\infty}^{\infty} = \{\theta_j\}_{j=-\infty}^{\infty} = i = j$, de l'égalité

$$
y - y_C = \frac{\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)\left[y^2\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)^2 + x^2\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)^2\right]}{y\left({}_{\therefore}\mathcal{X}\right)\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)^2 - 2y\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)\left({}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet}\right)\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right) + y\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)^2\left(\mathcal{X}_{\therefore}\right)}
\tag{5.180}
$$

Cette égalité ayant été donnée, il suffit ensuite d'observer, que par cette même position on a aussi, conformément à l'égalité (5.142),

$$
sn._x = -\frac{y^2\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)}{x\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)}
\tag{5.181}
$$

pour passer, selon la première des égalités (5.83) et n'importe laquelle des égalités (5.95), aux autres égalités

$$
x_C - x = \frac{\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)\left[y^2\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)^2 + x^2\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)^2\right]}{-x\left({}_{\therefore}\mathcal{X}\right)\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)^2 + 2x\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)\left({}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet}\right)\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right) - x\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)^2\left(\mathcal{X}_{\therefore}\right)}
\tag{5.182}
$$

et

$$R_{x,C}=\frac{\left[y^2\left({}_\bullet\mathcal{X}\right)^2+x^2\left(\mathcal{X}_\bullet\right)^2\right]\sqrt{x^2\left(\mathcal{X}_\bullet\right)^2+y^2\left({}_\bullet\mathcal{X}\right)^2}}{yx\left({}_{\therefore}\mathcal{X}\right)\left(\mathcal{X}_\bullet\right)^2-2yx\left({}_\bullet\mathcal{X}\right)\left({}_\bullet\mathcal{X}_\bullet\right)\left(\mathcal{X}_\bullet\right)+yx\left({}_\bullet\mathcal{X}\right)^2\left(\mathcal{X}_{\therefore}\right)} \tag{5.183}$$

Les trois égalités (5.180), (5.182) et (5.183) constituent les trois théorèmes "par le bais desquels [on peut] trouver la quantité de courbure de n'importe quelle partie de toute courbe donnée"[125], que Newton énonce en conclusion de son argument. Pour que ces théorèmes soient corrects il faut que les deuxièmes termes de ces égalités soient invariants sous tout changement des successions $\{\tau_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ et $\{\theta_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, pourvu que ces successions progressent, comme Newton le prescrit, selon la même raison. Or, si on pose, pour plus de simplicité $\tau_0=a$, $\theta_0=b$ et $\tau_{i+1}-\tau_i=\theta_{i+1}-\theta_i=\eta$, on peut réécrire les égalités (5.177)comme il suit :

$$\begin{aligned}
{}_\bullet\mathcal{X} &= a\sum_{i=0}^{n}\mathfrak{Y}_i x^i+\eta\sum_{i=0}^{n}i\mathfrak{Y}_i x^i=\eta\sum_{j=0}^{n}\ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^j\\
\mathcal{X}_\bullet &= b\sum_{j=0}^{n}\mathfrak{X}_j y^j+\eta\sum_{j=0}^{n}j\mathfrak{X}_j y^j=\eta\sum_{i=0}^{n}\ddot{\mathfrak{Y}}_i\ x^i\\
{}_{\therefore}\mathcal{X} &= a\left(a-\eta\right)\sum_{i=0}^{n}\mathfrak{Y}_i x^i+2a\eta\sum_{i=0}^{n}i\mathfrak{Y}_i x^i+\eta^2\sum_{i=0}^{n}i\left(i-1\right)\mathfrak{Y}_i x^i\\
&= 2a\eta\sum_{j=0}^{n}\ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^j+\eta^2\sum_{j=0}^{n}\dddot{\mathfrak{X}}_j\ y^j\\
\mathcal{X}_{\therefore} &= \sum_{j=0}^{n}b\left(b-\eta\right)\mathfrak{X}_j y^j+2b\eta\sum_{j=0}^{n}j\mathfrak{X}_j y^j+\eta^2\sum_{j=0}^{n}j\left(j-1\right)\mathfrak{X}_j y^j\\
&= 2b\eta\sum_{i=0}^{n}\ddot{\mathfrak{Y}}_i\ x^i+\eta^2\sum_{i=0}^{n}\dddot{\mathfrak{Y}}_i\ x^i\\
{}_\bullet\mathcal{X}_\bullet &= ab\sum_{i=0}^{n}\mathfrak{Y}_i x^i+a\eta\sum_{i=0}^{n}\ddot{\mathfrak{Y}}_i\ x^i+b\eta\sum_{j=0}^{n}\ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^j+\eta^2\sum_{j=0}^{n}j\ \ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^j\\
&= a\eta\sum_{i=0}^{n}\ddot{\mathfrak{Y}}_i\ x^i+b\eta\sum_{j=0}^{n}\ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^j+\eta^2\sum_{j=0}^{n}j\ \ddot{\mathfrak{X}}_j\ y^j
\end{aligned} \tag{5.184}$$

[125]Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [2], 290.

L'égalité (5.180) s'écrit ainsi sous la forme

$$y - y_C = \frac{\left(\sum_{i=0}^{n} \ddot{\mathfrak{Y}}_i \, x^i\right) \left[y^2 \left(\sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j \, y^j\right)^2 + x^2 \left(\sum_{i=0}^{n} \ddot{\mathfrak{Y}}_i \, x^i\right)^2 \right]}{\eta \left[\begin{array}{c} y \left(\sum_{j=0}^{n} \overset{\cdot}{\ddot{\mathfrak{X}}}_j \, y^j\right) \left(\sum_{i=0}^{n} \ddot{\mathfrak{Y}}_i \, x^i\right)^2 \\ -2y \left(\sum_{i=0}^{n} \ddot{\mathfrak{Y}}_i \, x^i\right) \left(\sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j \, y^j\right) \left(\sum_{j=0}^{n} j \, \ddot{\mathfrak{X}}_j \, y^j\right) \\ +y \left(\sum_{i=0}^{n} \overset{\cdot}{\ddot{\mathfrak{Y}}}_i \, x^i\right) \left(\sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j \, y^j\right)^2 \end{array} \right]} \qquad (5.185)$$

Il suffit de comparer cette égalité avec l'égalité (5.173) pour conclure que le deuxième terme de l'égalité (5.180) n'est invariant sous tout changement des successions $\{\tau_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ et $\{\theta_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ qu'à condition que les raisons de ces successions ne soient pas seulement égales, mais soient aussi unitaires. Il en va de même pour les égalités (5.182) et (5.183).

Si on réfléchit sur la preuve que j'ai donnée ci-dessus pour l'égalité (5.173), on comprend aisément la raison de cette limitation. C'est qu'en développant le binôme $y + \frac{o}{y} sn._x$ jusqu'au deuxième terme, après l'avoir substitué à z dans les termes $x \sum_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j \; z^j$ et $x \sum_{j=0}^{n} j \mathfrak{X}_j z^{j-1}$, pour passer de l'égalité (5.171) à l'égalité (5.172), on introduit, dans le deuxième terme de ce développement, le facteur $j - 1$ qui diffère du facteur j qui intervient dans les termes $\sum_{j=1}^{n} j \mathfrak{X}_j y^{j-1}$ et $x \sum_{j=0}^{n} j \mathfrak{X}_j z^{j-1}$ par l'unité et non pas par une différence constante arbitraire.

Newton aurait donc dû observer que les successions arithmétiques auxquelles il se réfère doivent toutes avoir une raison unitaire, faute de quoi ses formules sont affectées d'un facteur constant qui n'a pas lieu d'être. Bien qu'il ne l'observe pas explicitement, il ne manque pas de respecter cette condition dans tous les exemples[126] par lesquels il illustre ses théorèmes, en clôturant sa note[127].

* * *

Avant d'abandonner la note de Newton, une dernière remarque me paraît nécessaire. Si on n'en reste qu'à l'aspect algorithmique des formules précédentes, on n'a aucune difficulté

[126] Cf. Newton (MP), I, **2**, 4, § 3, [2], 291-94.

[127] Avant de terminer sa note, Newton avait à vrai dire ajouté un court passage, qu'il efface ensuite, où il est question de la recherche des normales et des tangentes pour une courbe référée à un système de coordonnées bipolaires : cf. Newton (MP), I, **2**, § 3, [3], 295-297, et note (88), 294-295.

à vérifier qu'en posant $\{\tau_i\}_{i=-\infty}^{\infty} = \{\theta_j\}_{j=-\infty}^{\infty} = i = j$ et $\mathcal{X} = F(x,y)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
{}_{\bullet}\mathcal{X} &= \frac{\partial F}{\partial x}x & \mathcal{X}_{\bullet} &= \frac{\partial F}{\partial y}y \\
{}_{\therefore}\mathcal{X} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}x^2 & \mathcal{X}_{\therefore} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y^2
\end{aligned}
\qquad (5.186)
$$

$$
{}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}xy
$$

En substituant dans l'égalité (5.183) pour la position $\tau_{i+1} - \tau_i = \theta_{i+1} - \theta_i = 1$, on obtient ainsi l'égalité connue :

$$
R_{x,C} = \frac{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)} \qquad (5.187)
$$

Cela ne nous autorise pas à conclure que Newton a, par sa preuve, introduit des objets qui jouent, dans le contexte de sa géométrie, le même rôle que les dérivées secondes d'une fonction à deux variables — et donc les dérivées partielles de cette fonction — jouent dans le contexte du calcul différentiel. On pourrait d'abord observer que les algorithmes que Newton présente ne se réfèrent qu'à des polynômes, et que rien ne nous laisse penser que celui-ci ait vu la possibilité d'une généralisation de ceux-ci à des expressions non entières. Ceci n'est pourtant pas l'essentiel, car, après avoir observé ceci, on pourrait continuer à penser que la conclusion précédente est correcte lorsqu'on se limite aux cas de fonctions entières. Le point est plutôt qu'une dérivée — première ou seconde, totale ou partielle — de même qu'une différentielle, et de même aussi qu'une fluxion, n'est pas seulement un invariant algorithmique ; il est, avant ceci, un objet qu'on peut définir de manière complètement indépendante de l'algorithme qu'il satisfait, soit en termes géométriques, soit en termes fonctionnels.

C'est exactement cette possibilité d'une définition indépendante que Newton est loin de saisir. On revient ainsi aux remarques par lesquelles on a ouvert la présente section : Newton parvient à ses formules d'emblée, sans passer par des égalités qui indiquent, indépendamment de tout algorithme — et donc de toute équation exprimant les courbes considérées — le lien géométrique qui lie le centre de courbure et le rapport $\frac{z-y}{o}$ des incréments des coordonnées de ces courbes.

Le passage clef de l'argument de Newton consiste en revanche dans la fixation, au moyen d'une notation opportune, d'un invariant algorithmique associé au passage d'une polynôme quelconque à deux variables $G(x,y)$, à un polynôme associée $G(x+o,z)$, où o est un incrément infiniment petit et z est une racine de l'équation $G(x+o,z) = 0$. Cet invariant algorithmique s'exprime par le biais d'une règle de transformation formelle — qui ne revient en dernière instance qu'à la règle de Hudde, prise dans son contenu purement algorithmique — associant à tout polynôme $\sum\limits_{h=0}^{n} A_h \varkappa^h$ un autre polynôme $\sum\limits_{h=0}^{n} A_h \tau_h \varkappa^h$, qu'on peut prendre du coup comme une transformée du premier polynôme. Si on note par le symbole "$P^*(\varkappa)$" la transformée du polynôme $P(\varkappa)$, obtenue selon l'application de cette règle, et par "$F_y(x)$" et "$F_x(y)$" le polynôme $F(x,y)=0$, considéré respectivement comme un polynôme en x et comme un polynôme en y, on n'aucune difficulté à établir les égalités suivantes

$$
\begin{gathered}
{}_{\bullet}\mathcal{X} = F_y^{*}(x) \quad ; \quad \mathcal{X}_{\bullet} = F_x^{*}(y) \\
{}_{\therefore}\mathcal{X} = \left[F_y^{*}(x)\right]_y^{*}(x) = F_y^{**}(x) \quad ; \quad \mathcal{X}_{\therefore} = \left[F_x^{*}(y)\right]_x^{*}(y) = F_x^{**}(y) \\
{}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet} = \left[F_y^{*}(x)\right]_x^{*}(y) = \left[F_x^{*}(y)\right]_y^{*}(x)
\end{gathered}
\tag{5.188}
$$

Ce que Newton a démontré est ainsi que les expressions Algébriques exprimant respectivement les coordonnées du centre de courbure et le rayon de courbure d'une courbe exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par une équation entière $F(x,y)=0$ s'obtiennent à partir du polynôme $F(x,y)$ en composant les polynômes transformés $F_y^{*}(x)$, $F_x^{*}(y)$, $F_y^{**}(x)$, $F_x^{**}(y)$ et $\left[F_y^{*}(x)\right]_x^{*}(y)$ comme l'indiquent les égalités (5.180), (5.182), et (5.183).

Il reste qu'en employant ses nouvelles notations, non seulement au cours de la preuve, comme dans la note du 20 mai, mais aussi dans l'expression finale du résultat, Newton marque une nouveauté essentielle. Employés pour indiquer les coordonnées du centre de courbure et le rayon de courbure, ces symboles ne semblent pas renvoyer, tout simplement, à une pratique algorithmique ; ils semblent, en quelque sorte, thématiser cette pratique. Celle-ci est désormais exprimée par des symboles nouveaux qui interviennent dans la formation d'un nouveau type de structure symbolique. Celles qu'on trouve dans les membres de droite des égalités (5.180), (5.182), et (5.183) ne sont ainsi pas seulement des instructions pour composer des expressions Algébriques associées à certaines objets géométriques. Elle se présentent d'elles-mêmes comme des objets. Il ne s'agira que de les penser comme tels, indépendamment du contexte géométrique qui leur a donné origine, pour les voir comme de véritable objets *analytiques.*

Dans le mois de mai 1665, Newton n'en est pourtant pas encore là. Les résultats précédents, et la manière dont Newton les obtient et les exprime, ne sont, parmi d'autres, qu'un des points de départ d'un parcours encore long, qui va conduire Newton des enseignements qu'il a su tirer de sa lecture de l'*Arithmetica infinitorum* et de la deuxième édition latine de la *Géométrie*, jusqu'à l'édification de la théorie des fluxions. C'est ce parcours qu'on va reconstruire dans les chapitres qui suivent.

Quatrième partie

Premières tentatives d'unification

Entre le début de 1664 et l'été 1665, Newton avait suivi deux lignes de recherche parallèles, l'une relevant de sa lecture de l'*Arithmetica infinitorum* et l'autre de sa lecture de la deuxième édition latine de la *Géométrie*. En les poursuivant tour à tour, il était néanmoins parvenu à des résultats structuralement analogues concernant la quadrature des courbes référées à des systèmes de coordonnées cartésiennes et la recherche de leurs tangentes, normales et centres de courbure. En s'émancipant progressivement des points de vue et des méthodes de ses maîtres, il était parvenu en effet, autant dans un cas que dans l'autre — dans les notes qu'on a discutées respectivement dans les sections 5.5 et 4.4 — à aborder ces questions et, au moins partiellement, à les résoudre de manière essentiellement nouvelle.

La nouvelle approche de Newton tenait, plutôt qu'à l'élaboration d'une nouvelle méthode de solution de ces problèmes, à la mise en place d'un algorithme global, le plus général possible, apte à tirer directement d'une équation Algébrique exprimant une certaine courbe, une expression (finitaire ou infinitaire) exprimant les grandeurs cherchées.

Pourtant, bien que les résultats ainsi obtenus ne pouvaient que lui apparaître connectés les uns aux autres, ils ne formaient pas encore, pris dans leur ensemble, un réseau suffisamment serré et structuré pour pouvoir constituer le noyau d'une nouvelle théorie unitaire. Ils ne portaient, pour l'essentiel, que sur les objets mathématiques que Descartes et Wallis avaient définis, en se limitant à suggérer des procédures nouvelles, aptes à l'étude de ces objets et de leurs relations. Certes, en quelques cas, comme pour les théorèmes concernant le centre de courbure énoncés dans la note du 21 mai, les algorithmes de Newton étaient tels qu'ils pouvaient faire penser à une sorte de thématisation de ces procédures, donnant naissance à des objets nouveaux. Dans d'autres cas, comme pour les développements en séries entières qui apparaissent dans l'esquisse du traité sur les quadratures rédigée pendant l'été 1665, des objets nouveaux semblaient surgir de l'exigence de disposer d'expressions Algébriques plus aisément maniables pour les courbes étudiées. Néanmoins, ces objets ne se présentaient encore que comme des outils convenables, auxquels Newton suggère de recourir dans l'étude des courbes géométriques de Descartes. S'il y eût thématisation ou introduction de nouvelles modalités d'expression des courbes, ce ne fut que l'effet de la découverte de certains invariants, de la compréhension de la possibilité d'exploiter cette découverte pour abréger et simplifier des calculs, ou de la perspective d'une application plus facile d'un algorithme. Bref, à l'été 1665, Newton était désormais arrivé bien plus loin que Descartes et Wallis dans l'étude des courbes, mais il n'avait pas encore créé une nouvelle théorie mathématique.

Encouragé par ses succès, il ne pouvait pourtant pas se contenter d'en rester là. L'ambition de dépasser ses maîtres dans la solution des problèmes que ceux-ci lui avait implicitement proposés, avait désormais laissé la place à une ambition plus grande : parvenir, comme eux l'avaient fait avant lui, à imaginer une mathématique inédite.

La piste à suivre pour réussir dans cette entreprise s'imposait d'elle-même. Il s'agissait d'abord de creuser du côté des liens entre les algorithmes aptes à fournir, au moins dans certains cas, la solution des problèmes des tangentes et des quadratures. Il s'agissait ensuite, une fois éclairés les liens entre ces algorithmes, de chercher à fournir une présentation unitaire de la masse de résultats obtenus jusque là.

Pour ce qui est du premier point, Newton pouvait se réclamer de son adaptation du théorème de van Heuraet qui lui avait montré, dès l'été 1664, que le lien entre les algorithmes des tangentes et ceux des quadratures n'était qu'une conséquence d'un lien géométrique plus profond liant entre eux le problème des aires et celui des tangentes. Mais il devait aussi chercher à comprendre comment il était possible de connecter ce théorème, et les résultats qu'il était possible d'en tirer, avec d'autres résultats en matière de quadratures — tels ceux qu'il avait obtenus, à la suite de sa transformation des méthodes de Wallis, sans guère se réclamer ni de ce lien géométrique, ni du lien conséquent entre les algorithmes des tangentes et ceux des quadratures.

Pour ce qui est du deuxième point, il s'agissait de vérifier la possibilité de rattacher les algorithmes des tangentes et des quadratures, et plus généralement les problèmes géométriques correspondants, à des objets d'un genre nouveau dont les propriétés et relations auraient pu fournir des renseignements généraux pour la solution des différents problèmes géométriques. Ce sont ces deux étapes du parcours de Newton que je vais décrire dans les deux chapitres suivants, qui portent sur les notes que Whiteside a recueillies dans le premier volume des *Mathematical Papers* sous le titre "The Calculus Becomes an Algorithm"[128].

[128]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, 298-368.

Chapitre 6

À la recherche des liens entre l'algorithme des quadratures et celui des tangentes (entre l'été et l'automne 1665)

Dès l'automne 1664, Newton avait saisit la possibilité d'exploiter le théorème de van Heuraet, convenablement adapté, pour parvenir à la quadrature de certaines classes de courbes[1]. Il n'avait pourtant pas exploré à fond cette possibilité, en se limitant à quelques exemples faciles. Ce fut seulement plus tard, probablement pendant l'été 1665, qu'il revint sur la question, en lui consacrant deux notes[2], dont la structure est similaire : une démonstration assez soignée du théorème de van Heuraet, dans sa version adaptée, est suivie par une table de quadratures obtenues moyennant ce théorème. Plus ou moins à la même période[3], il parvint — en revenant sur les résultats qu'il avait obtenus à la suite de sa lecture de l'*Arithmetica infinitorum* — à établir une méthode de quadrature par séries entières (que l'on a discutée dans la section 4.4), pour laquelle il ne pouvait qu'envisager de larges possibilités d'application. Les quadratures obtenues en appliquant le théorème de van Heuraet (dans va version adaptée) — que ne concernaient qu'une classe limitée de courbes — venaient ainsi s'opposer, par leur caractère finitaire, à d'autres quadratures possibles, concernant une classe de courbes bien plus large, employant des séries entières. Loin de convaincre Newton de l'inutilité de développer la méthode de quadrature fondée sur le théorème de van Heuraet, la plus grande généralité de la méthode de quadrature par séries le poussa à multiplier ses efforts pour parvenir à élargir autant que possible la classe de courbes dont il fût possible de fournir une quadrature finitaire.

Les deux notes que Newton consacre à ce travail ont été publiées par Whiteside dans un ensemble plus large, contenant six fragments distincts, et répondant à un titre malheu-

[1] Cf. la section 5.1.2, ci-dessus.
[2] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [4]-[5], 302-317.
[3] Cf. la note (8), ci-dessus.

reux : “Approach to the Fundamental Theorem of the Calculus”[4]. De par leur contenu, ces fragments sont pourtant loin d'être homogènes, et il me semble plus sage de les distinguer en trois groupes, relevant fort probablement de trois périodes distinctes dans les recherches de Newton[5]. Les trois premiers[6] remontent probablement à une période intermédiaire entre l'automne 1664 et les printemps 1665 ; les deux suivants sont constitués par les deux notes dont je viens de parler[7], et remontent probablement au début de l'été 1665 ; le sixième[8], se présentant comme une note accomplie contenant une nouvelle esquisse d'un traité de quadratures, est enfin sans doute ultérieur.

* * *

Parmi les trois premiers fragments, seul le deuxième[9] relève du théorème de van Heuraet, que Newton réfère à l'habituelle parabole d'équation $y^2 - ax = 0$, et qu'il justifie en se réclamant d'un argument parfaitement analogue à celui qu'il avait employé à l'automne 1664[10]. Plus qu'à ce théorème pris comme tel, il semble pourtant intéressé à l'expression Algébrique de la courbe WZ (fig. 2, chap. 5). Lorsqu'elle est référée au même système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'axe AH et d'origine A à laquelle est référée la parabole d'équation $y^2 - ax = 0$, cette courbe est exprimée par l'équation $4z^2x = aK^2$ et son aire, évaluée entre l'abscisse $x = \frac{a}{4}$ (pour laquelle l'ordonnée z devient égale à K) et une abscisse quelconque $x = \xi$ (plus grande que $\frac{a}{4}$) est égale à l'aire $K\left[\sqrt{a\xi} - \frac{a}{2}\right]$ du rectangle $R\left(K, y_\xi - \frac{a}{2}\right)$. Ayant noté ceci, Newton[11] pose $K = \frac{a}{2}$ et opère différents changements de coordonnées qui fournissent des équations différentes pour la courbe WZ, probablement dans le but de trouver une relation entre l'expression de cette courbe et celle de son aire propre à montrer un invariant algorithmique significatif.

Le premier fragment[12] se réduit à deux phrases que Whiteside a extraites du même manuscrit[13] auquel appartiennent les fragments successifs. La deuxième phrase est même tronquée et il est difficile de comprendre ce que Newton avait en tête lorsqu'il l'a écrite[14]. Dans la première, il suggère d' “extraire” de l'équation d'une courbe qu'on se propose de carrer, l'expression de l'ordonnée en termes de l'abscisse, et note que si cette expression contient un terme de la forme $\frac{a}{x}$, alors la courbe en question “ne peut pas être carrée”. De

[4]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [1]-[6], 298-321. Évidemment, ni dans ces notes, ni ailleurs dans toute la production mathématique de Newton, il n'est possible de trouver des résultats qu'on puisse assimiler de quelque manière que ce soit à notre théorème fondamental du *calcul* [cf. la note (62), ci-dessus].

[5]Whiteside a daté l'ensemble des six fragments de la mi-1665, tout en restant assez dubitatif à propos de cette conjecture [cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, note (1), 298].

[6]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [1]-[3], 298-302.

[7]Cf. la note 2, ci-dessus.

[8]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [6], 318-321 et Newton (C), II, 168-171.

[9]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [2], 299–300.

[10]Cf. la section 5.1.2. Au lieu de supposer que la translation de pn (cf. la figure 3 du chapitre 5) soit telle que cette ordonnée balaye en temps égaux des parties égales du trapézoïde qu'elle décrit, pour en conclure que la translation du segment constant DB qui balaye le rectangle EDBC est uniforme, Newton suppose maintenant que la translation de pn est uniforme, pour en conclure que le “mouvement” de DB “décroît” proportionnellement à pn [cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [2], 299]. C'est la première allusion à une notion que Newton introduira de manière plus conséquente quelques semaines plus tard : cf. le chapitre 7.

[11]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, note (30), 301.

[12]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [1], 298.

[13]C'est le manuscrit Add. 4000 de l'*University Library* de Cambridge.

[14]Cf., de toute manière, Newton (MP), I, **2**, 5, note (8), 298.

toute évidence, Newton se réfère à l'algorithme de quadrature exprimé par les égalités (4.97), en affirmant — à la différence de ce qu'il fait dans la première de ses esquisses d'un traité des quadratures[15] — que si l'un des exposants de x est égal à -1, alors cet algorithme ne peut pas être appliqué. Il est difficile d'établir laquelle, parmi ces deux déclarations contraires, a d'abord été rédigée. De toute manière l'indécision de Newton à ce propos confirme sa difficulté concernant le résultat que l'on obtient en appliquant cet algorithme à ce cas.

Le troisième fragment[16] relève lui aussi de ce même algorithme. Newton cherche à comprendre sous quelles conditions ceci peut être applicable à des courbes dont l'ordonnée est exprimée par un quotient de polynômes. Il ne considère pourtant que deux de ces conditions : ou bien le dénominateur de ce quotient n'est qu'un monôme — et alors il est aisé de transformer ce quotient en un polynôme à puissances positives et/ou négatives, auquel cet algorithme s'applique par linéarité (à condition que ce polynôme ne contienne pas un terme de la forme $\frac{a}{x}$) — ou bien ce même dénominateur peut être réduit à un monôme en opérant une substitution linéaire.

6.1 Été 1665 : l'usage du théorème de van Heuraet pour la solution du problème des quadratures

Encore que très pauvres quant à leur contenu mathématique, ces trois premiers fragments témoignent d'une attitude vis à vis du problème des quadratures : plus qu'aux aspects intrinsèquement géométriques de ce problème, Newton semble s'intéresser aux liens algorithmiques qui lient entre elles les équations Algébriques exprimant les courbes à carrer et les expressions des aires de ces courbes. Cette attitude est largement confirmée par les deux notes qui suivent ces fragments dans l'édition de Whiteside.

Newton poursuit dans ces notes l'objectif de carrer une large classe de courbes ne se fondant que sur sa version adaptée du théorème de van Heuraet, sans employer les algorithmes qu'il avait tiré de sa lecture de l'*Arithmetica infinitorum*. Ces algorithmes apparaissent plutôt *a posteriori*, comme des invariants formels révélés par la comparaison des équations de ces courbes avec les expressions de leurs aires.

Comme on l'a déjà observé[17], la démarche la plus simple pour tirer des quadratures du théorème de van Heuraet (dans sa version adaptée) tient à l'application d'un argument à rebours, consistant dans la construction de l'équation d'une courbe dont on suppose connaître *a priori* l'aire. L'expression Algébrique $\mathcal{A}(x)$ qui intervient dans l'égalité (5.72) étant donnée, il s'agit de supposer que le produit $K\,|\mathcal{A}(\xi) - \mathcal{A}(\kappa)|$ exprime l'aire d'une courbe exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par une équation $F(x, z) = 0$ — cette aire étant évaluée entre les limites $x = \kappa$ et $x = \xi$, où la courbe exprimée, par rapport au même système de coordonnées cartésiennes, par l'équation $y = \mathcal{A}(x)$ reste monotone —, et de déterminer l'équation $F(x, z) = 0$ d'après l'égalité (5.74).

En simplifiant cette démarche, Newton suppose que l'aire de la courbe d'équation $F(x, z) = 0$ est exprimée directement par une expression Algébrique connue telle que $a\mathcal{A}(x)$, il suppose que la constante K est égale au coefficient a, en tire l'équation $y = \mathcal{A}(x)$, et en

[15] Cf. la section 4.4.2, ci-dessus, en particulier, p. 213.
[16] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [3], 300-302.
[17] Cf. la section 5.1.2, en particulier p. 241.

conclut que l'ordonnée z est égale à $a\frac{\mathcal{N}(x)}{\mathcal{A}(x)}$. Cela signifie qu'il suppose implicitement que la limite $x = \kappa$ est telle que $\mathcal{A}(\kappa) = 0$, et qu'il ne fait pas de distinction entre l'abscisse x et sa limite $x = \xi$.

Comme, en accord avec cet argument, l'expression $a\mathcal{A}(x)$ est censée exprimer une aire, et qu'il semble naturel de supposer que le segment a est pris comme une grandeur (strictement) positive, il s'ensuit que cette expression doit aussi exprimer une grandeur positive, car, en accord avec l'adaptation de Newton du théorème de van Heuraet et avec la notion d'aire que ce théorème semble supposer, une aire ne peut être qu'une grandeur positive. Si l'on veut éviter d'en conclure que Newton limite implicitement, et en général, le rang de variation de x aux seules valeurs qui rendent $\mathcal{A}(x)$ positive, il faut donc supposer que, lorsqu'elle est prise comme l'expression d'une aire, cette expression est prise en valeur absolue. Si c'est le cas, la même expression, prise en valeur absolue, exprime aussi l'aire de la courbe d'équation $F(x, -z) = 0$, évaluée entre les mêmes limites (dont il ne sera pas nécessaire de supposer que l'une est plus grande ou plus petite que l'autre). La conclusion de l'argument de Newton serait donc que les aires des courbes exprimées, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par les équations entières $F(x, z) = 0$ et $F(x, -z) = 0$ tirées de l'égalité (5.74), évaluées entre les limites $x = \kappa$ et $x = \xi$ — où la courbe exprimée, par rapport au même système de coordonnées, par l'équation $y = \mathcal{A}(x)$ reste monotone — sont exprimées par l'expression $|a\mathcal{A}(x)|$.

6.1.1 La première note : la construction d'une table de quadratures

Cette procédure générale permet à Newton de parvenir, dans la première de ses deux notes[18], à une large table de quadratures, constituée par de deux colonnes. Dans la colonne de gauche, Newton inscrit les "équations qui expriment la nature des lignes", c'est-à-dire des courbes, et dans celle de droite, il indique "leurs carrés"[19]. Il n'est pourtant pas nécessaire de répéter que les calculs qu'il exécute vont des entrées de droite vers celles de gauche.

Avant de passer à la considération détaillée de cette table, quelques remarques plus générales, concernant la démarche de Newton et sa justification, sont néanmoins nécessaires.

Newton présente sa note comme l'exposition d'une "méthode pour carrer les courbes qui peuvent être carrées"[20], et il observe qu'une courbe ne peut être carrée que si "son aire peut être exprimée en général par quelques équations dans laquelle apparaît une quantité inconnue, de telle sorte que lorsque cette quantité a été déterminée [son] aire est limitée et peut être trouvée moyennant cette même équation"[21]. Bien que Newton parle ici d'équation, il semble qu'il fasse plutôt référence à une expression Algébrique, qui, selon mon interprétation[22], est celle du segment qui fournit l'aire de la courbe en question. Cette aire est de toute manière définie explicitement comme une grandeur dont la variation dépend de la variation d'une autre grandeur (Newton dit plutôt "quantité"[23]), qui est de toute évidence un segment ; quand ce segment croit "en proportion arithmétique", ajoute Newton, l'aire

[18] Cf. Newton (MP), }I, **2**, 5, § 1, [4], 302-313.
[19] Cf. Newton (MP), }I, **2**, 5, § 1, [4], 305.
[20] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [4], 302.
[21] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [4], 302.
[22] Cf. la section 4.1.1, en particulier pp. 176 et suiv.
[23] Cf. la note (40) du chapitre 1.

croit “en proportion inégale”[24], c’est-à-dire que la relation entre l’aire et ce segment n’est pas (en général) linéaire.

Newton précise aussi que “l’équation [ou, pour mieux dire, l’expression] qui exprime l’aire d’une courbe doit être de deux dimensions, car elle exprime la quantité d’une surface”[25]. On pourrait penser que par cette remarque Newton signifie son adhésion à un principe d’homogénéité classique qui, dans le contexte de l’Algèbre des segments de Descartes, ne devrait plus avoir de rôle. Il suffit pourtant de réfléchir sur la procédure suggérée par le théorème de van Heuraet, pour se rendre compte que si l’expression $a\mathcal{A}(x)$ n’était pas une expression d’ordre 2 — en considérant la variable x, la constante a et tout autre constante non numérique qui y intervient comme des expressions d’ordre 1 — les équations $y = \mathcal{A}(x)$, $F(x, z) = 0$ et $F(x, -z) = 0$, qui expriment les courbes sur lesquelles porte le théorème de van Heuraet, ne seraient pas des équations homogènes, et elles n’exprimeraient donc pas de manière univoque des courbes dans l’Algèbre de Descartes[26]. Par sa remarque, Newton ne fait donc qu’expliciter une condition essentielle d’applicabilité de l’Algèbre des segments de Descartes à l’étude des courbes.

Pour présenter et justifier de sa procédure, Newton se réclame d’une “proposition” consistant dans un problème : “en ayant une équation [expression] de deux dimensions, trouver la courbe dont celle-ci exprime l’aire”[27]. Ce problème général n’est résolu que dans le cas où l’expression donnée est “$\frac{x^3}{a}$”.

En posant

$$|a\mathcal{A}(x)| = \left|\frac{x^3}{a}\right| = s\left[\sum\nolimits_0^{\xi}[z]\right] \tag{6.1}$$

on tire, en accord avec la démarche décrite ci-dessus et selon la position $K = a$,

$$y = \mathcal{A}(x) = \frac{x^3}{a^2} \tag{6.2}$$

et donc

$$a^2 y = x^3 \tag{6.3}$$

De là il est ensuite aisé de tirer

$$sn._x[y] = \mathcal{N}(x) = \frac{3}{a^4}x^5 \tag{6.4}$$

et donc

$$z = a\frac{\mathcal{N}(x)}{\mathcal{A}(x)} = \frac{3}{a}x^2 \tag{6.5}$$

d’où Newton conclut que l’aire de la parabole d’équation

$$za = 3x^2 \tag{6.6}$$

est justement[28] $\left|\frac{\xi^3}{a}\right|$.

[24]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [4], 302.
[25]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [4], 302.
[26]Cf. la section (1.4.2), en particulier pp. 52-55.
[27]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [4], 302-303.
[28]Newton ne distingue pas en réalité entre x et ξ et n’explicite pas sa référence aux valeurs absolues.

Pour prouver sa proposition, Newton ne fait que démontrer le théorème de van Heuraet dans sa version adaptée, en employant cette fois un argument explicite qui correspond pour l'essentiel à celui que j'ai présenté dans la section 3.5.3, et qui est donc analogue à celui de van Heuraet lui-même. Il réfère pourtant cet argument à une figure telle que la figure 1[29], que, tout en correspondant pour l'essentiel à la figure 3 du chapitre 5, diffère de celle-ci par le fait que les courbes VY et WZ s'annulent toutes les deux à l'origine A, ce qui est justement le cas autant de la cubique d'équation (6.3) que de la parabole d'équation (6.6).

De cette manière, Newton n'a pas besoin de déclarer explicitement, et *a fortiori* de calculer, la limite inférieure de l'aire de la courbe WZ. Cette limite est d'emblée identifiée avec l'origine, et le théorème qu'il énonce affirme en effet que le trapézoïde PNA est égal au rectangle CAPE. Ce fait — joint à l'absence de distinction entre l'abscisse variable x et sa valeur ξ, et au silence de Newton quant à la nécessité de considérer les valeurs absolues de $a\mathcal{A}(x)$ et de se limiter à des intervalles $[\kappa, \xi]$ ou $[\xi, \kappa]$ où la courbe exprimée par l'équation $y = \mathcal{A}(x)$ reste monotone — pourrait faire penser que Newton calcule des primitives et non pas des aires. La nature géométrique de l'argument de Newton me semble pourtant suffisamment explicite pour écarter cette interprétation. Tout simplement, Newton n'est pas encore parvenu à définir (ne serait-ce qu'implicitement) un objet mathématique capable de jouer le rôle de la primitive.

Parmi les expressions $\mathcal{A}(x)$ qui interviennent dans la table de quadratures présentée par Newton, il y en a certaines qui ne respectent pas la condition $\mathcal{A}(0) = 0$. Pour celles-ci, Newton n'indique pas explicitement comment l'on doit choisir la limite constante de l'aire en question. Néanmoins, à deux exceptions près, sur lesquelles je reviendrai, ces expressions sont toutes telles qu'il existe une valeur κ (éventuellement infinie) de x, telle que $\mathcal{A}(\kappa) = 0$, qui peut être prise comme cette limite, les constantes a, b et c intervenant dans ces expressions étant prises (comme il semble naturel de faire) comme des grandeurs positives. Dans certains cas, en passant de l'expression $\mathcal{A}(x)$ à l'équation de la courbe dont on suppose connaître l'aire, Newton change le signe de z, c'est-à-dire que cette équation dérive de l'égalité

$$z = -a\frac{\mathcal{N}(x)}{\mathcal{A}(x)} \tag{6.7}$$

et non pas de l'égalité (5.74). De surcroît, comme cette équation est par hypothèse une équation entière, elle est souvent tiré de l'expression de z par le biais d'un passage à une puissance paire ; dans ces cas, il est donc impossible de dire si elle est tirée de l'égalité (5.74) ou de l'égalité (6.7). Whiteside en conclut que dans certains cas "Newton omet le changement de signe nécessaire", ce qu'il justifie en observant qu' "il est difficile de contrôler le signe de la dérivée lorsqu'on doit à chaque fois calculer d'abord la sous-normale"[30]. Selon mon interprétation, il n'y a pourtant aucune nécessité à supposer que Newton ait commis des erreurs, ou qu'il ait évité la "difficulté due au changement de signe en passant au carré dans la dérivée"[31]. Simplement, lorsqu'il change le signe de z, il affirme correctement que

[29]Pour parvenir à démontrer que le rectangle uvsr est égal au rectangle $\mathsf{p'j''jp''}$, Newton commence par démontrer que le rectangle bvsd est égal au rectangle $\mathsf{pnjp''}$, en faisant entrer en ligne de compte le triangle mpt et le triangle infiniment petit mlJ, dont les côtés sont les incréments infiniment petits des coordonnées de la courbe MA. Par cette légère modification de la preuve de van Heuraet, il montre une attention désormais explicite au triangle caractéristique.

[30]Cf. Newton (MP), I, **25**, § 1, note (55), 306.

[31]Cf. Newton (MP), I, **25**, § 1, note (57), 307.

l'aire de la courbe d'équation $F(x, -z) = 0$, évaluée entre les limites $x = \kappa$ et $x = \xi$, est égale à $|a\mathcal{A}(x)|$, et, lorsqu'il passe à puissance paire, il identifie entre elles les équations $F(x, z) = 0$ et $F(x, -z) = 0$. Pour rendre raison de ses résultats, il suffit donc de déterminer correctement la limite $x = \kappa$ et de supposer que ξ soit tel que la courbe d'équation $y = a\mathcal{A}(x)$ reste monotone entre $x = \kappa$ et $x = \xi$.

La présence, dans le table de Newton, de deux expressions $\mathcal{A}(x)$, qui ne s'annulent pour aucune valeur de x, et, surtout, l'absence de toute spécification explicite de la limite constante $x = \kappa$ et du rang de variation dans laquelle la limite ξ peut varier, ne suffisent pas à mettre en doute que celle de Newton soit bien une table de quadratures. Cela suggère néanmoins que — tout en cherchant des aires — Newton ait été intéressé plus aux liens algorithmiques qui s'établissent entre ses expressions à la suite de la procédure suggérée par le théorème de van Heuraet, qu'à l'interprétation géométrique de ces expressions. Cette attitude apparat fort naturelle si l'on pense la table de Newton comme l'exhibition d'un ensemble de règles de quadratures référées à des courbes exprimées par des équations diverses, plutôt que comme une exhibition directe des aires de ces courbes.

On pourrait objecter que, pensée de cette manière, cette table ne serait vraiment utile que si elle présentait des équations de forme élémentaire dans sa colonne de gauche. Or, cela n'est vrai que pour les premières lignes. En général, ce sont plutôt les expressions de la colonne de droite qui apparaissent comme des expressions Algébriques élémentaires. Il faut pourtant observer que, malgré ceci, cette table est bien loin de fournir, lorsqu'elle est lue de droite à gauche, des règles aptes à permettre de calculer le rapport entre l'ordonnée et la sous-tangente relatif à n'importe quelle courbe exprimée par une équation Algébrique. Pensée de cette manière, cette table est manifestement incomplète. Et elle l'est pour cause : non seulement Newton n'est pour l'instant guère intéressé à considérer ce rapport en tant que tel — comme on l'a déjà remarqué la fin du chapitre 5 — mais il est surtout dépourvu de tout outil qui pourrait lui permettre de calculer ce rapport sans passer par la considération d'une équation entière entre x et y. Ainsi, l'expression $\mathcal{A}(x)$ étant donnée, il est obligé, pour suivre sa démarche, de mettre l'équation $y = \mathcal{A}(x)$ sous la forme d'une équation entière et d'opérer ensuite sur cette équation en accord avec l'égalité (5.77), pour trouver l'expression $\mathcal{N}(x)$. Il ne peut donc passer de la colonne de droite à celle de gauche que s'il sait opérer cette transformation qui, elle, ne dépend pas d'un algorithme reconductible à l'application d'une règle générale[32]. Non seulement la table de Newton, lue de droite à gauche, n'est donc pas assimilable à une table de primitive, mais elle n'est pas non plus assimilable, lue de gauche à droite, à une table de dérivées.

Elle est plutôt le résultat de différentes applications d'une méthode de quadrature, guidées, plus que par l'objectif de carrer des courbes déterminées, par une sorte d'automatisme des calculs, automatisme qui semble engendrer chez Newton un enthousiasme qui le rend parfois aveugle.

* * *

[32]Après avoir prouvé le théorème de van Heuraet, Newton [cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, 305] distingue trois cas dans lesquels ce théorème peut être appliqué pour fournir à rebours des quadratures : le cas où $\mathcal{A}(x)$ ne présente que des puissances positives de x, celui où $\mathcal{A}(x)$ ne présente que des puissances négatives de x et le cas où $\mathcal{A}(x)$ présente aussi bien des puissances positives que des puissances négatives de x. Ces cas épuisent évidemment toutes les possibilités, mais Newton est loin de les traiter d'une manière complète.

Ceci étant dit, il est temps de considérer la table de Newton plus en détail. Dans l'annexe qui clôt le présent chapitre[33], je présente une reconstruction de cette table, selon la notation et l'interprétation que j'ai proposées ci-dessus. J'ai regroupé les 89 entrées de cette table en 31 classes[34], dont les éléments ne diffèrent entre eux que par la valeur assignée à un exposant entier positif n. Pour chacun de ces groupes, j'ai indiqué en gras les valeurs de n qui correspondent à des entrées effectivement présentes dans la table de Newton. À côté de ceux-ci, j'ai indiqué une infinité d'autres valeurs de n auxquelles correspondent des quadratures que Newton laisse implicites. J'ai toujours supposé que les constantes a, b et c, qui interviennent dans les expressions des aires, sont des grandeurs positives. J'ai calculé et indiqué, pour chacune de ces classes, les valeurs $x = \kappa$ qui, en annulant $\mathcal{A}(x)$, peuvent servir de limites constantes de ces aires. Lorsque, pour des raisons inhérentes à la nature particulière de l'expression $\mathcal{A}(x)$, la limite ξ ne peut que varier en restant soit plus grande, soit plus petite que κ, je l'ai empressement indiqué. J'ai en outre indiqué, pour chaque classe, si l'équation qui intervient dans la table de Newton (et qui exprime la courbe d'ordonnée z, dont l'aire est censée être égale à $|a\mathcal{A}(x)|$), est l'équation $F(x, z) = 0$, qui dérive de l'égalité (5.74), ou l'équation $F(x, -z) = 0$, qui dérive de l'égalité (6.7), ou si, en conséquence d'un passage à une puissance paire, ces deux équations coïncident. Je n'ai en revanche pas indiqué les limites supérieures ou inférieures du rang de variation de ξ qui, en assurant la monotonie de la courbe d'équation $y = \mathcal{A}(x)$, font que les résultats énoncés par Newton sont corrects, dérivant d'une application légitime du théorème de van Heuraet, dans sa version adaptée. En accord avec la définition de z, ces limites sont aussi celles qui assurent que la courbe d'ordonnée z ne change pas de signe et garantissent donc que ces mêmes résultats ont une signification géométrique claire. Le calcul de ces limites ne comporte aucune difficulté pour un interprète moderne accoutumé à la pratique du calcul différentiel, mais il n'aurait pas non plus comporté de difficultés majeures pour Newton, qui semble simplement supposer que, dans chaque cas, la différence $|\xi - \kappa|$ est suffisamment petite.

La majorité des lignes de la table de Newton, ainsi que je l'ai reconstruite, ne demande aucun commentaire supplémentaire. Je me limiterai donc à quelques observations rapides. On pourra d'abord noter que parfois l'ordonnée z de la courbe que Newton est censé avoir carrée ne peut être prise qu'avec le signe contraire à celui qui lui est assigné par l'égalité (5.74) si on veut éviter de limiter la validité des résultats de Newton aux cas où l'aire $|a\mathcal{A}(x)|$ est prise avec le signe négatif. C'est par exemple le cas de la ligne 6. Ailleurs, le changement de signe de z est nécessaire pour éviter de supposer que l'aire de la courbe correspondante soit prise avec le signe négatif ou soit identifiée au produit $a\,(z_\kappa - z_\xi)$, plutôt qu'au produit $a\,(z_\xi - z_\kappa)$. C'est le cas par exemple de la ligne 4. Si mon interprétation est correcte, ces circonstances n'entraînent néanmoins aucune difficulté pour les résultats de Newton. La situation est différente pour deux autres entrées de la table de Newton qui concernent des expressions $\mathcal{A}(x)$ qui ne s'annulent pour aucune valeur de x. C'est le cas de la ligne 16, pour la position $n = 0$, et de la ligne 17, pour la position $n = 1$. Les expressions $a\mathcal{A}(x)$ correspondantes à ces lignes ne peuvent donc pas — quel que soit leur signe — exprimer

[33]Cf. ci-dessus, pp. 345-352.

[34]Je n'ai pas pris en compte les 36 entrées de droite auxquelles ne correspondent (faute d'un calcul que Newton n'a probablement jamais exécuté) aucune entrée de gauche.

une aire[35]. Comme je l'ai observé ci-dessus, ces lignes ne suffisent pas à montrer que cette table doive être interprétée comme une table de primitive ; elles montrent néanmoins qu'en la rédigeant, Newton a suivi mécaniquement la procédure algorithmique qui conduit de l'expression $\mathcal{A}(x)$ aux équations $F(x,z)=0$ ou $F(x,-z)=0$, en se laissant entraîner par l'automatisme aveugle d'un calcul, sans se préoccuper d'éclairer, cas par cas, la signification géométrique de ses résultats.

6.1.2 La deuxième note : à la recherche d'un invariant algorithmique

Rédigée fort probablement quelques jours plus tard, la deuxième note[36] suit pour l'essentiel le même schéma que la première : l'énoncé et la preuve du théorème de van Heuraet dans sa version adaptée sont suivis par l'énoncé d'une "proposition 1" — un problème, où ce théorème est appliquée à la quadrature des courbes d'équation $3x^2 = az$ et $a^3 = x^2 z$, qui est obtenue grâce aux positions respectives $\mathcal{A}(x) = \frac{x^2}{a^2}$ et $\mathcal{A}(x) = \frac{a^2}{x}$ —, et par la présentation d'une table de quadratures analogue à la précédente, mais beaucoup plus mince, correspondant aux lignes 1 (pour $n = 3,4,5,6$), 4 (pour $n = 1,2,3,4$), 5 (pour $n = 0,1,2,3,4$), 6 (pour $n = 1,2,3$), 26 (pour $n = 1,2,3$), 27 (pour $n = 0,1,2,3,4$), 28 (pour $n = 1,2,3$) et 29 (pour $n = 0,1,2,3,4$) de la table présentée dans l'annexe qui clôt le présent chapitre.

Cette table est divisée explicitement en trois parties. La première (lignes 1 et 4 de la table ci-dessous) concerne la quadrature des courbes "où z n'est que d'une dimension" ; la deuxième (lignes 5 et 6 de la table ci-dessous) concerne la quadrature des courbes "où z est de deux dimensions" ; la troisième (lignes 26-29 de la table ci-dessous) concerne la quadrature des courbes "où z est seulement de trois dimensions"[37]. Cette division me semble être l'indice d'une nouvelle attitude : plutôt que de la concevoir comme un répertoire de quadratures, Newton semble concevoir sa nouvelle table comme un ensemble d'exemples obtenus par l'application d'une méthode générale qui est illustrée dans la proposition qui précède cette même table. Cet effort de généralité apparaît aussi dans la preuve du théorème de van Heuraet : bien que cette preuve soit essentiellement la même que Newton avait déjà donnée dans sa première note, elle est maintenant référée à deux figures[38], où la courbe d'ordonnée $y = \mathcal{A}(x)$ est respectivement représentée comme croissante et nulle pour $x = 0$ (comme dans la figure 1), et comme décroissante et (apparemment) nulle pour $x = +\infty$. Ces

[35] En termes modernes, cela signifie que les fonctions

$$y = \pm a\sqrt{a^2+x^2} = \pm a \int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx + C$$

et

$$y = \pm \frac{a^2}{x}\sqrt{a^2+x^2} = \pm a^4 \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} + C$$

ne peuvent pas exprimer des intégrales définies. Pour ce qui est de la ligne 21, pour la position $n = 0$ — pour laquelle l'entrée de cette ligne se réduit à l'entrée de la ligne 20 pour la même position (que Newton ne considère pas), à la substitution $c \to a$ prés —, et pour la position $n = 1$, il n'est possible de trouver des valeurs de x qui annulent $\mathcal{A}(x)$ qu'à condition que $b \geq 2c$. Rien n'empêche pourtant de supposer cette condition vérifiée.

[36] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [5], 313-317 La première partie de cette note a été aussi reproduite en Newton (C), II 164-166.

[37] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [5], 316-317.

[38] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [5], 314.

deux cas ne sont pas seulement ceux qui correspondent aux deux exemples considérés dans la "proposition 1" et à toutes les entrées de la table de quadratures que Newton présente à la fin de sa note. Ce sont aussi les cas de loin les plus fréquents dans la table, bien plus large, qu'il avait donnée dans sa note précédente, et sont aussi ceux sur lesquels portent les algorithmes de quadrature que Newton avait extraits de son interprétation des méthodes de quadrature de Wallis.

La marque la plus claire de la différence entre l'approche de la première note et celle de la deuxième n'est pourtant pas encore celle-ci. Elle tient plutôt à une courte remarque que Newton insère à la fin de la "proposition 1", avant de passer à la présentation de la table de quadratures[39] :

> If $Ax^{\mu} = Bz^{\nu}$. (μ and ν being numbers that signifie the dimensions of x and z), then $\frac{\nu xz}{\nu+\mu} = \mathsf{Apn}$ [fig. 1], the area of the line AWn. And if $A = B \times x^{\mu} \times z^{\nu}$. then is $\frac{\nu xz}{\nu-\mu} = \mathsf{Apn}$, that line.

Pour comprendre comment Newton aurait pu démontrer ceci, en employant sa méthode fondée sur le théorème de van Heuraet, revenons à la table présentée dans l'annexe qui clôt le présent chapitre.

Si dans la ligne 1 de cette table on opère la substitution $n \to n+1$, on obtient un résultat qui peut être lu comme un cas particulier (pour $\nu = 1$) d'un résultat plus général, dont les lignes 5 et 27 de cette même table présentent d'autres cas particuliers (respectivement pour $\nu = 2$ et $\nu = 3$), et qu'on pourrait énoncer ainsi :

$$\begin{gathered}\left[(\nu n+1)^{\nu} x^{\nu n-(\nu-1)} = \nu^{\nu} a^{\nu n-(2\nu-1)} z^{\nu}\right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[s\left[\sum\nolimits_0^{\xi} [z]\right] = \left|\frac{\xi^n}{a^{n-1}} \sqrt[\nu]{a^{\nu-1}\xi}\right|\right]\end{gathered} \tag{6.8}$$

(où n et ν sont deux nombres entiers strictement positifs, ξ étant strictement positif lorsque ν est pair). Il n'est d'ailleurs pas difficile de démontrer ce résultat en toute généralité en appliquant la même méthode par laquelle Newton démontre tous les résultats énoncés dans cette table, en partant de la position $\mathcal{A}(x) = \frac{x^n}{a^n} \sqrt[\nu]{a^{\nu-1}x}$. Or, en comparant cette position avec l'équation entière qui apparaît dans l'antécédent de l'implication (6.8), on obtient sans aucune difficulté l'égalité :

$$a\mathcal{A}(x) = \frac{\nu xz}{\nu n+1} \tag{6.9}$$

Il suffit alors de poser $\mu = \nu n - \nu + 1$, pour obtenir :

$$a\mathcal{A}(x) = \frac{\nu xz}{\nu+\mu} \tag{6.10}$$

L'implication (6.8) peut donc se réécrire sous la forme :

$$\begin{gathered}\left[(\nu+\mu)^{\nu} x^{\mu} = \nu^{\nu} a^{\mu-\nu} z^{\nu}\right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[s\left[\sum\nolimits_0^{\xi} [z]\right] = \left|\frac{\nu}{\nu+\mu}\xi\left(z_{\xi}\right)\right| = \left|\frac{\xi^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{a^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}}\right|\right]\end{gathered} \tag{6.11}$$

[39] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [5], 315. Pour des raisons de clarté et d'uniformité avec ma notation précédente, j'écris "A", "B","μ", "ν" et "z", où Newton écrit respectivement "a", "b","m", "n" et "y".

Bien qu'on ait obtenu cette implication en supposant que $\mu = \nu n - \nu + 1$ (d'où il s'ensuit que si $n \neq 1$, μ est plus grand que ν), il est facile de vérifier qu'elle est correcte quels que soient les nombres entiers strictement positifs μ et ν. Il suffit alors de poser $(\nu + \mu)^{\nu} = A$ et $\nu^{\nu} a^{\mu-\nu} = B$, pour obtenir

$$[Ax^{\mu} = Bz^{\nu}] \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} s\left[\sum_{0}^{\xi} [z]\right] & = \left|\dfrac{\nu \xi^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{B^{\frac{1}{\nu}}}\right| = \left|\dfrac{\nu}{A^{\frac{1}{\nu}}} \xi\,(z_{\xi})\right| \\ & = \left|\dfrac{\nu}{\nu+\mu} \xi\,(z_{\xi})\right| \end{array} \right] \tag{6.12}$$

(où μ et ν sont des nombres entiers strictement positifs, A et B sont deux coefficients quelconques, et ξ est strictement positif lorsque ν est pair). C'est justement, en accord avec mon interprétation, le premier des deux résultats énoncés par Newton.

Un argument analogue nous conduit au deuxième résultat. Les lignes 4, 6, 28 et 31 de la table présentée dans l'annexe ci-dessous énoncent des cas particuliers (donnés respectivement par les positions $\nu = 1$, $\nu = 2$, $\nu = 3$ et $\nu = 4$, avec $n \neq 0$, dans ce dernier cas) d'un résultat plus général qu'on pourrait énoncer ainsi :

$$\begin{array}{l} \left[(\nu n - \nu + 1)^{\nu} a^{\nu n + (\nu+1)} = \nu^{\nu} x^{\nu n+1} z^{\nu}\right] \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \left[s\left[\sum_{\kappa}^{\xi} [z]\right] = \left|\dfrac{a^{n+1}}{\xi^{n}} \sqrt[\nu]{a\xi^{\nu-1}}\right|\right] \end{array} \tag{6.13}$$

(où n et ν sont deux nombres entiers strictement positifs, κ étant égal à $\pm\infty$ lorsque ν est impair et à $+\infty$ lorsque ν est pair). Encore une fois, il n'est pas difficile de démontrer ce résultat en toute généralité en appliquant la même méthode par laquelle Newton démontre tous ses résultats, en partant de la position $\mathcal{A}(x) = \frac{a^n}{x^n} \sqrt[\nu]{ax^{\nu-1}}$. En comparant cette position avec l'équation entière qui apparaît dans l'antécédent de l'implication (6.13) on obtient l'égalité :

$$a\mathcal{A}(x) = \frac{\nu x z}{\nu n - \nu + 1} \tag{6.14}$$

En posant $\mu = \nu n + 1$, on obtient :

$$a\mathcal{A}(x) = \frac{\nu x z}{\mu - \nu} \tag{6.15}$$

d'où il s'ensuit que l'implication (6.13) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{array}{l} [(\mu - \nu)^{\nu} a^{\mu+\nu} = \nu^{\nu} x^{\mu} z^{\nu}] \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \left[s\left[\sum_{\kappa}^{\xi} [z]\right] = \left|\dfrac{\nu}{\mu-\nu} \xi\,(z_{\xi})\right| = \left|\xi^{1-\frac{\mu}{\nu}} a^{\frac{\mu+\nu}{\nu}}\right|\right] \end{array} \tag{6.16}$$

De la position $\mu = \nu n + 1$, il s'ensuit, quel que soit n, la condition $\mu > \nu$. Si cette condition n'est pas respectée, l'expression (6.15) ne s'annule pas pour $x = \pm\infty$, mais pour $x = 0$, si $\mu < \nu$, ou jamais, si $\mu = \nu$. L'implication (6.16) n'est donc correcte que si $\mu \neq \nu$; si $\mu < \nu$, on doit poser $\kappa = 0$ (avec $\xi > \kappa$, si ν est pair) ; si $\mu < \nu$ et ν impair, il faut poser en revanche $\kappa = \pm\infty$; finalement, si $\mu < \nu$ et ν pair, il faut poser $\kappa = +\infty$. Si ces conditions sont respectées, il suffit de poser dans cette égalité $(\mu-\nu)^{\nu} a^{\mu+\nu}=A$ et $\nu^{\nu}=B$ pour obtenir :

$$[A=Bx^{\mu}z^{\nu}]\Rightarrow\left[\begin{array}{ll} s\left[\sum_{\kappa}^{\xi}[z]\right] & =\left|\xi^{1-\frac{\mu}{\nu}}\dfrac{A^{\frac{1}{\nu}}}{\mu-\nu}\right|=\left|\dfrac{B^{\frac{1}{\nu}}}{\mu-\nu}\xi\left(z_{\xi}\right)\right| \\ & =\left|\dfrac{\nu}{\nu-\mu}\xi\left(z_{\xi}\right)\right| \end{array}\right] \tag{6.17}$$

(où A et B sont deux coefficients quelconques et μ et ν deux nombres entiers strictement positifs quelconques, différents entre eux). C'est, en accord avec mon interprétation, le deuxième des deux résultats énoncés par Newton.

Si, au lieu de passer par les substitutions précédentes, on veut obtenir d'emblée ces deux résultats en suivant la méthode dont Newton s'est servi pour obtenir les résultats qu'il énonce dans ces tables, on doit partir des positions

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x)&=\frac{1}{A}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{\nu}}\frac{\nu}{\nu+\mu}x^{\frac{\nu+\mu}{\nu}} \\ \mathcal{A}(x)&=\frac{1}{A}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{\nu}}\frac{\nu}{\nu-\mu}x^{\frac{\nu-\mu}{\nu}} \end{aligned} \tag{6.18}$$

et supposer que $K=A$. Les positions

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x)&=\frac{1}{K}\frac{\nu}{\nu+\mu}xz \\ \mathcal{A}(x)&=\frac{1}{K}\frac{\nu}{\nu-\mu}xz \end{aligned} \tag{6.19}$$

ne conduisent en effet au résultat cherché qu'à condition de connaître *a priori* l'expression de z en termes de x, qui n'apparaît en revanche qu'à la fin. Les positions (6.18) sont pourtant, en tant que telles, loin d'être naturelles. C'est pourquoi les deux résultats de Newton apparaissent, aux yeux d'un mathématicien moderne, non pas comme des conséquences de la procédure à rebours fondée sur le théorème de van Heuraet, mais plutôt comme des conséquences d'une règle directe de quadrature, telle que celle-ci[40] :

$$s\left[\sum_{\kappa}^{\xi}\left[Kx^{\pm\frac{\mu}{\nu}}\right]\right]=K\left|\frac{\nu}{\nu\pm\mu}\xi^{\frac{\nu\pm\mu}{\nu}}\right|=\left|\frac{\nu}{\nu\pm\mu}\left[\left(K\xi^{\pm\frac{\mu}{\nu}}\right)\xi\right]\right| \tag{6.20}$$

où μ et ν sont deux nombres entiers positifs quelconques, tels que $\pm\frac{\mu}{\nu}\neq-1$, et : $\kappa=0$ si $\pm\frac{\mu}{\nu}$ est plus grand que -1 ; $\kappa=\pm\infty$ si $\pm\frac{\mu}{\nu}$ est plus petit que -1 et ν impair ; et $\kappa=+\infty$ si $\pm\frac{\mu}{\nu}$ est plus petit que -1 et ν pair. Mise à part la considération de la valeur absolue, cette règle n'est qu'un cas particulier des algorithmes exprimés par les égalités (4.33) et (4.36).

Il me semble pourtant que si on en concluait que Newton a effectivement tiré ses résultats d'une application de ces algorithmes, l'on confondrait l'effet avec la cause. Loin de le conduire à ces résultats, la règle (6.20) ne semble apparaître implicitement dans sa note

[40]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [5], note (87), 315.

que comme une expression compacte de ceux-ci. Pour y parvenir, celui-ci a probablement suivi un argument similaire à ce que j'ai esquissé ci-dessus. Cette hypothèse est d'ailleurs confirmé par l'extrait de la première table de quadratures qui constitue la deuxième table, où (mises à part les résultats relevant des lignes 26 et 29 de la table donnée dans l'annexe) on ne retrouve que des résultats auxquels cet argument se réclame.

Cette règle constitue, il me semble, l'acquis essentiel de la deuxième des deux notes de Newton. Si dans la première, ce dernier avait surtout visé la rédaction d'une table propre à fournir d'emblée la quadrature d'une large classe de courbes, il semble viser dans la deuxième la mise en lumière des invariants algorithmiques de cette table, et chercher quelques règles générales. Le fait que la règle à laquelle il parvient correspond finalement à celle qu'on aurait pu trouver en étendant à des exposants rationnels quelconques (différents de -1) l'algorithme de quadrature pour des courbes d'équation $z = Kx^n$ (n étant un nombre entier différent de -1) qu'il avait tiré de son interprétation des résultats de Wallis, prouve la légitimité d'une telle extension, et montre surtout la compatibilité des deux procédures de quadrature à laquelle Newton était parvenu en réfléchissant respectivement sur les méthodes de Wallis et sur le théorème de van Heuraet.

6.2 Entre l'été et l'automne 1665 : une nouvelle esquisse d'un traité sur quadratures et développements binomiaux

Après être parvenu, en suivant deux parcours bien distincts, d'un côté aux résultats exprimés par les égalités (6.12) et (6.17), et à tous ceux énoncés dans la table de quadratures contenue dans la première des deux notes précédentes, et de l'autre aux quadratures par série que j'ai présentées dans le chapitre 4, il est naturel que Newton ait cherché à réunifier ces deux parcours pour parvenir à une théorie unitaire des quadratures finitaires ou infinitaires. C'est le but qu'il poursuit dans la nouvelle esquisse d'un traité de quadrature qui constitue le sixième des six fragments dont j'ai parlé au début du présent chapitre[41], et qui remonte, fort probablement à la fin de l'été ou au début de l'automne 1665.

6.2.1 La nouvelle esquisse

Newton présente son traité comme l'exposition d'une "méthode pour trouver le aires de ces lignes qui peuvent être carrées"[42]. Cette exposition tient en huit propositions, auxquelles il aurait certes pu en ajouter d'autres[43], mais qui constituent, en tant que telles, un ensemble clôturé.

Les trois premières visent à introduire l'algorithme de quadrature exprimé par l'égalité (6.20), c'est-à-dire à démontrer cette égalité.

J'ai ci-dessus observé que si on veut parvenir à démontrer les implications (6.12) et (6.17) grâce à cette méthode à rebours, on doit supposer les égalités (6.18), qui, lorsqu'elles sont posées *a priori*, ne sont certes pas naturelles. En revanche, si ces implications sont connues,

[41] Cf. la note (8), ci-dessus.
[42] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [6], 318.
[43] Cf. la section 6.2.2.

et l'on cherche *a posteriori* des points de départ pour les prouver, ces égalités s'imposent comme le plus naturel des points de départ. Bien qu'elle ne corresponde probablement pas au parcours euristique qui a conduit Newton aux égalités (6.12) et (6.17), cette preuve est ainsi la plus simple qu'on peut imaginer, si on veut se fonder sur le théorème de van Heuraet. Les trois premiers propositions de l'esquisse de Newton présentent justement cette preuve.

La première proposition énonce d'abord, sous une forme légèrement modifiée, l'algorithme général pour la détermination de la sous-normale d'une courbe exprimée, relativement à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par une équation Algébrique quelconque, auquel Newton était parvenu dans le mois de septembre 1664, et qu'il avait démontré[44] le 20 mai 1665 :

> [...] what ever the relation twixt x and y bee, make all the termes equal to nothing, multiply each terme by so many times yy as x hath dimensions in the terme, for a Numerator : then multiply each terme by soe many times $-x$ as y hath dimensions in the terme for a denominator in the valor of v [...][45].

(v étant évidemment la sous-normale). Si la courbe en question est exprimée par l'équation (5.78), cette procédure amène à l'égalité

$$sn._x = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{i} A_{i-j,j}(i-j)x^{i-j}y^{j+2}}{-\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{i} A_{i-j,j}jx^{i-j+1}y^{j}} \tag{6.21}$$

qui est justement équivalente à l'égalité (5.79).

À cette occasion, Newton présente pourtant son algorithme comme une généralisation d'un algorithme plus particulier qui s'applique non pas à une équation entière, mais à une expression Algébrique exprimant l'ordonnée d'une courbe :

$$\left[y = \frac{a}{b}x^{\frac{m}{n}}\right] \Rightarrow \left[sn._x = \frac{mayx^{\frac{m-n}{n}}}{nb}\right] \tag{6.22}$$

(m et n étant évidemment des nombres entiers quelconques[46] et a et b des coefficients constants). Il est facile pour nous de reconnatre dans cette implication la règle qui fournit

[44] Cf. respectivement les sections 5.2 et 5.5.1.

[45] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [6], 318. Pour des raisons d'uniformité j'ai écrit "y" où Newton écrit "z".

[46] Newton qualifie m et n de "nombres exprimant les dimensions" de x ou y [cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [6], 318]. Dans la troisième proposition, il emploie ensuite les même lettres "m" et "n", là où je vais utiliser (pour plus de clarté) les lettres "μ" et "ν", pour indiquer les exposants des deux courbes d'équation $y = \frac{a}{b}x^{\frac{\mu}{\nu}}$ et $y = \frac{a}{b}x^{-\frac{\mu}{\nu}}$. Il semble donc prendre ces "nombres" comme des entiers positifs. Il ne démontre ensuite cette proposition que pour la première de ces courbes, en supposant, de toute évidence, que la preuve aille de même pour la deuxième. Pourtant, pour pouvoir répéter cette même preuve pour cette dernière courbe, en toute généralité (c'est-à-dire autant dans le cas où $\nu > \mu$, que dans le cas où $\nu < \mu$), on doit supposer que l'égalité (6.22) vaut aussi pour des exposants négatifs, ce qu'on déduit d'ailleurs aisément de l'égalité (6.21). Quant à la non homogénéité de l'équation $y = \frac{a}{b}x^{\frac{m}{n}}$, elle semble indiquer que Newton traite cette équation (ainsi que les autres qui interviennent dans les quatre premières propositions de son esquisse) comme un schéma d'équations.

le rapport différentiel d'une puissance rationnelle quelconque de la variable principale :

$$[y = Kx^q] \Rightarrow \left[\frac{dy}{dx} = \frac{sn._x}{y} = Kqx^{q-1}\right] \tag{6.23}$$

(ou q est justement un exposant rationnel quelconque). Pourtant Newton semble concevoir tout simplement sa règle comme une abréviation de l'égalité (6.21) adaptée au cas particulier dont il sera question dans la troisième proposition, par rapport à laquelle la première fonctionne comme un lemme. Ce serait donc une erreur de voir derrière l'énoncé de Newton la présentation d'un opérateur agissant sur des expressions Algébriques telles que Kx^q. Cet opérateur n'apparaîtra qu'une vingtaine d'années plus tard, dans la "Nova methodus"[47] de Leibniz, et il ne jouera aucun rôle dans la future théorie des fluxions de Newton.

La deuxième proposition[48] énonce le théorème de van Heuraet dans sa version adaptée. Newton n'ajoute à cette occasion aucune démonstration, mais se limite à observer que, sous les conditions habituelles de ce théorème, l'ordonnée PN (fig. 1) et le segment constant CE "décrivent des espaces égaux", c'est-à-dire que $\mathsf{APN} = \mathsf{QECA}$. Encore une fois, il fait référence à deux figures, mais si la deuxième de ces figures est essentiellement équivalente à la figure 1 (à laquelle je fais ici référence), la première présente deux courbes qui ne coupent nulle part l'axe des abscisses, de sorte que le triangle curviligne APN se transforme en un trapézoïde à quatre côtés et l'aire du rectangle QECA, et donc de ce même trapézoïde, ne peut être calculée que comme une différence entre deux termes non nuls. Newton semble choisir donc de présenter son théorème sous une forme géométriquement générale, bien qu'il ne l'applique — dans la troisième proposition — qu'à des cas où l'expression de l'aire de la courbe ANZ s'annule soit pour $x = 0$, soit pour $x = \pm\infty$.

Comptant sur les deux premières propositions comme sur autant de lemmes, l'énoncé et la preuve de la troisième proposition sont ceux que j'ai annoncés. Newton y distingue deux cas[49] : dans le premier, il suppose donnée une courbe d'équation $z = \frac{A}{B}x^{\frac{\mu}{\nu}}$; dans le deuxième, il suppose donnée une courbe d'équation $z = \frac{A}{B}x^{-\frac{\mu}{\nu}}$. Il semble ainsi vouloir considérer les exposants μ et ν comme des exposants entiers positifs. Sans faire aucune mention de l'éventualité de devoir recourir à des valeurs absolues, il affirme[50] que l'aire de la première courbe est égale à $\frac{\nu}{\nu+\mu}\xi z_\xi = \frac{A}{B}\frac{\nu}{\nu+\mu}\xi^{\frac{\nu+\mu}{\nu}}$, tandis que l'aire de la deuxième est égale à $\frac{\nu}{\nu-\mu}\xi z_\xi = \frac{A}{B}\frac{\nu}{\nu-\mu}\xi^{\frac{\nu-\mu}{\nu}}$. Pour indiquer ces aires, Newton se réfère à ses figures, en se réclamant des trapézoïdes correspondantes. Pourtant, si dans le deuxième cas on suppose que $\frac{\mu}{\nu}$ est plus grand ou égal à 1, aucune de ces figures ne peut être employée pour représenter l'aire effectivement exprimée par la deuxième de ces expressions, tandis que si on considère le premier cas, ou si l'on suppose dans le deuxième que $\frac{\mu}{\nu}$ est plus petit que 1, alors la deuxième de ces figures sert pour représenter l'aire autant de la première que de la deuxième courbe. La distinction entre les deux cas ne semble donc pas correspondre à une exigence propre à la signification géométrique de l'algorithme.

En s'appuyant sur les prémisses précédentes, la preuve de la proposition n'exige pas non plus cette distinction, car elle se réduit à une pure procédure algorithmique qui reste la même

[47]Cf. Leibniz (1684).

[48]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [6], 318.

[49]Pour plus de clarté, j'écris respectivement "z", "A", "B ", "μ" et "ν", où Newton écrit "y", "a", "b ", "m" et "n" [cf. la note (46), ci-dessus].

[50]Comme d'habitude, Newton ne distingue pas, évidemment, entre x et ξ et entre z et z_ξ.

pour les deux courbes et pour n'importe quelle valeur de $\frac{\mu}{\nu}$. Newton ne considère d'ailleurs que la première courbe, en supposant que la preuve aille de même pour la deuxième. Pour réunifier les deux preuves et éviter de prendre en compte la possibilité d'aires négatives, il suffit d'écrire "$\pm\mu$", à la place de "μ" et de supposer que l'aire en question est exprimée par une valeur absolue. On obtient alors l'argument suivant.

Supposons que l'aire de la courbe donnée est effectivement égale à $\left|\frac{A}{B}\frac{\nu}{\nu\pm\mu}\xi^{\frac{\nu\pm\mu}{\nu}}\right|$ et que cette courbe est liée à une autre courbe d'ordonnée y comme le veut le théorème de van Heuraet, c'est-à-dire la deuxième proposition. Il s'ensuivra, pour cette dernière proposition, que

$$y = \frac{A}{KB}\frac{\nu}{\nu \pm \mu}x^{\frac{\nu\pm\mu}{\nu}} \tag{6.24}$$

(où on aura évidemment posé $\mathsf{AQ} = K$). De là, pour la première proposition, il s'ensuit

$$sn_x = \frac{(\nu \pm \mu)\, A\nu y x^{\frac{\nu\pm\mu-\nu}{\nu}}}{\nu KB\,(\nu \pm \mu)} = \frac{A}{KB}yx^{\pm\frac{\mu}{\nu}} \tag{6.25}$$

et donc :

$$z = K\frac{sn_x}{y} = \frac{A}{B}x^{\pm\frac{\mu}{\nu}} \tag{6.26}$$

ce qu'il fallait démontrer.

En tant que pure procédure algorithmique, cette preuve n'indique pas les limites des aires dont elle traite. Pourtant, elle n'est correcte qu'à condition que ces limites soient celles qui interviennent dans les égalités (6.12) et (6.17). Ces égalités semblent donc exprimer le contenu de la troisième proposition. Quant au cas où l'exposant $\pm\frac{\mu}{\nu}$ prend la valeur -1, Newton garde cette fois le plus strict des silences, encore que l'argument précédent semble exclure ce cas de son domaine de validité.

Cette troisième proposition énonce donc un algorithme de quadrature — ou pour être plus précis, deux algorithmes analogues — qui constituent en même temps une généralisation et une restriction des algorithmes que Newton avait hérités des méthodes de Wallis et présentés lors de la première proposition de sa première esquisse. La généralisation tient au passage à des exposants rationnels quelconques ; la restriction concerne en revanche la prise en compte de courbes dont l'ordonnée n'est exprimée que par un seul terme d'une certaine forme (c'est-à-dire $\alpha x^{\pm\frac{\mu}{\nu}}$, α étant un coefficient constant et μ et ν deux nombres entiers positifs quelconques), et non pas par une somme quelconque de termes d'une forme élémentaire (tels que $\alpha x^{\pm\mu}$, μ étant un nombre entier positif quelconque), comme dans le cas des algorithmes présentés dans la première esquisse. Si l'on restreint ces derniers algorithmes aux cas où les ordonnées des courbes considérées sont exprimées pas un monôme de la forme $\alpha x^{\pm n}$, alors ils sont directement contenus dans les nouveaux algorithmes et sont ainsi démontrés en même temps. En revanche, rien dans l'argument que Newton emploie pour démontrer la troisième proposition de son esquisse ne permet de conclure que les algorithmes qui y sont présentés sont linéaires. Pour prouver ceci, un argument indépendant est nécessaire. C'est l'objet de la quatrième proposition[51].

Si on se limite au cas considéré dans la première esquisse, et que l'on considère des courbes exprimées, respectivement, par des équations telles que $z = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ou

[51] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [6], 319.

$z = \sum_{i=2}^{n} a_i x^{-i}$, alors il n'est guère difficile de répéter le même argument qui conduit à prouver la troisième proposition pour parvenir directement aux égalités (4.97). Pourtant, cet argument ne peut être appliqué à des courbes d'équation $z = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{q_i}$ (où les q_i sont des exposants rationnels quelconques soit tous plus grands, soit tous plus petits que -1) qu'à condition de disposer d'un autre algorithme propre à fournir la sous-normale d'une courbe exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par une équation de la forme

$$y = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{q_i + 1} x^{q_i+1} \tag{6.27}$$

Or, pour dériver cet algorithme de l'égalité (6.21), il faut mettre l'équation (6.27) en forme entière. Newton pensait, sans aucune doute, que cela était toujours possible[52]. Pourtant, il n'avait aucune possibilité de le démontrer, et, *a fortiori*, il ne pouvait pas écrire la forme générale de l'équation entière qu'on obtient en mettant en forme entière l'équation (6.27) et revenir ensuite en arrière, de l'expression rationnelle de la sous-normale à son expression irrationnelle de la forme $\frac{y}{K} \sum_{i=0}^{n} a_i x^{q_i}$. Newton ne pouvait pas non plus espérer de démontrer en général la linéarité de l'algorithme exprimé par l'égalité (6.21), lorsqu'il est référé à des courbes d'équation telles que l'équation (6.27), car, en tant qu'algorithme pour la sous-normale, il n'est pas linéaire. Pour obtenir un algorithme linéaire, il faut passer de l'algorithme de la sous-normale à celui du rapport entre l'ordonnée et la sous-tangente, c'est-à-dire entre l'incrément infiniment petit de l'ordonnée et celui de l'abscisse. Mais j'ai plusieurs fois souligné que, à l'été 1665, Newton n'a pas encore compris la nécessité de dériver de ses résultats un tel algorithme[53], et encore moins de le considérer comme référé non pas à des courbes exprimées pas des équations Algébriques mises en forme entières, mais à des expressions Algébriques quelconques.

Pour démontrer sa quatrième proposition, Newton ne peut donc que recourir à un argument directement géométrique, fondé sur la linéarité non pas de ses algorithmes, mais de la procédure cinématico-géométrique qui conduit à engendrer une surface par translation d'une ordonnée[54] :

> The reason of this prop : is, that the area described by z is also described by its parts[,] that is by the termes of its valor, & what areas those termes describe appears by prop 3^d.

Ce retour obligé à la géométrie est aussi pour Newton l'occasion d'un éclaircissement à propos de la signification géométrique des aires sur lesquelles portent les deux propositions précédentes[55] :

> And in generall if the valor of z consists of severall termes so that x is not of divers dimensions in the denominateur of any terme, than multiply each terme by x & divide it by the number of the dimensions of x [évidemment

[52]Cf. ci-dessus, pp. 56-57.
[53]Cf. par exemple pp. 275-277.
[54]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [6], 319.
[55]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [6], 319.

après la multiplication], all those products shall bee the area of the given line : supposeing also that either none or all the signes of those termes are changed by this operation. For if some bee changed & others bee not they pro[c]eed divers ways & joyne not & then the quantities z or x must bee increased or diminished or otherwis altered.

L' "opération" décrite par Newton entraîne un changement de signe si et seulement si l'exposant du terme considéré est plus petit que -1. Celui-ci soumet ainsi la linéarité de son algorithme à la condition que les exposants des termes considérés soient tous plus grands ou tous plus petits que un, et il reconnaît ainsi implicitement que, à la rigueur, la troisième proposition consiste — comme on l'a anticipé ci-dessus — dans la présentation non pas d'un seul algorithme de quadrature, mais de deux algorithmes analogues concernés par des courbes de nature différente et conduisant à l'expression de différentes sortes d'aires. Quant à la quatrième proposition, elle doit ainsi être exprimée par les égalités suivantes[56] :

$$\begin{aligned} s\left[\sum\nolimits_0^{\xi}\left[\sum_{i=0}^{n} a_i x^{q_i-1}\right]\right] &= \left|\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{q_i}\xi^{q_i}\right| \\ s\left[\sum\nolimits_{\pm\infty}^{\xi}\left[\sum_{i=0}^{n} a_i x^{-q_i-1}\right]\right] &= \left|\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{-q_i}\xi^{q_i}\right| = \left|\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{q_i}\xi^{q_i}\right| \end{aligned} \tag{6.28}$$

(où les q_i sont des exposants rationnels positifs quelconques, éventuellement différents de 1, si, comme il semble nécessaire, on veut exclure la possibilité d'aires infinies).

De cette manière, Newton a ainsi justifié tous les algorithmes de quadrature que, quelques mois auparavant, il avait tirés de son interprétation des méthodes de Wallis. L'intérêt de cette justification ne tient pas au fait qu'elle libère ces algorithmes d'une autre justification (explicite ou implicite) qui se réclame de ces dernières méthodes. Pour autant qu'on eût pu considérer cette justification comme non rigoureuse, elle ne semble pas différer, de manière essentielle, de celle qui supporte le théorème de van Heuraet[57] et de celle qui garantie la validité de l'égalité (6.21), deux démonstrations dont la nouvelle preuve de Newton dépend. Ce qui est bien plus important est que, par cette preuve, Newton lie ces algorithmes à l'algorithme des normales et des tangentes et montre ainsi la possibilité d'une unification de l'ensemble de ses résultats dans une seule théorie nouvelle. En effet, la limite essentielle des

[56]Newton n'écrit en réalité qu'une seule implication, où il ne considère (sans aucune nécessité) qu'une courbe dont l'ordonnée est exprimée par la somme de deux termes :

$$(z = Ax^m + Bx^n) \Rightarrow \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^{n+1}}{n+1} = \mathsf{APNn}$$

le symbole "APNn" (que j'ai référé ici à la figure 1) se référant de toute évidence à un trapézoïde générique, choisi, à chaque tour, de manière convenable. Quant aux lettres "m" et "n", elles indiquent clairement, à cette hauteur du traité, des exposants rationnels quelconques. Si ces exposants sont plus petits que -1, l'expression de l'aire doit être de surcroît prise en valeur absolue.

[57]En se réclamant, lors de l'énoncé de sa deuxième proposition et de la preuve de la quatrième, de l'image d'une surface comme décrite par la translation d'une droite, Newton semble faire référence à l'argument qu'il avait avancé presque une année auparavant en faveur du théorème de van Heuraet [cf. la section (5.1.2), ci-dessus, en particulier pp. 234 et suiv.]. Si on en reste là, l'introduction du mouvement qui génère une surface ne revient pourtant, justement, qu'à l'introduction d'une image heureuse, et ne modifie pas essentiellement le cœur de l'argument originale de van Heuraet, qui, comme ceux de Wallis, ne tient au fond qu'à la méthode des indivisibles.

méthodes de Wallis ne tient pas tant à leur recours à des arguments indivisibilistes, qu'au fait qu'elles considèrent le problème des quadratures comme un problème séparé. En en restant à ces méthodes, la correspondance entre les algorithmes des quadratures et celui des tangentes ne pouvaient qu'apparaître *a posteriori*, comme une curieuse et heureuse analogie formelle. En démontrant les premiers algorithmes comme une conséquence du deuxième, Newton a par contre montré *a priori* la raison de cette correspondance et a fourni celle qui deviendra plus tard la structure de la théorie des fluxions.

* * *

L'ensemble constitué par les quatre propositions précédentes aurait du constituer la première partie du traité de Newton visant à présenter et à justifier des algorithmes de quadratures aussi générales que possible.

En discutant la quatrième de ces propositions, j'ai fait référence à la difficulté posée par des courbes exprimées, par rapport à un certain système de coordonnées cartésiennes (dans ce cas orthogonales), par des équations Algébriques dont la réduction en formes entière n'est pas aisée. Cette difficulté évanouit d'un seul coup lorsqu'on se donne les moyens pour réduire d'emblée ces équations à des équations de la forme

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \tag{6.29}$$

ou, éventuellement,

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{-i} \tag{6.30}$$

Encore qu'infinitaires, ces équations sont en fait des équations entières, et, du moins du point de vue algorithmique, se soumettent sans difficulté à l'application de ces formalismes. La possibilité d'opérer des translations convenables aptes à assurer que la variation de x se fasse à l'intérieur d'un intervalle où les séries intervenant dans ces équations sont convergentes[58], assure de surcroît que cette application ne conduise pas, du moins localement, à de fausses conclusions, et permet donc de faire confiance aux conclusions auxquelles elle mène.

Bien que le but que la quatrième proposition de la première esquisse d'un traité sur quadratures et développement binomiaux que Newton avait rédigé quelques jours auparavant[59] visait au sein du parcours argumentatif suivi par cette esquisse soit désormais rendu caduc par la structure de la deuxième esquisse, cette proposition semble fournir justement les moyens pour réduire des équations Algébriques non entières de la forme $y = f(x)$ à des équations de la forme (6.29). Ou du moins, elle permet d'entrevoir ces moyens. Ce n'est donc pas surprenant que Newton revient, dans la deuxième partie de sa nouvelle esquisse, sur le contenu de cette proposition et sur les conséquences qu'il est possible d'en tirer. D'abord Newton consacre la cinquième et la sixième propositions[60] à exposer ce contenu sous une forme nouvelle et simplifiée. Ensuite, il présente explicitement, dans la septième et

[58]Cf. ci-dessus, p. 216.
[59]Cf. la section 4.4.2, en particulier pp. 218-221.
[60]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [6], 320.

l'huitième propositions[61], le développement binomiale pour des exposants rationnels quelconques, positifs ou négatifs.

Le contenu de la quatrième proposition de la première esquisse tenait à l'égalité (4.118), présentant la forme générale de n'importe quel coefficient binomial. Ce coefficient est exprimé en termes de trois indices se référant à une matrice résultant de la matrice (4.102) par interpolation d'un nombre quelconque de colonnes entre deux colonnes successives de celle-ci : les indices i et μ, indiquant respectivement la ligne et la colonne de cette dernière matrice auxquelles appartient ce coefficient, et l'indice η indiquant le nombre de colonnes interpolées dans la matrice (4.102) pour obtenir cette nouvelle matrice. La nature de cette dernière matrice fait que ces trois indices indiquent en même temps la place de ce coefficient dans le développement considéré, et le numérateur et le dénominateur de l'exposant rationnel auquel ce même développement est référé. La simplification proposée par Newton consiste dans le fait de remplacer la matrice (4.102) par une suite d'équations entre deux variables, dont chacune correspond à une ligne de cette même matrice. Ces équations — qu'aujourd'hui nous dirions "diophantiennes" — sont construites de telle manière qu'une des deux variables, disons y, exprime les entrées de la ligne de telle matrice qui correspond à l'équation dans laquelle elle intervient, tandis que l'autre, disons x, exprime la colonne à laquelle appartiennent ces entrées. Le rôle de l'indice i est assumé ainsi par un autre indice (qu'on indiquera ci-dessus par le même symbole) qui donne la position d'une de ces équations dans la suite d'équations à laquelle elle appartient, tandis que la variable x assume le rôle de l'indice j dans la matrice (4.102). Cela permet de retrouver l'égalité (4.118) en tant qu'expression d'une forme de ces équations, invariant sous les interpolations de la matrice (4.102).

Bien que Newton dénote les deux variables intervenant dans ces équations par les lettres "x" et "y", et qu'une fois qu'on les réfère à la matrice (4.102), ces variables fonctionnent de manière analogue à deux coordonnées (dont l'une varie sur l'ensemble des nombres entiers, et l'autre prend les valeurs des coefficients binomiaux correspondant aux valeurs prises par la première), il est clair qu'il ne s'agit pas ici d'équations propres à l'Algèbre des segments. Ces équations tiennent plutôt à une Algèbre des nombres entiers, qu'on pourrait penser comme une restriction de l'Algèbre numérique. Elles sont d'ailleurs construites de telle manière que, la variable x ne prenant que des valeurs entières, la variable y ne prend, elle-aussi, que des valeurs entières. En énonçant sa cinquième proposition, Newton se réfère à ces équations comme à des "lignes géométriques"[62]. Il semble vouloir souligner de cette manière l'équivalence entre le formalisme dont elles dépendent et le formalisme dont dépendent les équations Algébriques exprimant des courbes. Dans mon langage, cela signifie qu'il les traite comme des objets *algébriques*.

La manière dont Newton est parvenu à construire la suite récurrente d'équations peut seulement être imaginée. Un parcours possible pourrait être le suivant.

Si l'on considère les deux premières lignes de la matrice (4.102), il est d'abord aisé de voir que la relation qui lie j et $G_{[i,j]}$ est donnée respectivement par les égalités $G_{[0,j]} = 1$ et $G_{[1,j]} = j$. Si on pose $G_{[i,j]} = y_i$ $(i = 0, 1)$ et $j = x$, on obtient respectivement les équations :

$$\begin{array}{l} y_0 = 1 \\ y_1 = x \end{array} \tag{6.31}$$

[61] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [6], 321.
[62] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [6], 320.

En appliquant itérativement l'égalité (4.50) — qui exprime la loi de formation des entrées de cette matrice — à elle-même, et en observant que si $i > j$, alors $G_{[i,j]} = 0$, on obtient :

$$G_{[i,j]} = \sum_{h=i-1}^{j-1} G_{[i-1,h]} \tag{6.32}$$

De là, on a ensuite, récursivement,

$$\begin{aligned}
G_{[2,j]} = \sum_{h=1}^{j-1} G_{[1,h]} \quad &= \sum_{h=1}^{j-1} h \\
&= \frac{j(j-1)}{2} \\
G_{[3,j]} = \sum_{h=2}^{j-1} G_{[2,h]} \quad &= \sum_{h=2}^{j-1} \frac{h(h-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{j\,(j-1)\,(j-2)}{3}\right] \\
G_{[4,j]} = \sum_{h=3}^{j-1} G_{[3,h]} \quad &= \sum_{h=3}^{j-1} \frac{1}{2}\left[\frac{\left(h^2-h\right)(h-2)}{3}\right] \\
&= \frac{1}{3!}\left[\frac{j\,(j-1)\,(j-2)\,(j-3)}{4}\right] \\
\dots \qquad\qquad &\dots
\end{aligned} \tag{6.33}$$

et donc, en opérant les mêmes substitutions qui conduisent aux égalités (6.31),

$$\begin{aligned}
2y_2 &= x(x-1) \\
3!y_3 &= x\,(x-1)\,(x-2) \\
4!y_4 &= x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3) \\
\dots
\end{aligned} \tag{6.34}$$

qui se succèdent selon la loi récursive suivante :

$$iy_i = y_{i-1}[x-(i-1)] \tag{6.35}$$

(où on aura posé $i = 1, 2, \dots;\ y_0 = 1$ et $0! = 1$). En opérant les multiplications, on aura alors successivement les équations :

$$\begin{array}{llllllll}
1!y_0 = & 1x^0 & & & & & & \\
1!y_1 = & 1x^1 & -0x^0 & & & & & \\
2!y_2 = & 1x^2 & -1x & +0x^0 & & & & \\
3!y_3 = & 1x^3 & -3x^2 & +2x & -0x^0 & & & \\
4!y_4 = & 1x^4 & -6x^3 & +11x^2 & -6x & +0x^0 & & \\
5!y_5 = & 1x^5 & -10x^4 & +35x^3 & -50x^2 & +24x & -0x^0 & \\
6!y_6 = & 1x^6 & -15x^5 & +85x^4 & -225x^3 & +274x^2 & -120x & +0x^0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \quad \ddots
\end{array} \tag{6.36}$$

qui sont justement celles écrites par Newton, à l'occasion de sa cinquième proposition.

Après avoir écrit ces équations, celui-ci observe que leur nature est telle que[63] "chaque figure, multipliée par le nombre de dimensions de x dans le premier terme, étant soustraite de la figure qui la suit, est égale à la figure sous la figure suivante." Ces "figures" sont évidemment les coefficients de x dans ces équations. Si on dénote ces coefficients par le symbole "$C_{[i,i-k]}$" ($i = 0, 1, 2, \ldots; k = 0, 1, \ldots, i$), chacune de ces équations peut être écrite sous la forme

$$i!y_i = \sum_{k=0}^{i} C_{[i,i-k]} x^{i-k} \tag{6.37}$$

L'observation de Newton revient donc à reconnaître que ces coefficients satisfont la loi récursive :

$$C_{[i,i-k]} = C_{[i-1,i-k-1]} - (i-1)C_{[i-1,i-k]} \tag{6.38}$$

avec $C_{[i,i]} = 1$ pour tout i et $C_{[i,0]} = 0$ pout tout i plus grand que 0. En appliquant cette loi, il est ainsi possible de déterminer récursivement tous ces coefficients et d'obtenir, l'une après l'autre, toutes les équations précédentes.

Lors de sa cinquième proposition, Newton ne se limite pas à écrire les équations précédentes et à indiquer leur loi de formation ; il affirme de surcroît[64] que, grâce à ces équations, "tous les termes intermédiaires peuvent être trouvés." Cela revient à dire que si dans ces équations on pose $x = \frac{\mu}{\eta}$ (μ et η étant deux nombres entiers quelconques, dont le deuxième strictement positif), alors on obtient, en tant que valeur de y_i, l'entrée $G_{[i,\frac{\mu}{\eta}]}$ de la matrice qu'on obtient de la matrice (4.102) lorsque l'on insère $\eta - 1$ colonnes entre chaque couple de colonnes successives de cette matrice. Dans la sixième proposition, Newton ne fait qu'observer qu'une fois résolue la recursion, ces équations se réduisent aux équations (6.34), de sorte qu'on obtient

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{\frac{\mu}{\eta}\left(\frac{\mu}{\eta}-1\right)\left(\frac{\mu}{\eta}-2\right)\ldots\left(\frac{\mu}{\eta}-(i-1)\right)}{i!} \\ &= \prod_{h=1}^{i} \frac{\mu-(h-1)\eta}{h\eta} \end{aligned} \tag{6.39}$$

(i étant un nombre entier strictement positif quelconque), ce qui est équivalent à l'égalité (4.118).

Si l'on suppose que Newton a tiré les équations (6.36) en suivant le parcours que je viens d'indiquer, alors la sixième proposition est déjà contenue implicitement dans la cinquième. De plus, l'extension de ces équations au cas où x est un nombre fractionnaire quelconque ne s'appuie sur aucune supposition préalable et n'est donc que postulée sans aucune justification[65]. Certes, la justification que Newton avait donné pour l'égalité (4.118) lors de sa première esquisse ne pouvait pas non plus, à la rigueur, être qualifiée de preuve, car elle ne portait au fond que sur une autre supposition, celle de l'invariance, sous interpolation, de la forme de la matrice (4.49) exprimée par le schéma de matrices (4.113). Pourtant, cette

[63]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [6], 320.

[64]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [6], 320.

[65]Ainsi reformulé, l'argument de Newton ne ferait que suivre, pour l'essentiel, le parcours plus simple dont j'ai parlé à la fin du chapitre 4 [cf. la section 4.4.2, en particulier p. 221].

dernière justification ne prend pas, d'elle même, la forme d'une pétition de principes. Si on veut que la justification de l'égalité (6.39) prenne la forme d'une preuve, il faut supposer que le parcours qui amène Newton à écrire les équations (6.36) fut essentiellement distinct du précédent. Si celui-ci ne se préoccupe pas de l'indiquer, c'est évidemment que plus qu'à la justification de ses propositions, il tient à la forme sous laquelle celles-ci permettent de reformuler le contenu de la quatrième proposition de la première esquisse : non pas comme une loi de formation des entrées d'une certaine famille de matrices, mais comme un schéma d'équations à deux variables, dont l'une — qui est prise comme variable principale, $x = \frac{\mu}{\eta}$ — indique d'emblée un exposant fractionnaire. Cet exposant est évidemment celui de la puissance du binôme dans le développement duquel interviennent les coefficients y_i ; l'indice i indique alors la place de ce coefficient dans un tel développement.

Ceci est confirmé par la septième et l'huitième propositions[66] qui sont les plus naturelles des conséquences de la cinquième et de la sixième, car elles énoncent, pour la première fois[67] de manière explicite, la loi du développement binomial, que Newton n'avait en revanche pas explicité lors de sa première esquisse[68]. $\frac{\mu}{\eta}$ étant n'importe quel exposant fractionnaire positif, la septième proposition fournit le développement de $(a+b)^{\frac{\mu}{\eta}}$ et la huitième celui de $(a+b)^{-\frac{\mu}{\eta}}$:

$$\begin{aligned}(a+b)^{\pm\frac{\mu}{\eta}} &= a^{\pm\frac{\mu}{\eta}} \pm \frac{\mu}{\eta}\frac{b}{a}a^{\pm\frac{\mu}{\eta}} + \frac{\mu\,(\mu \mp \eta)}{2\eta^2}\frac{b^2}{a^2}a^{\pm\frac{\mu}{\eta}} \\ &\quad \pm \frac{\mu\,(\mu \mp \eta)\,(\mu \mp 2\eta)}{3!\eta^3}\frac{b^3}{a^3}a^{\pm\frac{\mu}{\eta}} + \&c.\end{aligned} \tag{6.40}$$

L'usage des symboles "a" et "b" semble indiquer que Newton pense ses deux égalités comme des schémas d'égalités référés à tout binôme qu'on peut construire en sommant deux termes quelconques — a et b, justement — auxquels s'appliquent le lois des l'*algèbre*. Il semble donc concevoir son résultat comme l'introduction d'une nouvelle opération *algébrique*, qu'il sera ensuite possible d'appliquer à toute Algèbre particulière. Ceci semble confirmé par les quatre arguments que Newton avance pour justifier ces propositions : d'abord, il observe que "la vérité" de celles-ci "apparaît" soit par comparaison avec les propositions précédentes, soit "par un calcul [*by calculation*]" — si $\pm\frac{\mu}{\eta}$ est un nombre entier positif ou, sinon, à condition que b soit plus petit que a —; ensuite, il ajoute que cette même "vérité" peut aussi être démontrée — lorsque $\pm\frac{\mu}{\eta} = -1$ ou $\pm\frac{\mu}{\eta} = \frac{1}{2}$ — en exécutant la division ou l'extraction de racine, comme si a et b "étaient des nombres décimaux", ou, enfin, en multipliant la série ainsi obtenue par $a+b$ — dans le premier cas — ou en calculant son carré — dans le deuxième cas.

Par le premier de ces arguments Newton affirme tout simplement que la septième et l'huitième propositions sont des corollaires de la cinquième et de la sixième. Les trois arguments restant semblent ainsi viser, plus qu'à fournir une preuve indépendante de ces propositions, à confirmer *a posteriori* la validité de cette déduction, en montrant qu'en assignant au développement binomial les coefficients résultant de l'interpolation opérée dans la cinquième et la sixième propositions on obtient un résultat compatible avec les lois de l'*algèbre*.

[66] Cf. la note (61), ci-dessus.

[67] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [6], 321, note (111).

[68] C'est une autre des raisons qui pourraient nous faire penser que Newton a abandonné la rédaction de sa première esquisse lorsqu'il a compris la possibilité d'exposer les mêmes résultats sous une forme plus satisfaisante, celle qu'il a choisie pour sa deuxième esquisse.

Ces arguments sont néanmoins essentiellement différents les uns des autres. Le deuxième et le quatrième ne peuvent que confirmer un résultat qu'on doit déjà avoir obtenu ; le troisième permet d'obtenir ce même résultat différemment, mais, comme le quatrième, il ne s'applique qu'à des cas fort particuliers.

Considérons d'abord le quatrième argument. Si $\pm\frac{\mu}{\eta} = -1$ ou $\pm\frac{\mu}{\eta} = \frac{1}{2}$, en appliquant l'égalité (6.40), on obtient respectivement :

$$\begin{aligned}(a+b)^{-1} &= \frac{u}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \&c. \\ (a+b)^{\frac{1}{2}} &= a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{b}{a}a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}a^{\frac{1}{2}} + \&c.\end{aligned} \tag{6.41}$$

(u étant l'unité propre au domaine de quantités considéré). Or, si on multiplie les deux membres de la première égalité par $a+b$ on obtient :

$$u = u + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \&c. \tag{6.42}$$

En revanche, si on élève au carré les deux membres de la deuxième, on a :

$$\begin{array}{llllll} a+b & = a+b & -\frac{1}{4}\frac{b^2}{a} + \frac{1}{8}\frac{b^3}{a^2} & -\frac{5}{64}\frac{b^4}{a^3} & +\&c. & \\ & & +\frac{1}{4}\frac{b^2}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^3}{a^2} & +\frac{1}{16}\frac{b^4}{a^3} & +\&c. & \\ & & & +\frac{1}{64}\frac{b^4}{a^3} & -\frac{1}{64}\frac{b^5}{a^4} + \&c. & \\ & & & & +\left(\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}a^{\frac{1}{2}} + \&c\right)^2 & \end{array} \tag{6.43}$$

Newton suppose donc que les termes des deux séries intervenant dans ces égalités continuent indéfiniment à se simplifier, de sorte que celles-ci se réduisent aux égalités identiques $u = u$ et $a + b = a + b$. Si on se contente de réitérer la procédure pour un nombre fini de pas, quel que soit ce nombre, celle-ci n'est qu'une conséquence des lois de l'*algèbre*. Cette dernière ne peut pourtant guère garantir que, lorsque l'on s'arrête, les termes qui n'ont pas encore été éliminés puissent être négligés de sorte que cette possibilité indéfinie de simplification puisse être prise comme une preuve de la nullité de la somme de ces termes.

L'argument de Newton semble pourtant dans ce cas être purement formel. Il ne revient qu'à observer la compatibilité formelle entre les égalités (6.41) et (6.42) et les lois de l'*algèbre*. En affirmant que la vérification de cette compatibilité est un argument qui peut servir pour supporter le résultat exprimé par l'égalité (6.40), il fait confiance de surcroît à une sorte de stabilité formelle de cette égalité sous la variation de la valeur de l'exposant qui y intervient.

De ce point de vue, la situation est analogue pour le troisième argument. Celui-ci se réclame de deux procédures récursives permettant de engendrer indéfiniment les termes successifs des développements qui apparaissent respectivement dans les égalités (6.41) et (6.42). La première de ces procédures deviendra célèbre sous le nom de "méthode de Mercator", car

N. Mercator l'exposera publiquement pour la première fois dans sa *Logarithmotechnia*[69]. Il s'agit tout simplement de diviser u par a, de calculer le reste entre le quotient ainsi obtenu et celui de la division de u par $a+b$, de diviser ce reste par a, de calculer le nouveau reste, et de continuer ainsi indéfiniment :

$$\begin{array}{llll|l}
u & & & & a+b \quad = \dfrac{u}{a} - \dfrac{b}{a^2} + \dfrac{b^2}{a^3} - \ldots \\
\hline
-u - \frac{b}{a} = & -\frac{b}{a} & & & \\
\cline{1-2}
& +\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} = & \frac{b^2}{a^2} & & \\
\cline{2-3}
& & -\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^2} = & -\frac{b^3}{a^2} & \\
\cline{3-3}
& & & \ldots &
\end{array} \tag{6.44}$$

Il est clair que cette procédure peut être appliquée quels que soient les termes a et b. En particulier, ces termes peuvent être à leur tour des polynômes ou n'importe quelles autres expressions *algébriques*[70]. Aussi générale qu'elle puisse apparaître, cette méthode ne permet pourtant, en tant que telle, de justifier l'égalité (6.40) que dans le cas où $\pm\frac{\mu}{\eta} = -1$.

[69]Cf. Mercator (1668), par. XV, 29-30. L'histoire est bien connue [cf. par exemple Newton (MP), II, **2**, *Introduction*, 165-166, Westfall (1980), 242-243 and Hall (1992), 82-83] : lorsque Newton prit connaissance de l'œuvre de Mercator (en 1669), et il s'aperçut que ce dernier avait obtenu des développements en séries en employant des techniques similaires à celles qu'il avait lui-même employées quelques années auparavant il se décida à rendre publics certains de ses résultats en matière de quadratures et développements binomiaux. Il composa ainsi le *De analysi*— dont le plan général rappelle d'ailleurs celui de l'esquisse dont il est ici question — et le montra à Barrow qui l'envoya ensuite à Collins. Mais il ne le publia pas par la suite. À cette occasion, il exposa explicitement la méthode de Mercator [cf. Newton (MP), II, **2**, 3, 212-214], en allant bien au delà de la brève indication contenue dans l'esquisse dont il est ici question. Deux ans plus tard, il fit de même dans le *De Methodis* [cf. Newton (MP), III, **1**, 2, § 3, 36-38], qu'il ne publia pas non plus.

[70]Voici comment il est possible de présenter cette procédure dans les termes d'un algorithme récursif. En posant

$$\frac{u}{a+b} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$$

on aura :

$$A_i = \frac{R_i}{a}$$

avec $R_0 = u$, et pour $i \geq 1$,

$$R_i = R_{i-1} - \Gamma_{i-1} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_i = A_i(a+b)$$

Pour résoudre la récurrence, il suffit d'observer que

$$\Gamma_i = \frac{R_i}{a}(a+b) = R_i + R_i\frac{b}{a}$$

et donc, si $i > 0$:

$$R_i = R_{i-1} - R_{i-1} - R_{i-1}\frac{b}{a} = -R_{i-1}\frac{b}{a}$$

et

$$A_i = -\left(R_{i-1}\frac{b}{a}\right)\frac{1}{a} = -\left(aA_{i-1}\frac{b}{a}\right)\frac{1}{a} = -A_{i-1}\frac{b}{a}$$

Comme $A_0 = \frac{u}{a}$, de là il s'ensuit, si $i \geq 1$:

$$A_i = (-)^i\frac{b^i}{a^{i+1}}$$

Comme on le voit, à chaque division on néglige b, de sorte que la série résultante n'est convergente que si b est plus petit que a. Pourtant, il est facile d'observer que a et b ne jouent pas le même rôle dans cet algorithme

Si $\pm\frac{\mu}{\eta} = -n$ (n étant un nombre entier positif), il faut, pour retrouver l'égalité (6.40) par le biais de cette méthode employer cette même égalité dans le cas finitaire et récrire $(a+b)^n$ sous la forme d'un polynôme. Il suffira à ce point d'opérer les substitutions

$$\begin{aligned} a &\rightarrow a^n \\ b &\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left[\prod_{h=1}^{i} \frac{n-(h-1)}{h} \right] a^{n-i} b^i \end{aligned} \tag{6.45}$$

et d'appliquer la méthode, pour obtenir :

$$\begin{aligned} (a+b)^{-n} &= \left(a^n + \sum_{i=1}^{n} \left[\prod_{h=1}^{i} \frac{n-(h-1)}{h} \right] a^{n-i} b^i \right)^{-1} \\ &= a^{-n} - n\frac{b}{a}a^{-n} + \frac{n(n+1)}{2!}\frac{b^2}{a^2}a^{-n} \\ &\qquad - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\frac{b^3}{a^3}a^{-n} + \&c. \end{aligned} \tag{6.46}$$

qui correspond justement à l'égalité (6.40) pour $\pm\frac{\mu}{\eta} = -n$. La loi de formation des coefficients est pourtant assez difficile à déterminer par cette voie. Dans ce cas, la méthode de Mercator ne permet que de confirmer *a posteriori* cette dernière égalité pour ce qui est de ses premiers coefficients.

Si $\pm\frac{\mu}{\eta}$ est un exposant fractionnaire, la méthode de Mercator peut servir, tout au plus, pour passer du développement de $(a+b)^{\frac{\mu}{\eta}}$ à celui de $(a+b)^{-\frac{\mu}{\eta}}$, mais elle ne peut guère permettre d'obtenir (ou même seulement de justifier) le premier de ces développements. Lorsque $\eta = 2$, on peut avoir recours à la deuxième des deux procédures récursives utilisé dans le troisième argument de Newton. Cette procédure est évidemment plus complexe que la précédente et ne sera présentée de manière explicite par Newton que dans le *De analysi*, et, plus tard, dans le *De methodis*[71]. Voici comment elle pourrait être présentée en général.

Le binôme $(a+b)$ étant donné, il s'agit de calculer les termes A_i intervenant dans l'égalité

$$\sqrt{a+b} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \tag{6.47}$$

Cela peut être fait en procédant comme suit :

i) on calcule A_0 comme la racine carrée de a ;

ii) on calcule le premier reste, $R_1 = a + b - (\sqrt{a})^2 = b$;

iii) on applique à R_1 l'algorithme inverse de celui qui fournit le deuxième terme de la puissance 2 d'un binôme, c'est-à-dire qu'on cherche un x tel que $(\sqrt{a}+x)^2 = a + R_1 + x^2$, ce qui donne $x = \frac{R_1}{2\sqrt{a}}$;

(comme Newton l'avait déjà implicitement observé lors de la deuxième proposition de sa première esquisse [cf. la section, 4.4.2, en particulier, p. 216]). Cet algorithme donne ainsi des résultats différents — soumis à des conditions différentes de convergence —, si on l'applique au quotient $\frac{u}{a+b}$ ou si on l'applique au quotient $\frac{u}{b+a}$. Il peut donc être appliqué pour déterminer des développements convergents de tout quotient de la forme $\frac{u}{a+b}$ (avec $a \neq b$).

[71]Cf. respectivement Newton (MP), II, **2**, 3, 214-216 et Newton (MP), III, **1**, 2, § 2, 40-42 ; cf. aussi la note (69), ci-dessus.

iv) on pose $x = A_1$;

v) on considère le binôme $A_0 + A_1$ et on calcule sa racine carrée sans le premier terme, ce qui donne $\Gamma_1 = 2A_0A_1 + 2A_1^2$;

vi) on calcule le deuxième reste par différence, $R_2 = R_1 - \Gamma_1$;

vii) on répète le pas (*iii*) sur R_2 pour trouver A_2 ;

viii) on continue ainsi indéfiniment, en posant $\Gamma_i = 2A_0\,(A_1 + ... + A_i) + 2A_1^2$ et non pas $\Gamma_i = 2A_0\,(A_1 + ... + A_i) + 2\,(A_1 + ... + A_i)^2$, et en ne considérant dans la recherche de A_i que le premier terme de R_i.

Si on note par le symbole "$[R_i]_{i-1}$" le coefficient de $a^{-(i-1)}$ dans le polynôme qui exprime R_i, c'est-à-dire le terme de ce polynôme où a apparaît à la puissance la plus grande, cette procédure fournit les égalités suivantes :

$$\begin{gathered} A_0 = \sqrt{a} \qquad A_i = \frac{[R_i]_{i-1}}{2\sqrt{a}} \quad (i = 1, 2, ...) \\ R_0 = a + b \qquad R_i = R_{i-1} - \Gamma_{i-1} \quad (i = 1, 2, ...) \\ \Gamma_i = 2A_i \left[\sum_{j=1}^{i-1} A_j \right] + A_i^2 \quad (i = 0, 1, 2, ...) \end{gathered} \tag{6.48}$$

On aura alors, pour $i > 0$,

$$\Gamma_i = \frac{[R_i]_{i-1}}{2a} \left[2a + \sum_{j=1}^{i-j} [R_j]_{j-1} + \frac{[R_i]_{i-1}}{2} \right] \tag{6.49}$$

Comme

$$R_1 = R_0 - \Gamma_0 = b = [R_1]_0 \tag{6.50}$$

on n'aura pas de difficulté à calculer récursivement les autres restes :

$$\begin{gathered} R_2 = R_1 - \Gamma_1 = -\frac{b^2}{4\alpha} = [R_2]_1 \\ R_3 = R_2 - \Gamma_2 = \frac{b^3}{8a^2} - \frac{b^4}{64a^3} \qquad [R_3]_2 = \frac{b^3}{8a^2} \\ R_4 = R_3 - \Gamma_3 = \frac{5b^4}{64a^3} + \frac{b^5}{64a^4} - \frac{b^6}{256a^5} \qquad [R_4]_3 = \frac{5b^4}{64a^3} \\ \&c. \end{gathered} \tag{6.51}$$

Il s'ensuit que les A_i $(i = 1, 2, ...)$ sont tous des multiples de $[R_1]_0 = b$ et qu'ils ont en particulier la forme

$$A_i = K_i \frac{b^i}{b^{i-1}\sqrt{b}} = K_i b^{\frac{1}{2}-1} b^i \tag{6.52}$$

les K_i $(i = 1, 2, ...)$ étant des coefficients numériques qu'il est facile de déterminer par récurrence.

Dans ce cas également, les termes a et b peuvent être pris comme des expressions *algébriques* quelconques. Comme ces termes ne sont pas simples, l'application de cet algorithme demande des calculs très longs et pénibles. La détermination non récursive des coefficients K_i est de surcroît fort difficile, de sorte que *de facto* aucune résolution de la récursivité n'est possible. Cet algorithme ne peut donc servir, encore une fois, qu'à confirmer *a posteriori* l'égalité (6.40) pour $\eta = 2$, et seulement pour ses premiers coefficients[72]. Quant à la généralisation de ceci au cas de racines d'ordre supérieur, elle est évidemment pratiquement impossible.

Il ne reste plus qu'à considérer le deuxième argument, d'après lequel "la vérité" de l'égalité (6.40) "apparaît [...] par un calcul", pourvu que $\pm\frac{\mu}{\eta}$ soit un nombre entier positif ou que $b < a$. Newton semble faire allusion à des procédures similaires à celles dont il s'était servi au début de 1665 pour justifier *a posteriori* sa quadrature de l'hyperbole[73], relevant du calcul de la somme des premiers termes des séries concernées, pour des valeurs déterminées assignées aux termes a et b. Dans le nouveau contexte où Newton s'est désormais placé, rien n'empêche de considérer d'emblée ces valeurs comme des valeurs numériques. Il s'agit alors de calculer cette somme et de la comparer au résultat obtenu en calculant directement la valeur de $(a+b)^{\pm\frac{\mu}{\eta}}$, pour les mêmes valeurs de a et b. Si l'exposant $\pm\frac{\mu}{\eta}$ est un entier positif, l'égalité (6.40) se réduit à une égalité identique, qui ne demande aucune démonstration (autre que celles qui dépendent des lois de l'*algèbre*). L'argument de Newton n'a donc d'intérêt que si cet exposant n'est pas un entier positif. Si c'est un entier négatif et que l'on assigne à a et b des valeurs rationnelles, cet argument consiste à comparer une nombre rationnel avec une de ses approximations. Autrement, il se réduit à la comparaison de deux approximations décimales de nombres irrationnels obtenues par des procédures différentes. Tout ce qu'il montre est donc que les approximations obtenues par l'usage de l'égalité (6.40), lorsque $a < b$ (ou par l'égalité analogue obtenue en permutant a et b, lorsque[74] $a > b$), sont compatibles avec celles obtenues par des moyens arithmétiques connus. Cela ne peut évidemment, encore une fois, que confirmer cette égalité *a posteriori.* Cette fois, pourtant, cette confirmation ne concerne pas des cas particuliers de cette égalité ; elle ne peut concerner tout au plus que quelques cas particuliers.

La condition $a < b$ (ou $a > b$, si on permute a et b dans le développement) ne semble que correspondre, du point de vue de Newton, qu'à une condition d'applicabilité de cette procédure de confirmation, et non pas à une condition de validité de l'égalité (6.40) en tant que telle. Newton semble donc penser que cette égalité reste valide quels que soient a et b, et laisse entendre que si cette condition n'est pas respectée, elle n'exprime qu'une correspondance formelle.

---

[72]On voit qu'en procédant comme cet algorithme le prescrit, on néglige à chaque pas des termes tels que $K_i\frac{b^i}{a^{i-1}}$ face à des termes tels que $K_{i-1}\frac{b^{i-1}}{a^{i-2}}$. La convergence de la série résultante n'est donc assurée que si $b < a$. Dans ce cas, aussi on parvient à des développements différents selon que l'on considère la racine $\sqrt{a+b}$ ou la racine $\sqrt{b+a}$. Et ces développements ont évidemment des conditions de convergence différentes et complémentaires. Il est donc toujours possible d'appliquer cet algorithme pour parvenir à un développement convergent de la racine carrée d'un binôme.

[73]Cf. respectivement la section (4.3.3), en particulier pp. 208-210. Cf. aussi le cinquième fragments que Whiteside a publiés comme étant inhérents à la lecture des œuvres de Wallis, à peu près contemporain de l'esquisse dont il est ici question : cf. les notes (5) et (7), ci-dessus.

[74]Cf. les notes (70) et (72), ci-dessus.

6.2.2 Une continuation possible de la nouvelle esquisse

L'égalité (6.40) sera ensuite employé par Newton comme comme un outil propre à transformer toute expression *algébrique* dans une expression de forme polynomiale. Le fait que les expressions de forme polynomiale obtenues moyennant cette égalité soient des expressions infinitaires ne les rend pas moins aptes à supporter l'application de tout algorithme applicable à un polynôme en opérant terme à terme. La possibilité de réaliser cette transformation sera alors conçue comme étant une garantie de l'applicabilité générale de tout algorithme de cette sorte. Le sens même d'une correspondance formelle tient d'ailleurs justement à ceci : la possibilité que cette correspondance garantit pour une application élargie d'un certain formalisme.

Pour l'instant, Newton ne semble pourtant concevoir son résultat que comme un lemme fort utile pour parvenir à des quadratures. Bien que l'esquisse de Newton s'arrête après la huitième proposition, il n'est pas difficile d'imaginer comment celui-ci aurait pu continuer son exposition, en exploitant l'égalité (6.40) pour retrouver les quadratures du cercle et de l'hyperbole, qu'il avait déjà obtenues quelques mois auparavant. On ne peut pourtant pas exclure non plus qu'il ait aussi songé à exploiter cette égalité pour obtenir des résultats d'une autre nature. Cela nous est même suggéré par une courte note, probablement rédigée en même temps que l'esquisse que l'on vient de considérer[75], où il est question de la quadrature des courbes exprimées par des équations telles que $y = \frac{x^k}{ax+b}$ $(k = ... - 2, -1, 0, 1, 2, ...)$.

En appliquant l'égalité (6.40) (ou son cas particulier donné par l'égalité (6.41)), ces équations peuvent s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=0}^{\infty} (-)^i \frac{x^{k-i-1} b^i}{a^{i+1}} \\ y &= \sum_{i=0}^{\infty} (-)^i \frac{x^{k+i} a^i}{b^{i+1}} \end{aligned} \tag{6.53}$$

(selon que l'on pose les substitutions $a \to ax$ et $b \to b$, ou les substitutions $a \to b$ et $b \to ax$). Or, il est clair que si on pose $k = 1, 2, \ldots$ dans la première de ces égalités, et $k = -2, -3 \ldots$ dans la deuxième, on obtient des développements qui contiennent un terme où x apparaît à la puissance -1, à côté d'autres termes où x apparaît à des puissances entières à la fois plus grandes et plus petites que -1. Dans aucun de ces cas, on ne peut donc appliquer l'un ou l'autre des algorithmes de quadrature exprimés par les égalités (6.28).

Au lieu d'en conclure que pour obtenir une quadrature d'une courbe d'équation $y = \frac{x^k}{ax+b}$, l'on doive se réclamer du premier des développements (6.53) lorsque $k \leq 0$ et du deuxième lorsque $k \geq -1$, Newton emploie le premier de ces développements lorsque $k > 0$ et le deuxième lorsque $k < 0$. Il tronque pourtant ces développements après $|k|$ termes, et calcule à chaque fois le reste correspondant, qui est exprimé par une fraction de la forme

[75]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 3, 342-343. Cette note occupe une page d'une feuille pliée en deux, dont les trois pages restantes sont occupées par le fragment cité dans la note (73), ci-dessus [cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 3, note (1), 342].

$\frac{\alpha}{\beta+\gamma x}$ (α, β et γ étant des termes constants) :

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^k}{ax+b} = \sum_{i=0}^{k-1} (-)^i \frac{x^{k-i-1} b^i}{a^{i+1}} + (-)^k \frac{b^k}{a^k \, (ax+b)} \\ y &= \frac{x^{-k}}{b+ax} = \sum_{i=0}^{k-1} (-)^i \frac{x^{-k+i} a^i}{b^{i+1}} + (-)^k \frac{a^k}{b^k \, (b+ax)} \end{aligned} \tag{6.54}$$

De là, en appliquant respectivement les algorithmes exprimés par la première et par la deuxième des égalités (6.28) (et en supposant que a et b soient des grandeurs positives et en ne prenant en compte que des valeurs positives de x), on obtient

$$\begin{aligned} s\left[\sum\nolimits_0^\xi [y]\right] &= s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\frac{x^k}{ax+b}\right]\right] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-)^i \frac{b^i \xi^{k-i}}{(k-i)\, a^{i+1}} + s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[(-)^k \frac{b^k}{a^k\,(ax+b)}\right]\right] \\ s\left[\sum\nolimits_\xi^{+\infty} [y]\right] &= s\left[\sum\nolimits_\xi^{+\infty} \left[\frac{x^{-k}}{b+ax}\right]\right] \\ &= \sum_{i=0}^{k-2} (-)^i \frac{a^i \xi^{-k+i+1}}{(i-k+1)\, b^{i+1}} - s\left[\sum\nolimits_\xi^{+\infty} \left[(-)^k \frac{a^{k-1}}{b^k x}\right]\right] \\ &\quad + s\left[\sum\nolimits_\xi^{+\infty} \left[(-)^k \frac{a^k}{b^k\,(b+ax)}\right]\right] \end{aligned} \tag{6.55}$$

qui me paraît correspondre à la plus naturelle des interprétations des résultats que Newton énonce dans la courte table de quadratures qui ouvre sa note[76].

Dans le commentaire qui suit cette table (et clôt la note), Newton décrit sa méthode comme si elle permettait d'obtenir la quadrature de toute courbe dont l'ordonnée est exprimée par un quotient de polynômes, soit "géométriquement", soit "en supposant connue l'aire de l'hyperbole"[77]. Le but de Newton est évidemment de donner une méthode pour exprimer partiellement les aires de ces courbes par des polynômes finis (en x ou x^{-1}), construits de telle manière que les rests correspondants puissent être exprimés en termes de l'aire d'une ou de deux hyperboles.

Il reste néanmoins que si les limites de quadrature sont celles indiquées dans les égalités (6.55), ces restes augmentent au fur et à mesure que ξ s'approche de la limite constante. Il semble ainsi naturel de penser que dans la première de ces égalités ξ soit une valeur de

[76]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 3, 342. Newton ne distingue évidemment pas entre x et ξ et n'indique pas les limites de quadrature, en écrivant "$\square -$" où j'écris "$s\left[\sum\nolimits_0^\xi [-]\right]$" ou "$s\left[\sum\nolimits_\xi^{+\infty} [-]\right]$". Pour ce qui est des $k-1$ premiers termes du troisième membre de la deuxième des égalités (6.55), il évite en outre de calculer les aires correspondantes, en écrivant simplement "$\square (-)^i \frac{x^{-k+i} a^i}{b^{i+1}}$" ($i = 0, 1, \ldots k-2$) à la place de ces termes. Pour ce qui est de l'hyperbole d'équation $y = \frac{u}{ax+b}$, il se limite à indiquer son aire par le symbole "$\square \frac{u}{ax+b}$" (avec "1" à la place de "u", comme d'habitude, et selon la notation de Descartes).

[77]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 3, 343.

x assez grande et dans la deuxième une valeur de x assez petite pour rendre ces restes négligeables. Au moment où il parvient à se donner ce qui sera ensuite l'outil essentiel pour obtenir des développement en séries entières, Newton semble sentir l'exigence de chercher des quadratures finies, au moins par approximation. Néanmoins, bien qu'il soit clairement question d'aires, sa préoccupation semble être encore une fois essentiellement algorithmique, et il ne semble guère intéressé à rendre claire la signification géométrique de ses résultats[78]. L'intérêt pour des quadratures finies semble ainsi dériver, plus que d'une préoccupation visant à une évaluation satisfaisante de la taille des aires en question, d'une préoccupation formelle relevant des conditions d'inversion de l'algorithme des normales et des tangentes. Si cette préoccupation ne se transforme pas encore en une recherche de primitives, c'est, tout simplement, que Newton ne possède pas encore une conception de cet algorithme qui puisse lui permettre de poser ce problème autrement que comme un problème de quadratures.

6.3 Entre l'été et l'automne 1665 : l'algorithme de la sous-normale pour des courbes dont l'ordonnée est exprimée par un quotient de polynômes et les conditions de son inversion

L'intérêt de Newton vis-à-vis des conditions d'inversion de l'algorithme des normales et des tangentes — éveillé par ses applications du théorème de van Heuraet — ne s'estompa pas. Au contraire, cette question fait, pour l'essentiel, l'objet de deux notes, que Newton rédigea probablement entre l'été et l'automne 1665, à la suite de sa deuxième esquisse d'un traité des quadratures[79]. En réalité ce problème n'est explicitement abordé que dans la deuxième partie de la deuxième de ces notes. La première note, et la première partie de la deuxième[80], sont consacrées, en revanche, à un problème pour ainsi dire préliminaire, dont la solution est d'abord présentée dans la première note, et puis reformulée en termes plus simples et généraux au début de la deuxième. Considérons d'abord ce problème préliminaire.

Il vise à corriger, au moins localement, l'asymétrie entre les algorithmes des normales et des aires, tels qu'ils sont énoncés respectivement par l'égalité (5.79) et les égalités (6.28). Tandis que le premier de ces algorithmes porte sur une équation entière en x et y, les deuxièmes portent sur des expressions en x qui sont censées exprimer l'ordonnée y d'une certaine courbe.

Comme on l'a vu ci-dessus[81], Newton avait déjà partiellement corrigé cette asymétrie au début de sa deuxième esquisse d'un traité de quadratures, en réécrivant son algorithme général comme un algorithme portant directement sur l'expression de l'ordonnée de la courbe considérée dans le cas où cette équation prend la forme $y = \frac{a}{b}x^{\frac{m}{n}}$. Ceci est pourtant

[78]Newton reviendra d'ailleurs sur cette méthode dans le *Traité d"octobre 1666* [cf. la section 11.1.3], où il l'emploie plutôt pour trouver des analogues de nos primitives. Ce fut probablement à l'occasion de la rédaction de ce traité qu'en retournant consulter sa note, Newton ajouta la dernière phrase, où il est question d'une limitation de la généralité de la méthode : cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 3, note (5), 343].

[79]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, respectivement : [2], 322-326, et [3]-[4], 326-34. Le fragment [1], de ce même § 2 [cf. *ibid.*, 322] se réduit à quelques lignes de calcul, d'interprétation assez difficile, écrites sur la même feuille que le fragment [2]. Cf., à propos de ce fragment, *ibid.*, notes (3)-(5), 322-323.

[80]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, [3], 326-331.

[81]Cf. p. 308.

un cas fort simple. On a déjà observé[82], que cette réécriture devient pratiquement impossible dès que l'équation en question prend une forme ne serait-ce qu'un peu plus compliquée, par exemple si l'on ajoute à l'expression de y un autre terme analogue (mais non semblable) au premier, en obtenant une équation de la forme $y = \frac{a}{b}x^{\frac{m}{n}} + \frac{\alpha}{\beta}x^{\frac{\mu}{\nu}}$. Cette équation ne peut être mise sous forme entière que par des calculs pratiquement impossibles à réaliser (si les dénominateurs n et ν sont différents et plus grands que 3) — et que Newton aurait même eu probablement du mal à imaginer. Il ne reste donc, si on veut calculer la normale et la tangente de la courbe qu'elle exprime, qu'à chercher un algorithme qui puisse s'y appliquer directement.

On peut imaginer que cet algorithme pourrait être aisément trouvé en passant par un développement en série entière de l'expression $\frac{a}{b}(x+o)^{\frac{m}{n}} + \frac{\alpha}{\beta}(x+o)^{\frac{\mu}{\nu}}$, rendu désormais possible par une application de l'égalité (6.40), et que le même procédé pourrait aussi être appliqué à d'autres cas moins difficiles, tels que ceux où l'équation donnée est de la forme $y^n = \frac{P(x)}{Q(x)}$, n étant un exposant entier et $P(x)$ et $Q(x)$ étant deux polynômes en x. Si dans ces derniers cas le passage à une équation de forme entière ne pose pas de problèmes majeurs, l'usage du développement en séries entières a l'avantage de conduire à une compréhension immédiate de la nature algorithmique de l'expression en x qui exprime la sous-normale ou la sous-tangente.

Le parcours suivi par Newton n'est pourtant pas celui-là. Au lieu que penser le problème de l'asymétrie entre les algorithmes des normales et des aires comme un problème concernant les difficultés qu'on pourrait rencontrer pour trouver la sous-normale ou la sous-tangente d'une courbe déjà exprimée par une équation telle que $y = f(x)$ qu'on ait de la peine à mettre sous forme entière, Newton semble penser ce problème comme ayant trait à la difficulté d'exprimer la sous-normale ou la sous-tangente d'une courbe exprimée par une équation entière $F(x, y) = 0$ par le biais d'une expression en la seule variable x, lorsqu'il est difficile de passer de cette équation entière à une expression de y en termes de x.

On comprend ce problème si l'on observe que, conformément à l'égalité (5.79), la sous-normale $sn._x$ s'exprime par le produit de $-y$ et d'une expression $G(x, y)$ en x et y, et que la procédure prescrite par le théorème de van Heuraet (dans sa version adaptée) pour trouver une quadrature passe par la détermination d'une ordonnée z d'une nouvelle courbe, censée être égale à $K\frac{sn._x}{y}$. Si l'on suppose qu'une courbe est donnée par le biais d'une équation $F(x, y) = 0$ et qu'on sait écrire l'expression $G(x, y)$ correspondante en termes de la seule variable x, c'est-à-dire qu'on parvient à une égalité telle que $sn._x = -yg(x)$, $g(x)$ étant une expression Algébrique en x, alors on obtient sur-le-champ $z + Kg(x) = 0$ en tant qu'équation d'une courbe telle que la relation entre son aire et son abscisse soit exprimée par l'équation déjà connue $F(x, y) = 0$. Or, si la conversion $G(x, y) \to g(x)$ ne réussit pas, cette procédure est bloquée. Cela-ci semble être la difficulté envisagée par Newton, qui semble ainsi continuer à penser (comme Descartes) les équations entières comme la forme paradigmatique de l'expression des courbes (et peut-être même des aires). Pourtant, un raisonnement comme le précédent a au moins l'avantage de poser la question de la détermination de l'expression $g(x)$, qui, comme on le sait aujourd'hui, n'est rien d'autre que l'expression du rapport différentiel.

[82]Cf. p. 311.

6.3.1 Une nouvelle approche pour le problème de la sous-normale

Dans sa première note, Newton aborde le problème précédent en termes assez draconiens. Il semble supposer en effet que la courbe donnée est exprimée par une équation $F(x, y) = 0$ qu'il est facile de mettre sous la forme $x^n = f(y)$, et qu'on ne soit pas pour autant intéressé à trouver la sous-normale $sn._y$ prise sur l'axe des y, mais que l'on cherche la sous-normale $sn._x$ prise sur l'axe des x, qu'on vise de surcroît à exprimer en termes de la seule variable y. En d'autre termes, Newton semble imaginer qu'on est dans les conditions de pouvoir prendre y comme variable principale, tout en étant intéressé à la sous-normale prise sur un axe où les valeurs de x sont projetées (par exemple pour pouvoir construire sur cet axe la deuxième courbe qui intervient dans le théorème de van Heuraet, et disposer donc d'une équation exprimant l'aire de cette courbe, où la variable principale est donnée par cette aire, et non par l'abscisse d'une telle courbe).

Si la courbe donnée est par exemple exprimée (par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales) par une équation telle que $x - ay^n = 0$, l'égalité (5.79) résout le problème d'emblée, en fournissant l'égalité

$$sn._x = y\frac{1}{nay^{n-1}} \tag{6.56}$$

Les exemples que Newton aborde dans sa première note ne sont pas beaucoup plus compliqués, mais la manière dans laquelle il les traite témoigne d'une nouvelle approche de la question de la normale. Ils concernent six courbes, respectivement exprimées (par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales) par les équations $ax^n - y^{n+1}$ et $x^n(a + y) - y^{n+1} = 0$ (avec $n = 1, 2, 3$), dont les trois premières sont d'ailleurs telles — comme l'équation, encore plus simple, $x-ay^n = 0$, considérée ci-dessus — qu'il est aussi aisé de les écrire sous la forme $y = f(x)$. À chacune de ces équations, Newton associe une règle algorithmique particulière qui indique comment parvenir à l'expression de la sous-tangente cherchée à partir de cette même équation.

Newton emploie dans les six cas la même méthode, à laquelle il parvient en retournant à la situation géométrique, et en raisonnant d'une nouvelle manière, bien que suivant un argument analogue à celui qu'il avait employé une année auparavant pour trouver la normale de deux hyperboles, s'inspirant de la méthode pour les *maxima* et *minima* de Fermat[83]. Bien que d nouveau, sa procédure puisse être différemment interprétée, je vais l'exposer ici en choisissant l'interprétation qui me semble la plus simple.

La courbe étant référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'axe AH et d'origine A (qu'on se rapporte à la fig. 1 du chapitre 5), on considère deux points M et M', si proches que les puissances d'ordre supérieur à 1 de leurs différences peuvent être négligées. On peut alors identifier l'arc de courbe qui joint ces points avec un arc de cercle dont le centre $\mathsf{\Gamma}$ est placé sur l'axe AH. Les deux normales à la courbe en ces deux points seront donc égales et se rencontreront en ce centre, formant avec cet axe et les ordonnées des deux points deux triangles rectangles $\mathsf{\Gamma PM}$ et $\mathsf{\Gamma P'M'}$. Si l'on pose[84] $\mathsf{AP} = x$, $\mathsf{PM} = y$, $\mathsf{AP}' = x + o$ (et donc, pour rester fidèle à la figure, $\mathsf{P'P} = -o$) et $\mathsf{P'M'} = y + e$, on a alors,

[83]Cf. la section 5.1.1.

[84]Newton n'utilise aucun symbole littéral pour indiquer l'incrément de x (en se limitant à l'indiquer sur sa figure comme un segment qu'il nomme "ef") et note par contre l'incrément de y par la lettre "a". Sur une signification possible de ce choix, cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, note (7), 323.

conformément au théorème de Pythagore :

$$y^2 + (sn._x)^2 = (y+e)^2 + (sn._x - o)^2 \tag{6.57}$$

qui correspond à l'égalité (5.15). En développant les carrés et en négligeant les puissances supérieures de e et o, on obtient :

$$ey - o\,(sn._x) = 0 \tag{6.58}$$

qui, évidemment, ne dépend guère de l'équation de la courbe considérée.

Pour parvenir à exprimer $sn._x$ en termes de y, il suffira alors d'exprimer l'incrément o en termes de y et de e, en négligeant encore une fois les puissances supérieures de e. C'est seulement à ce point qu'intervient l'équation de la courbe considérée. En effet, si cette équation peut être mise sous la forme $x = f(y)$, $f(y)$ étant une expression Algébrique en y, on aura

$$o = (x+o) - x = f(y+e) - f(y) \tag{6.59}$$

et, en substituant dans l'égalité (6.58) :

$$ey - [f(y+e) - f(y)]\,(sn._x) = 0 \tag{6.60}$$

C'est l'équation générale sur laquelle se fonde la nouvelle méthode de Newton.

En généralisant l'argument de Newton, considérons une courbe exprimée par l'équation

$$x^n = \frac{y^{n+1}}{a+by} \tag{6.61}$$

(n étant un nombre naturel positif quelconque). De l'égalité (6.60), il s'ensuit l'autre égalité

$$ey + (sn._x)\left[\frac{y^{n+1}}{a+by}\right]^{\frac{1}{n}} = (sn._x)\left[\frac{(y+e)^{n+1}}{a+b(y+e)}\right]^{\frac{1}{n}} \tag{6.62}$$

d'où, en passant à la puissance n et en négligeant les puissances supérieures de e, on tire

$$\frac{y^{n+1}sn._x}{a+by} + ney\left[\frac{y^{n+1}}{a+by}\right]^{\frac{n-1}{n}} = (sn._x)\left[\frac{y^{n+1} + (n+1)\,y^n e}{a+by+be}\right] \tag{6.63}$$

c'est-à-dire :

$$ny\left[\frac{y^{n+1}}{a+by}\right]^{\frac{n-1}{n}} = \frac{(a+by)\,(n+1)\,y^n - by^{n+1}}{(a+by)\,(a+by+be)}\,(sn._x) \tag{6.64}$$

En négligeant le terme en e qui persiste après les simplifications précédentes, on aura enfin :

$$sn._x = \frac{(a+by)^2\,ny\left[\frac{y^{n+1}}{a+by}\right]^{\frac{n-1}{n}}}{a\,(n+1)\,y^n + nby^{n+1}} = \frac{n\,(a+by)^2\,yx^{n-1}}{\frac{a(n+1)y^{n+1}+nby^{n+2}}{y}} \tag{6.65}$$

Si on pose respectivement, autant dans l'équation (6.61) que dans l'égalité (6.65), $n = 1, 2, 3$ et $b = 0, 1$, on retrouve les six égalités auxquelles Newton parvient au cours de sa note. Comme je l'ai dit, à chacune de ces égalités Newton associe une règle qui indique comment parvenir à l'expression de $sn._x$ à partir de l'équation de la courbe donnée. Voici par exemple la règle que Newton associe à son sixième cas[85], qu'on obtient en posant dans l'équation (6.61) $n = 3$ et $b = 1$:

> I[f] y is in the many termed Denom : of x^3 Then make $3xxy$ multipli[ye]d by the Den : of x^6 the Numerat^r. & Multiply the N : of x^3 by its dimensiō & the product by the D : of x^3 ; again Mult : the D : according to y's Dimensions & the product by the N : & substract the lesse from the greater & divide the rest by y for a Denominator en the Valor of v [c'est-à-dire : $sn._x$].

Bien que cette règle se réfère nécessairement à une équation de la forme

$$x^3 = \frac{P(y)}{Q(y)} \tag{6.66}$$

où $P(y)$ et $Q(y)$ sont des polynômes quelconques en y, dont le deuxième contient plus qu'un terme, il n'est guère nécessaire de poser $P(y) = y^4$ et $Q(y) = a + y$, comme dans l'exemple considéré par Newton. Bien qu'elle n'est tirée que de la considération d'exemples assez simples, la règle est ainsi générale pour toutes les équations de la forme (6.66). Il n'est de surcroît guère difficile de la généraliser ultérieurement en remplaçant l'exposant 3 de x par un exposant entier positif quelconque, disons n, comme ci-dessus. En l'appliquant à la lettre à des équations de cette forme plus générale, on obtient l'égalité suivante

$$sn._x = \frac{nx^{n-1}y\left[Q(y)\right]^2}{\frac{[P^*(y)][Q(y)]-[Q^*(y)][P(y)]}{y}} \tag{6.67}$$

où $P^*(y)$ et $Q^*(y)$ sont les polynômes qu'on tire respectivement de $P(y)$ et $Q(y)$ en multipliant chacun de leurs termes par l'exposant de y, c'est-à-dire en appliquent la règle de Hudde[86] selon la position $\tau_i = i$. En simplifiant, et en remplaçant x^n par son expression tirée de l'équation donnée, on obtient l'égalité

$$sn._x = y^2 \frac{n\left(\frac{P(y)}{Q(y)}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left[Q(y)\right]^2}{\left[P^*(y)\right]\left[Q(y)\right]-\left[Q^*(y)\right]\left[P(y)\right]} \tag{6.68}$$

qui semble justement constituer le résultat essentiel de la note de Newton.

Il suffit d'observer que, formellement, les polynômes $P^*(y)$ et $Q^*(y)$ ne sont rien d'autres que les dérivées homogénéisées des polynômes $P(y)$ et $Q(y)$, calculées évidemment par rapport à y, pour conclure que cette égalité est algorithmiquement équivalente à celle qu'on obtient en appliquant le formalisme du calcul différentiel à partir de l'équation

$$x = \sqrt[n]{\frac{P(y)}{Q(y)}} \tag{6.69}$$

[85]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, [2], 326. La spécification de Newton "substract the lesse from the greater" montre que celui-ci cherche la valeur absolue de la sous-normale.

[86]Cf. la section 3.3.2.

où on prend y comme variable principale :

$$\begin{aligned} sn._x &= \frac{xy}{sn._y} = y\frac{dy}{dx} \\ &= \left[yn\left(\frac{Q(y)}{P(x)}\right)^{\frac{1-n}{n}}\right]\frac{[Q(y)]^2}{[P'(y)]\,[Q(y)]-[P(y)]\,[Q'(y)]} \end{aligned} \tag{6.70}$$

Poussé par son intérêt pour les relations entre l'algorithme des normales et des tangentes, Newton est donc parvenu à un résultat essentiellement nouveau. La nouveauté de ce résultat n'apparaît que lorsqu'on le réfère non pas au problème de la détermination de la sous-normale d'une courbe donnée, mais à l'autre problème, bien plus général, qui tient à la nature formelle de l'algorithme des normales et des tangentes. Si on ne tien compte que du premier problème, l'équation (6.69) mise sous en forme entière, donne

$$[Q(y)]\,x^n - P(y) = 0 \tag{6.71}$$

et si on applique l'algorithme exprimé par l'égalité (5.79), on obtient

$$sn_x = -y^2\frac{n\,[Q(y)]\,x^{n-1}}{[Q^*(y)]\,x^n - P^*(y)} \tag{6.72}$$

qui, formellement, est parfaitement équivalente à l'égalité (6.68). Derrière cette équivalence formelle se cache pourtant une différence essentielle. Non seulement, Newton est parvenu à cette dernière égalité sans passer par la mise en forme entière de l'équation (6.69).Encore plus important c'est que, une fois obtenue de cette manière, l'égalité qui fournit l'expression de la sous-tangente de la courbe exprimée par l'équation (6.69) manifeste une structure qui reste cachée dans l'égalité (6.72), en montrant les invariants algorithmiques qui y interviennent. Avec cette égalité, c'est ainsi un sorte d'opérateur de passage à la sous-normale qui semble, discrètement, apparaître à l'horizon, horizon restera toujours lointain pour Newton, qui ne semble pas avoir compris la portée de son résultat, considérant plutôt sa règle comme une simplification, relative à certains cas particuliers, de la règle plus générale exprimée par l'égalité (5.79).

6.3.2 Une reformulation de l'algorithme de la sous-normale

Si les six règles que Newton énonce dans sa première note résolvent le problème qui y est posé, elles sont exprimées par un langage assez lourd et ne concernent, en tant que telles, que des cas particuliers, laissant le lecteur lui-même opérer une généralisation et introduire une notation suffisamment puissante et agile pour l'exprimer. C'est d'ailleurs ce qu'on a fait ci-dessus pour saisir le contenu réel de la solution proposée par Newton. C'est aussi ce que Newton fait dans la première partie de sa deuxième note[87], en se servant d'une notation similaire à celle qu'il avait déjà employée le 20 mai de la même année 1665, pour énoncer

[87]Cf. la note (80), ci-dessus. Avant la publication par Whiteside, cette première partie de la note de Newton avait attiré l'attention de A. Witting, qui l'évoque très rapidement dans une courte intervention dans la *Bibliotheca Mathematica* de G. Eneström [cf. Witting (1911-1912), 59]. Malheureusement, les sept lignes que Witting consacre dans son article à ce sujet relèvent d'une incompréhension totale du contenu mathématique des arguments de Newton et ne fournissent aucun aide à l'historien.

et démontrer l'égalité (5.142)[88] : en indiquant par des lettres majuscules et minuscules, "A", "B", "C", "a", "b", "c", des polynômes en x ou en y, il indique par les mêmes lettres accompagnées de deux points (placés à l'intérieur de la lettre, pour les majuscules, ou au-dessus de celle-ci, pour les minuscules) les polynômes qu'on en tire respectivement en multipliant chacun de leurs termes par l'exposant de la variable qui y intervient. Les deux points ont donc dans cette notation la même fonction que l'astérisque a dans la notation que j'ai utilisé ci-dessus. L'usage de cette nouvelle notation, à laquelle je vais me tenir par la suite, n'est pourtant pas la seule nouveauté que Newton introduit dans la nouvelle note par rapport à la précédente. Il formule de surcroît son problème en termes plus généraux.

Pour comprendre cette généralisation, il suffit d'observer que si $sn._x$ et $sn._y$ sont, comme ci-dessus, les sous-normales à une courbe donnée, en un point de coordonnées (x, y) prises respectivement sur un axe où l'on suppose que x varie et sur un axe où l'on suppose que y varie, alors, quel que soit l'angle formé par ces coordonnées, on a la proportion

$$sn._x : y = x : sn._y \tag{6.73}$$

Or, il est clair que pour trouver l'expression de $sn._y$ en termes de x, il suffit de chercher l'expression de $sn._x$ en termes de y et de permuter ensuite x et y. À cette permutation près, l'égalité (6.68) fournit ainsi l'expression de $sn._y$ en termes de x. Donc, si on suppose qu'une courbe est exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par l'une ou l'autre des équations

$$y^n = \frac{A}{B} \qquad ; \qquad x^n = \frac{A}{B} \tag{6.74}$$

où A et B sont des polynômes soit en x — dans la première de ces équations — soit en y — dans la deuxième —, l'égalité (6.68) contient les deux égalités suivantes :

$$\begin{gathered} sn._x \left[= \frac{xy}{sn._y}\right] = \frac{\ddot{A}B - A\ddot{B}}{nxy^{n-2}B^2} \\ sn._x = y^2 \frac{nx^{n-1}B^2}{\ddot{A}B - A\ddot{B}} \end{gathered} \tag{6.75}$$

Les nouvelles règles présentées par Newton correspondent justement à ces deux égalités, pourvu que dans la deuxième (et donc dans la première des équations (6.74), qui lui correspond) on pose $2n$ à la place de[89] n. Ces règles sont au nombre de quatre et fournissent une solution au problème de la détermination de la sous-normale $sn._x$ pour des courbes exprimées respectivement par des équations de la forme

$$\begin{gathered} y^{2n} = \frac{A}{bx^m} \qquad ; \qquad y^{2n} = \frac{A}{B} \\ x^n = \frac{A}{by^m} \qquad ; \qquad x^n = \frac{A}{B} \end{gathered} \tag{6.76}$$

où A et B sont, comme ci-dessus, des polynômes soit en x — dans les deux premières équations — soit en y — dans les deux deuxièmes —, n et m sont des exposants entiers positifs quelconques, et b un coefficient constant.

[88]Cf. la section 5.5.1, ci-dessus, en particulier pp. 270 et suiv.

[89]Je vais revenir plus tard sur la raison de cette substitution.

La première et la troisième équations ne sont, évidemment, que des cas particuliers respectivement de la deuxième et de la quatrième, tandis que ces dernières se transforment l'une dans l'autre en permutant x et y et en posant n à la place de $2n$. On pourrait donc traiter ces quatre équations à la fois, en considérant leur forme commune et en opérant sur elle comme on l'a fait ci-dessus pour l'équation (6.61). Il s'agit d'imaginer que les variables x et y peuvent permuter, et se réclamer de la relation (6.73) pour obtenir de l'égalité ainsi trouvée — fournissant en même temps l'expression de la sous-normale $sn._x$ en termes de y, et l'expression de la sous-normale $sn._y$ en termes de x — une égalité fournissant en même temps l'expression de la sous-normale $sn._x$ en termes de x, et l'expression de la sous-normale $sn._y$ en termes de y.

Bien que cette démarche ne pose aucun problème à un mathématicien moderne, elle aurait pourtant pu en poser à Newton. Pour le comprendre, considérons la quatrième des équations précédentes et supposons pouvoir y permuter x et y. On a ainsi une équation exprimant la forme générale dont il est question. En comparant cette équation avec l'égalité (6.60) — où on suppose aussi pouvoir permuter x et y — on obtient une équation générale qu'on pourrait écrire ainsi :

$$ey + (sn._x)\left[\frac{A}{B}\right]^{\frac{1}{n}} = (sn._x)\left[\left[\frac{A}{B}\right]_{y\to y+e}\right]^{\frac{1}{n}} \tag{6.77}$$

où le symbole "$\left[\frac{A}{B}\right]_{y\to y+e}$" indique le résultat obtenu en posant $y+e$ à la place de y dans $\frac{A}{B}$. La nécessité d'employer un tel symbole pour opérer en général sur l'équation donnée est déjà un symptôme de la difficulté dont il est question. Cette difficulté est néanmoins plus claire dès que l'on observe que pour continuer il faut passer à la puissance n, négliger les puissances supérieures de e, diviser par $e(sn._x)^{n-1}$, et sommer entre eux les coefficients de $sn._x$ dans l'équation ainsi obtenue. Ce sont des opérations que Newton aurait eu du mal à indiquer en se servant d'une notation générale, comme celle qui intervient dans les équations (6.76). On comprend alors que cette notation ne peut que servir à Newton pour exprimer *a posteriori* la forme commune des résultats obtenus en opérant de manière analogue sur différentes équations particulières. Dans la deuxième note, il n'est plus question de justifier les règles énoncées. Il est pourtant clair, d'après ce que l'on vient de dire, que Newton n'aurait pu les justifier qu'en opérant comme ci-dessus sur des équations particulières et en généralisant ensuite les résultats obtenus. La distinction entre les quatre équations (6.76) ne correspond ainsi qu'à une généralisation qui n'a pas encore atteint le niveau qui aujourd'hui nous paraîtrait souhaitable. Cette généralisation ultérieure n'apparaît ainsi qu'à travers les similarités entre les quatre règles énoncées par Newton et les expressions de la sous-normale qu'elles permettent d'obtenir pour des courbes exprimées respectivement par les quatre équations (6.76). C'est probablement pour souligner cette similarité que Newton se limite dans les deux premières équations, à des exposants pairs. Cette limitation permet en effet de parvenir, dans ces cas, à une expression élégante et compacte de la sous-normale qui manifeste une analogie formelle avec l'expression correspondante obtenue à partir des deux dernières équations, une analogie qui apparaît moins clairement si l'on considère des exposants quelconques[90].

[90]Cf. la note (93), ci-dessous. Pour une autre raison qui pourrait justifier la limitation de Newton à des exposants paies de y, cf. aussi la note (112), ci-dessous.

Cet effort de comparaison, qui est aussi celui de la recherche d'un invariant algorithmique, est évident dans l'exposition même de Newton. Pour chacune des quatre équations (6.76), Newton écrit dans un tableau comparatif les expressions de la sous-normale correspondantes aux cas $n = 1, 2, 3, 4$, en laissant entendre que les cas suivants se traitent de la même manière. Enfin, il réécrit de nouveau les tableaux correspondants à la deuxième et à la quatrième équation pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$, l'un à côté de l'autre, en obtenant un nouveau tableau à dix entrées[91]. En le généralisant au cas d'un exposant n quelconque, ce dernier tableau revient à deux égalités que Newton écrit comme suit[92] :

$$\begin{aligned} sn._x &= \pm \frac{\ddot{A}B - A\ddot{B}}{2nBx\sqrt[n]{A^{n-1}B}} \\ sn._x &= \pm \frac{nBy^2\sqrt[n]{A^{n-1}B}}{\ddot{A}B - A\ddot{B}} \end{aligned} \tag{6.78}$$

qui — aux signes $\pm$ et à la substitution $n \to 2n$ dans la première égalité près — correspondent aux égalités (6.75)[93].

[91]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, [3], 331.

[92]Lorsqu'il considère la première et de troisième des équations (6.76), Newton note les fractions de la forme $\frac{A}{bx^m}$ et $\frac{A}{by^m}$ aussi bien par les symbole "$\frac{A}{B}$" (en précisant que B est constant, ou se réduit à un monôme), que par le symbole "C". En adoptant cette dernière convention, il écrit ainsi les égalités fournissant les expressions de $sn._x$ respectivement sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} sn._x &= \pm \frac{\frac{1}{x}\ddot{C}}{2n\sqrt[n]{C^{n-1}}} \\ sn._x &= \pm \frac{ny\sqrt[n]{C^{n-1}}}{\frac{1}{y}\ddot{C}} \end{aligned}$$

Comme des conventions adoptées par Newton, il résulte que $C = \frac{A}{B}$, cela pourrait faire croire que le symbole "$\ddot{C}$" indique une entité formelle analogue à notre dérivée homogénéisée d'un quotient. Cela est d'ailleurs ce que semble suggérer Whiteside [cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, notes (27), 328 ; (28), 329 ; et (30), 331]. Pourtant, dans les cas où le symbole "$\ddot{C}$" est employé, C n'est rien qu'un polynôme (éventuellement avec des puissance négatives) de sorte que ce symbole a une signification parfaitement analogue aux symboles "$\ddot{A}$" et "$\ddot{B}$". Si on veut penser les deux points qui accompagnent une lettre exprimant une expression Algébrique comme un symbole indiquant un opérateur de transformation de cette expression, on doit ainsi se limiter à considérer (malgré les apparences) cet opérateur comme s'appliquant à des expressions entières.

[93]Pour passer de ces dernières égalités — dans la première desquelles on aura posé $2n$ à la place de n — aux égalités (6.78), il suffit d'observer que, grâce à la deuxième et à la quatrième des équations (6.76), on a respectivement

$$\begin{aligned} y^{2n-2} &= \frac{y^{2n}}{y^2} = \frac{A}{B}\sqrt[n]{\frac{B}{A}} = \frac{1}{B}\sqrt[n]{A^{n-1}B} \\ x^{n-1} &= \frac{x^n}{x} = \frac{A}{B}\sqrt[n]{\frac{B}{A}} = \frac{1}{B}\sqrt[n]{A^{n-1}B} \end{aligned}$$

Si dans la deuxième des équations (6.76) on remplaçait $2n$ par n, on aurait aussi

$$\frac{1}{B}\sqrt[n]{A^{n-1}B} = \frac{y^n}{y} = y^{n-1}$$

et donc, par substitution dans la première des égalités (6.75) :

$$sn._x = y\frac{\ddot{A}B - A\ddot{B}}{nxB\sqrt[n]{A^{n-1}B}} = \frac{\ddot{A}B - A\ddot{B}}{nxB\sqrt[n]{A^{n-2}B^2}}$$

L'analogie soulignée par Newton entre les deux égalités (6.78) serait ainsi perdue.

Le symbole "$\pm$" n'indique pas ici, de toute évidence, que l'expression qu'il précède doive être prise autant avec le signe $+$ qu'avec le signe $-$, mais plutôt qu'elle doive être prise avec celui, parmi ces deux signes, qui fait que cette expression exprime une grandeur positive. La sous-normale est en fait pensée comme un segment, et donc comme une grandeur positive, qu'il faut déterminer en tant que telle[94]. Quant à l'usage des symboles pointus, il faut observer qu'ils n'ont plus la fonction de simplifier une preuve, comme c'était le cas de la note du 20 mai 1665. De même que les notations que Newton emploie dans la note du 21 mai, ces symboles interviennent ici dans l'expression des résultats obtenus[95] (et même seulement dans cette expression). Elles semblent donc, encore une fois, indiquer une sorte de thématisation d'une pratique algorithmique et se référer directement à des objets (des expressions Algébriques remplissant une fonction particulière) produits au cours de cette pratique. Bien que ces objets émergent lors d'un argument essentiellement géométrique, ils n'apparaissent pourtant, même à cette occasion, que comme des expressions d'un invariant algorithmique, c'est-à-dire qu'ils n'indiquent pas un invariant géométrique. Du point de vue de la compréhension du rôle de l'invariant géométrique fondamental donné par le rapport entre les côtés du triangle caractéristique, les nouveaux arguments de Newton marquent même un pas en arrière par rapport aux arguments du mois de mai. L'analyse géométrique qui intervient dans ces arguments et les justifie ne prend en fait en considération aucune entité analogue au triangle caractéristique.

6.3.3 L'inversions de l'algorithme de la sous-normale : les limites de l'Algèbre

Ayant ainsi résolu son problème préliminaire, Newton peut consacrer la deuxième partie de sa deuxième note[96] au problème qui semble véritablement l'intéresser : en supposant qu'une expression Algébrique soit donnée et qu'elle exprime la sous-normale $sn._x$ d'une certaine courbe, référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, il s'agit de trouver une équation qui exprime cette courbe, par rapport à ce système de coordonnées. Bien que ce problème vienne à l'attention de Newton dans le contexte de ses recherches à propos de quadratures, il est notable qu'il ne l'ait présenté et étudié que comme un problème purement algorithmique. Newton ne fait que chercher la manière de renverser le parcours algorithmique qui va des équations (6.76) aux égalités (6.78). Comme on le sait fort bien aujourd'hui, rien n'assure que si une certaine expression Algébrique exprime la sous-normale d'une courbe (par rapport à un certain système de coordonnées cartésiennes), alors cette courbe puisse être exprimée (par rapport au même système de coordonnées) par une équation Algébrique. *A fortiori*, on ne peut pas être sûr que pour toute expression Algébrique donnée, où n'intervient qu'une seule variable x ou y, il soit possible de trouver une équation de la forme des (6.76) telle que cette expression exprime la sous-tangente $sn._x$ d'une courbe exprimée par cette équation. Newton en est parfaitement conscient. Il sait bien, donc, que la méthode qu'il propose pour résoudre le problème qu'il se pose, ne peut pas mener au résultat cherché quelle que soit la nature de l'expression Algébrique donnée. Cette méthode lui permet pourtant non seulement de résoudre ce problème en plusieurs cas, mais aussi de définir des conditions sous lesquelles l'ordonnée de la courbe dont la sous-normale est

[94]Cf. la note (85), ci-dessus.
[95]Cf. la section 5.5.2, ci-dessus et, en particulier p. 289.
[96]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2 [4], 332-341.

censée être connue ne peut pas "être exprimée en termes Algébriques"[97]. Si cette remarque peut se lire d'un côté comme une prise de conscience d'une limitation de l'Algèbre, elle peut aussi être interprétée comme l'indication de la possibilité d'exprimer Algébriquement une condition qu'une courbe, dont l'ordonnée n'est pas exprimée par une expression Algébrique, doit respecter. Interprétée ainsi, cette remarque préfigure un effacement de la distinction entre Algébrique et non Algébrique grâce au recours à des équations qui seront dites plus tard "différentielles". Newton semble pourtant encore bien loin de la compréhension de cette possibilité.

Dans sa note, il distingue deux aspects de son problème. D'abord[98], il suppose donnée l'expression (ou "la valeur", comme il dit) de $sn._x$ (en termes de x), et il se pose le problème de trouver l'expression ("la valeur") de y^{2n} (en termes de x). Ensuite[99], il suppose donné l'expression ("la valeur") de $sn._x$ (en termes de y), et il se pose le problème de trouver l'expression ("la valeur") de x^n (en termes de y). Autant pour ce qui est du premier problème, que pour le second, il ne considère que des expressions rationnelles de $sn._x$. De surcroît, il n'aborde explicitement que le cas $n = 1, 2, 3$, pour le premier problème, et les cas $n = 1, 2$, pour le deuxième. Bien qu'il ne parvienne évidemment à aucun résultat général, il est clair que la méthode qu'il suit peut aussi être appliquée à la recherche d'une solution éventuelle de ce problème dans d'autres cas, pourvu, naturellement, que l'expression de $sn._x$ soit rationnelle. Cette méthode peut en général être décrite comme suit.

Supposons d'abord donnée une égalité telle que

$$sn._x = f(x) \tag{6.79}$$

$f(x)$ étant une certaine expression Algébrique en x, et $sn._x$ la sous-normale d'une courbe inconnue, qu'on suppose rapportée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales. Supposons aussi que $f(x)$ soit telle qu'il existe un exposant entier positif ν tel que $[f(x)]^\nu$ puisse être écrite comme le quotient $\frac{S}{T}$ de deux polynômes en x, S et T, premiers entre eux. Il s'agit de vérifier la possibilité de déterminer trois polynômes en x, A, B et R, tels que

$$\begin{aligned} RS &= \left(\frac{\ddot{A}B - A\ddot{B}}{x}\right)^\nu \\ RT &= \left(2nB\sqrt[n]{A^{n-1}B}\right)^\nu \end{aligned} \tag{6.80}$$

et donc :

$$\frac{RS}{RT} = \frac{S}{T} = [f(x)]^\nu = (sn._x)^\nu = \left(\frac{\ddot{A}B - A\ddot{B}}{2nBx\sqrt[n]{A^{n-1}B}}\right)^\nu \tag{6.81}$$

d'où il suit que l'équation de la courbe cherchée est la deuxième des équations (6.76), $y^{2n} = \frac{A}{B}$. C'est le premier des deux problèmes qu'on vient de distinguer.

Supposons ensuite donnée une égalité telle que

$$sn._x = f(y) \tag{6.82}$$

[97]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2 [4], 335 ; cf. aussi *ibid.*, 337. Le terme "Algébriques" est écrit en majuscule par Newton ; évidemment, cette convention n'a pas la signification que je lui assigne [cf. la section 1.2].

[98]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, [4], 332-339.

[99]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, [4], 339-341.

$f(y)$ étant une certaine expression Algébrique en y et $sn._x$ la sous-normale d'une courbe inconnue, qu'on suppose, de même, rapportée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales. Supposons aussi à nouveau que $f(y)$ soit telle qu'il existe un exposant entier positif ν, tel que $[f(y)]^\nu$ puisse être écrite comme le quotient $\frac{S}{T}$ de deux polynômes en y, S et T, premiers entre eux. On cherchera alors trois polynômes en y, A, B et R, tels que

$$\begin{aligned} RS &= \left(nB\sqrt[n]{A^{n-1}B}\right)^\nu \\ RT &= \left(\frac{\ddot{A}B - A\ddot{B}}{y^2}\right)^\nu \end{aligned} \tag{6.83}$$

et donc :

$$\frac{RS}{RT} = \frac{S}{T} = [f(y)]^\nu = (sn._x)^\nu = \left(\frac{nBy^2\sqrt[n]{A^{n-1}B}}{\ddot{A}B - A\ddot{B}}\right)^\nu \tag{6.84}$$

de sorte que l'équation de la courbe cherchée soit la quatrième des équations (6.76), $x^n = \frac{A}{B}$. C'est le deuxième des deux problèmes précédents.

Newton suppose en général que $\nu = n$, et indique comment on peut construire — lorsque c'est possible — les polynômes A et B (ainsi que le polynôme auxiliaire R) à partir de la donnée des polynômes S et T.

* * *

Si l'expression $f(x)$ peut d'elle même s'écrire sous la forme d'un polynôme en x où apparaissent éventuellement des puissances négatives de x, ou que l'expression $f(y)$ peut d'elle même s'écrire sous la forme de l'inverse d'un polynôme en y, où apparaissent éventuellement des puissances négatives de y, ceci n'est guère difficile. Dans ces cas, on a en effet respectivement

$$\begin{aligned} f(x) &= sn._x = \frac{S}{bx^m} = \frac{1}{b}\sum_{i=0}^{h} a_i x^{i-m} \\ f(y) &= sn._x = \frac{by^m}{T} = \frac{b}{\sum_{i=0}^{h} a_i y^{i-m}} \end{aligned} \tag{6.85}$$

et il suffit de supposer $n = 1$ et $B = b$ et de poser donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}\sum_{i=0}^{h} a_i x^{i-m} &= \frac{\ddot{A}}{2bx} \\ \frac{b}{\sum_{i=0}^{h} a_i y^{i-m}} &= \frac{by^2}{\ddot{A}} \end{aligned} \tag{6.86}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \ddot{A} &= 2\sum_{i=0}^{h} a_i x^{i-m+1} && (6.87) \\ \ddot{A} &= \sum_{i=0}^{h} a_i y^{i-m+2} \end{aligned}$$

et, donc, pourvu qu'on ait respectivement $a_{k-1} = 0$ et $a_{k-2} = 0$:

$$\begin{aligned} A = by^2 = 2\sum_{i=0}^{h} \frac{a_i}{i-m+1} x^{i-m+1} + c \\ A = bx = \sum_{i=0}^{h} \frac{a_i}{i-m+2} y^{i-m+2} + c \end{aligned} \qquad (6.88)$$

c étant, dans les deux cas, une constante quelconque.

Ces deux cas, fort simples, font l'objet de deux premières règles qui concernent respectivement le premier et le deuxième des deux problèmes précédents, que Newton ne manque pas d'énoncer d'entrée[100]. Pourtant, ces deux règles ne s'accordent pas tout à fait avec l'argument précédent, et cela pour trois raisons distinctes.

La première de ces raisons tient au fait que Newton pense la sous-tangente de n'importe quelle courbe, en n'importe quel point, comme une grandeur positive. En supposant que celle-ci est exprimée par un quotient tel que $\frac{S}{T}$ (où on aura posé respectivement $T = bx^m$ ou $S = by^m$), il semble donc supposer que ce quotient indique la valeur absolue de la sous-normale dont il est question. Il ne fait pourtant qu'appliquer le procédé précédent en prenant ce quotient avec le signe positif, supposant que les expressions trouvées pour $\frac{A}{b}$ n'expriment pas y^2 ou x, mais plus généralement $\pm y^2$ et $\pm x$ — où le symbole "$\pm$" indique, encore une fois, un des deux signes $+$ ou $-$, choisi de manière convenable —, tout en se donnant ensuite le droit de transformer les égalités ainsi trouvées en des équations où le symbole "$\pm$" disparaît en faveur du signe positif. Dans certains cas, ceci conduit à des résultats qui ne sont corrects qu'à condition de considérer que la sous-normale dont il est question est exprimée par le quotient $\frac{S}{T}$ pris avec le signe négatif. Il est en fait possible que, pris avec le signe positif, ce quotient ne puisse pas exprimer la sous-normale d'une courbe exprimée par une équation Algébrique. Si l'on veut éviter de considérer explicitement les valeurs absolues de ce quotient (comme on l'a fait ci-dessus en présentant la méthode de Newton en général), il faut donc prendre en compte cette possibilité. Le deuxième exemple choisi par Newton pour illustrer sa première règle est parlant[101]. Il tient à l'égalité

$$sn._x = \frac{b^4}{x^3} \qquad (6.89)$$

En raisonnant comment l'on vient de dire — et en en supposant que c soit égale à zéro[102] —, Newton en tire

$$-\frac{b}{x^3} = \pm y^2 \qquad (6.90)$$

[100] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, [4], respectivement 332 et 339.
[101] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, [4], 332.
[102] Je vais revenir sur ce point dans un instant.

où le symbole "±" ne peut qu'indiquer le signe négatif. Il passe ensuite à la racine avec le signe positif, ce qui donne l'équation

$$y = \frac{b^2}{x} \tag{6.91}$$

La sous-normale $sn._x$ de la courbe exprimée par cette équation est pourtant égale à $-\frac{b^4}{x^3}$ et non pas à $\frac{b^4}{x^3}$. Il en est ainsi également pour la courbe symétrique d'équation $y = -\frac{b^2}{x}$. Le quotient $\frac{b^4}{x^3}$, pris avec le signe positif, ne peut donc qu'exprimer la valeur absolue de la sous-normale à ces courbes.C'est ce que Newton semble en effet supposer.

On comprendra alors que, malgré l'attention qu'il donne aux aspects algorithmiques du problème considéré, Newton ne sache pas se soustraire aux contraintes que ce problème porte avec lui, en tant que problème essentiellement géométrique. On comprends alors que cette attention aux aspects algorithmiques n'est que l'effet d'une omission de l'aspect proprement géométrique du problème. Une omission qu'il n'a pas encore les moyens de justifier.

Je viens aux deux raisons restantes, qui tiennent, elles aussi à des omissions, mais d'une nature différente.

D'abord Newton n'observe pas en général que l'inversion de l'algorithme n'est possible que si, dans le polynôme considéré, n'apparaît pas de terme d'ordre 0, même si dans les exemples qu'il considère il écarte cette possibilité. On ne saura voir ici qu'un défaut d'exposition.

La deuxième omission est plus significative, car elle tient à l'élimination systématique de la constante c, ou, si on veut, à l'assignation à celle-ci de la valeur zéro. Dans ce cas, il ne semble pas s'agir d'un simple défaut d'l'exposition. De plus, il est difficile de supposer que Newton n'ait pas vu que l'algorithme qui conduit d'un polynôme A au polynôme $\ddot{A}$ comporte l'élimination de tout terme constant de A[103]. Il est plus naturel de penser que Newton ne cherche qu'une seule équation parmi l'infinité qui expriment les courbes partageant la sous-normale donnée, et notamment la plus simple[104], qui est d'ailleurs celle qui exprime directement la relation entre la valeur de x et la valeur de l'aire Ky, d'une courbe d'équation $z = K\frac{sn._x}{y}$.

[103] On observe que ceci n'est évidemment pas le cas de l'algorithme pour la sous-normale pris en tant que tel : la sous-normale $sn._x$, calculée au point de cette courbe correspondant à une position quelconque $x = \xi$, d'une courbe d'équation $y = f(x) + c$ n'est nullement égale à la sous-normale, calculée au point de cette courbe correspondant à la position $x = \xi$, d'une courbe d'équation $y = f(x)$ — encore que cette même sous-normale, calculée pour $y = \zeta$, soit égale pour deux courbes respectivement d'équation $x = f(y)$ et $x = f(y) + c$. En termes algorithmiques, ceci tient au fait que cette sous-normale résulte (quelle que soit la variable principale choisie) du produit $y\frac{dy}{dx}$. En termes géométriques, ceci tient au fait que la sous-normale se mesure toujours sur un axe donné, indépendamment de la position de la courbe par rapport à cet axe, de sorte qu'elle change si et seulement si la courbe translate selon une direction qui n'est pas parallèle à cet axe. Newton semble l'avoir compris. Tout en cherchant à inverser l'algorithme de la sous-normale — et non celui qui donne le rapport entre celle-ci et l'ordonnée —, il trouve en effet la manière d'isoler dans cet algorithme l'apport d'un algorithme plus particulier (correspondant à la règle de Hudde), et fait porter proprement l'inversion sur ce dernier.

[104] On remarque que si la méthode de Newton s'applique à des expressions de $sn._x$, en termes de la variable y, choisie comme variable principale, alors les différentes équations qu'elle permet de déterminer ne font qu'exprimer la même courbe, prise dans différentes positions par rapport à un axe tiré de l'origine perpendiculairement à l'axe sur lequel la sous-normale $sn._x$ est prise. Ceci ne dépend pourtant que du fait que, dans le cas considéré, l'équation de cette courbe est une équation du premier degré en x, alors que, comme on le verra, Newton suppose que la constante c est nulle quel que soit le degré des équations trouvées, autant en x qu'en y.

Les trois omissions que l'on vient de signaler interviennent aussi lorsque Newton considère des cas plus compliquées. Il ne sera pas nécessaire de les signaler à chaque cas.

* * *

Ces cas tiennent à des quotients $\frac{S}{T}$ de deux polynômes en x dont le premier ne se réduit pas à un monôme, ou de deux polynômes en y dont le deuxième ne se réduit pas à un monôme. Comme on l'a dit, Newton suppose successivement que ce quotient exprime des puissances différentes de $sn._x$.

Supposons[105] que $\frac{S}{T}$ soit un quotient de polynômes en x et qu'il exprime directement la sous-normale $sn._x$, de sorte qu'il soit possible de poser $n = 1$ et de chercher une équation entière telle que $y^2 = \frac{A}{B}$. Ceci nous permettra de donner un exemple la méthode suivie par Newton dans tous les cas restants.

En posant $n = \nu = 1$ dans les égalités (6.80), on obtient :

$$RS = \frac{\ddot{A}B - A\ddot{B}}{x} \qquad ; \qquad RT = 2B^2 \tag{6.92}$$

Il s'ensuit que si on suppose que B possède des facteurs qui ne sont pas des facteurs de T, alors ces facteurs sont des facteurs de R et donc des facteurs de $\frac{\ddot{A}B - A\ddot{B}}{x}$. Il convient donc de supposer que B ne possède que des facteurs qui sont aussi des facteurs de T. Supposons qu'on sache écrire T comme un produit de facteurs réels (non constants) les plus simples possibles. Par simplicité appelons ces facteurs "facteurs minimaux de T"[106]. Newton suppose alors que T soit tel qu'aucun de ces facteurs n'entre en T une seule fois[107], et propose d'identifier B avec le quotient de la division de T par le produit de tous les facteurs minimaux différents de T lui-même, chacun de ces facteurs étant pris une seule fois. Il cherche ensuite de déterminer A en conséquence.

Si on pose

$$T = \rho \prod_{i=1}^{\mu} t_i^{\nu_i} \tag{6.93}$$

(où t_i sont les facteurs minimaux non constantes de T, ν_i des exposants entiers tous plus grands que 1,indiquant combien de fois chacun de ces facteurs intervient en T, μ un nombre entier strictement positif, et ρ un facteur constant), on aura :

$$B = \prod_{i=1}^{\mu} t_i^{\nu_i - 1} \tag{6.94}$$

[105] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, [4], 332-335.

[106] Newton qualifie génériquement ces facteurs de "derniers diviseurs littéraux" [cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2 [4], 332]. Dans ses exemples, il ne considère pourtant que des polynômes (homogènes) en x et a (a étant une constante paramétrique), dont tous les zéros sont réels, et peuvent être aisément déterminés et exprimés par des expressions Algébriques. Naturellement, Newton construit ces exemples *ad hoc*, en construisant T comme un produit de facteurs réels de premier degré donnés *a priori*, et ne fait aucune allusion au cas où les zéros de T ne sont pas réels. D'ailleurs, comme les facteurs de T que Newton considère interviennent dans la détermination de A et de B, qui sont des polynômes à coefficients réels que celui-ci prétend construire d'une manière effective à partir de la donnée des polynômes S et T, la limitation à des facteurs réels exprimés par des expressions Algébriques est essentielle, bien que rien n'oblige en général à se limiter à des facteurs du premier degré. En parlant des facteurs minimaux d'un polynôme, je ne me se référerai donc par la suite qu'à des facteurs réels (non constants), en supposant qu'ils sont exprimés par des expressions Algébriques.

[107] Je vais revenir sur la raison de cette supposition.

et donc

$$R = \frac{2}{\rho}\prod_{i=1}^{\mu} t_i^{\nu_i-2} \tag{6.95}$$

Comme on a supposé que $\ddot{A}B - A\ddot{B} = xRS$, il s'agit de chercher à déterminer A de telle sorte qu'il satisfasse à la condition suivante :

$$\ddot{A}\prod_{i=1}^{\mu} t_i^{\nu_i-1} - A\,\ddot{\overline{\prod_{i=1}^{\mu} t_i^{\nu_i-1}}} = \frac{2}{\rho}xS\prod_{i=1}^{\mu} t_i^{\nu_i-2} \tag{6.96}$$

Or, comme R ne contient, par construction, que des facteurs non constants qui sont aussi des facteurs minimaux multiples de B et que $\ddot{B}$ dérive de B par application de la règle de Hudde, le théorème de Hudde nous assure que si ces facteurs sont des facteurs du premier degré, alors il sont aussi des facteurs de $\ddot{B}$.

Il n'est pas difficile de vérifier qu'il en est ainsi. En effet, si M et N sont deux polynômes quelconques (de degré plus grand ou égal à 1),

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=0}^{h} a_i x^i \\ N &= \sum_{i=0}^{k} b_i x^i \end{aligned} \tag{6.97}$$

et qu'on suppose que $B = MN$, on aura

$$B = \sum_{i=0}^{h+k}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right)x^i \tag{6.98}$$

(avec $a_j = 0$ si $j > h$ et $b_{i-j} = 0$ si $i - j > k$), et donc, en appliquant la règle de Hudde,

$$\begin{aligned} \ddot{B} &= \sum_{i=1}^{h+k} i\left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right)x^i \\ &= \left(\sum_{i=0}^{h} i a_i x^i\right)N + \left(\sum_{i=0}^{k} i b_i x^i\right)M \\ &= \ddot{M}N + \ddot{N}M \end{aligned} \tag{6.99}$$

Le même argument nous amène de surcroît à conclure que si L est un polynôme tel que $M = L^2$, alors $\ddot{M} = 2\ddot{L}L$, et donc

$$\ddot{B} = L\left(2\ddot{L}N + \ddot{N}L\right) \tag{6.100}$$

Il s'ensuit que tout facteur multiple non constant de B est aussi un facteur de $\ddot{B}$. Newton ne prouve pas ceci en général, et il aurait certes eu des difficultés à le faire. Il aurait néanmoins pu vérifier sans peine que c'est ainsi dans tout cas particulier, et en conclure donc que — comme par construction tout facteur minimal de R est un facteur multiple de B — tout facteur de R est aussi un facteur de $\ddot{B}$ et par conséquent de $\ddot{A}B - A\ddot{B}$. Il s'ensuit que le quotient $\frac{\ddot{A}B-A\ddot{B}}{R}$ est nécessairement un polynôme. Il s'agit donc de trouver le polynôme A qui vérifie la condition $\frac{\ddot{A}B-A\ddot{B}}{R} = xS$, S, R et B étant donnés.

Pour ce faire, Newton propose d'employer la méthode des coefficients indéterminés. Comme, pour tout polynôme Q, le polynôme $\ddot{Q}$ a le même degré que Q, le polynôme AB doit avoir le même degré que le polynôme $\ddot{A}B - A\ddot{B}$, et donc le même degré que xRS. De là, il s'ensuit que le degré de A doit être égal à 1 plus le degré de R, plus le degré de S moins le degré de B. Mais si R à été déterminé comme on l'a dit à la suite de l'hypothèse (6.94), son degré ne dépend que de la factorisation de T, donc le degré de A ne dépend que du degré de S et de la factorisation de T. Supposons alors que ce degré ait été fixé et qu'il soit égal à λ. Il ne s'agit alors que de poser

$$A = \sum_{i=0}^{\lambda} \alpha_i x^i \tag{6.101}$$

les α_i étant des coefficients indéterminés, de substituer cette expression de A dans l'égalité (6.96), et d'appliquer justement la méthode des coefficients indéterminés pour obtenir un système linéaire en les inconnues α_i. Quel que soit λ, il est clair que ce système contiendra plus que λ équations, car l'équation $\frac{\ddot{A}B-A\ddot{B}}{R} = xS$ est une équation de degré au moins égal à $\lambda + 2$. Il est néanmoins possible que ce système soit indéterminé, ou même qu'il soit contradictoire.

S'il est indéterminé, on peut fixer arbitrairement certains des coefficients α_i, et chercher à déterminer les autres en fonction de ce choix. C'est ce que Newton illustre par deux exemples, où T est choisi de telle manière qu'il ne possède que des facteurs réels multiples du premier degré[108] et le quotient $\frac{S}{T}$ est choisi de manière que le succès de la méthode est garanti. Dans l'un et l'autre de ces exemples, le système linéaire en les inconnues α_i est déterminé à la fixation arbitraire d'un coefficients près. Les différentes solutions qu'on obtient en fixant arbitrairement un des α_i fournissent naturellement des expressions pour $\frac{A}{B} = y^2$ qui diffèrent entre elles par un terme constant, qui rempli la même fonction de la constante c dans la première des égalités (6.88), c'est-à-dire, dans notre langage, une constante d'intégration[109]. Newton évite pourtant de le remarquer. De manière générale, il ne remarque pas que le système linéaire qu'il construit pour déterminer les coefficients α_i ne peut pas être déterminé, et que son indétermination correspond à une caractéristique essentielle du problème posé[110]. Bien que le passage par un système linéaire conduisant

[108] Cf. la note (106), ci-dessus.

[109] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, notes (37) et (38), 333, et (40), 334.

[110] On observe de toute manière que de l'équation

$$y^2 = \frac{A}{B} + c$$

il s'ensuit, selon la première des égalités (6.78)

$$sn._x = \pm \frac{\left[\ddot{A} + \ddot{B}c\right] B - [A + Bc]\,\ddot{B}}{2B^2x} = \pm \frac{\ddot{A}B - A\ddot{B}}{2B^2x}$$

d'où Newton aurait aisément pu conclure que les différentes expressions de y^2 trouvées par sa méthode doivent nécessairement différer pour un terme constant.

à la détermination explicite du polynôme A fait que Newton ne peut pas éviter de faire apparaître dans ses solutions un terme constant arbitraire, ce silence semble ne pouvoir se justifier que par la même raison qui justifie l'omission de la constante c dans les égalités (6.88) : Newton n'est intéressé qu'à trouver des solutions à ses problèmes, et non pas toutes les solutions possibles. Encore une fois, les solutions qu'il trouve répondent à une condition de simplicité ; ce n'est pourtant pas la simplicité de l'expression de y^2 qui est maintenant en cause, mais celle de la solution du système linéaire qui détermine les coefficients de A.

* * *

Il reste que ce dernier système peut être contradictoire. Newton considère cette possibilité dans une remarque faisant suite à ses exemples[111] :

> If x is in some divisor of T, which is like no other Divisor, the valor of y^2 cannot bee expressed in Algebraic termes, as also if there be contraddictions in the comparisons of the termes of $\frac{\ddot{A}B-\ddot{B}A}{xR}$ [Newton écrit "L" pour ce quotient] and S, the same quantity being found greater by one terme than by another.

Newton déclare ainsi que les deux conditions en question — le fait que T ait des facteurs minimaux non multiples, et que le système linéaire qui sert à déterminer les α_i soit contradictoire — ne sont pas seulement des conditions suffisantes pour la non applicabilité de sa méthode ou pour l'impossibilité de trouver une expression rationnelle $\varphi(x)$ de y^2, telle que l'équation Algébrique $y^2 - \varphi(x) = 0$ exprime une courbe dont la sous-normale $sn._x$ est égale à $\frac{S}{T}$. Il ajoute que si ces conditions se vérifient il est tout court impossible de trouver une expression Algébrique $\varphi(x)$ telle que $y^2 - \varphi(x) = 0$. Il ne donne pourtant aucun argument pour justifier sa déclaration. Il s'agit donc de comprendre comment il a pu arriver à cette conclusion.

Comme Newton se réclame de deux conditions distinctes, cela pose deux problèmes. Ces problèmes ne sont pourtant pas distincts entre eux, comme nous le verrons clairement après avoir considérer le premier d'entre eux.

Supposons que T ait au moins un facteur minimal non multiple et posons :

$$T = \rho t_1 \prod_{i=2}^{\mu} t_i^{\nu_i} \tag{6.102}$$

où t_1 est un facteur minimal différent de tous les t_i $(i = 2, ..., \mu)$ et les ν_i sont, comme ci-dessus, des exposants entiers plus grands que 1. Ceci étant posé,déterminons B de manière que t_1 ne soit pas un de ses facteurs. On aura alors, en suivant pour le reste les indications de Newton :

$$B = \prod_{i=2}^{\mu} t_i^{\nu_i - 1} \qquad ; \qquad R = \frac{2}{\rho t_1} \prod_{i=2}^{\mu} t_i^{\nu_i - 2} \tag{6.103}$$

Pour déterminer A, il faudrait alors poser :

$$\frac{2}{\rho t_1} \prod_{i=2}^{\mu} t_i^{\nu_i - 2} S = \frac{\ddot{A}B - A\ddot{B}}{x} \tag{6.104}$$

[111] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, [4], 335.

Celle-ci est néanmoins une égalité impossible, car $\ddot{A}$ et $\ddot{B}$ étant par définition divisibles par x, le deuxième membre de cette égalité est un polynôme, tandis que le premier ne peut pas l'être, S et T étant premiers entre eux.

Imaginons alors d'inclure t_1 parmi les facteurs de B. En suivant encore, pour le reste, les indications de Newton, on aura :

$$B = t_1 \prod_{i=2}^{\mu} t_i^{\nu_i - 1} \qquad ; \qquad R = \frac{2}{\rho} t_1 \prod_{i=2}^{\mu} t_i^{\nu_i - 2} \tag{6.105}$$

Pour déterminer A, il faudrait donc poser :

$$\frac{2S}{\rho} t_1 \prod_{i=2}^{\mu} t_i^{\nu_i - 2} = \frac{\ddot{A}B - A\ddot{B}}{x} \tag{6.106}$$

Mais, comme on peut supposer que A et B soient eux aussi premiers entre eux, il s'ensuit que t_1 ne peut pas être un facteur de A, et donc cette égalité n'est à son tour possible qu'à condition que t_1 soit un facteur de $\frac{\ddot{B}}{x}$.

Or, il est facile de prouver que ceci ne peut pas être le cas. Il suffit de raisonner comme on l'a fait ci-dessus pour s'assurer que tout facteur multiple de B est aussi un facteur de $\ddot{B}$. En effet si dans les égalités (6.97), on pose $M = t_1$ et $N = \prod_{i=2}^{\mu} t_i^{\nu_i - 1}$, on a, conformément à l'égalité (6.99),

$$\ddot{B} = \ddot{t}_1 \prod_{i=2}^{\mu} t_i^{\nu_i - 1} + t_1 \ddot{\overline{\prod_{i=2}^{\mu} t_i^{\nu_i - 1}}} \tag{6.107}$$

Comme t_1 n'est pas, par hypothèse, un facteur de $\prod_{i=2}^{\mu} t_i^{\nu_i - 1}$, il s'ensuit qu'il est un facteur de $\frac{\ddot{B}}{x}$ si et seulement s'il est un facteur de $\frac{\ddot{t}_1}{x}$ (qui, conformément à la règle de Hudde ne pourra qu'être un polynôme, éventuellement de degré zéro). Mais ceci est impossible, donc t_1 n'est pas un facteur de $\frac{\ddot{B}}{x}$ et l'égalité (6.106) est donc impossible à son tour.

On pourrait objecter que Newton n'aurait pas pu prouver ceci en général. À cela on peut répondre, comme tout-à-l'heure, qu'il aurait quand-même pu vérifier sans peine que c'est ainsi dans tout cas particulier. Mais on peut aussi remarquer que si t_1 n'est pas seulement un facteur réel, mais qu'il a aussi un zéro réel, $x = X$ (ce qui est évidemment toujours le cas si t_1 est un facteur du premier degré), alors Newton aurait pu raisonner comme il suit. Si t_1 s'annule pour $x = X$, alors la courbe d'équation $y = B$ coupe l'axe des x au point qui correspond à cette position, et si $x = X$ est aussi un zéro de $\ddot{B}$ (c'est-à-dire d'un polynôme obtenu de B en appliquant la règle de Hudde), alors l'axe des abscisses est tangent à cette courbe en ce point, donc cette courbe a en ce point une tangente horizontale, et donc t_1 doit être un facteur double de B. Ainsi, s'il n'est pas un facteur double de B, il ne peut pas être un facteur de $\ddot{B}$ (et donc, *a fortiori*, de $\frac{\ddot{B}}{x}$). Bien qu'il ne soit pas général, car il suppose que t_1 a un zéro réel, cet argument — qui ne fait que prouver la réciproque du théorème de Hudde (ce qui, lorsque t_1 est un facteur du premier degré, est tout ce qu'il faut prouver) — s'applique à tous les exemples considérés par Newton.

Quel que soit l'argument que Newton a suivi pour arriver à conclure que les égalités (6.104) et (6.106) sont l'une et l'autre impossibles, il est clair que cet argument ne peut que porter sur le polynôme $\ddot{B}$ conçu comme un objet à part entière, et non pas simplement sur la règle de transformation algorithmique qui conduit de B à $\ddot{B}$. Cela confirme ce que j'ai observé à la fin de la section (6.3.2).

Mais, s'assurer que ces deux égalités sont l'une et l'autre impossibles, ce n'est que s'assurer que si T a des facteurs minimaux non multiples, alors la méthode précédente ne peut pas conduire à la solution du problème ; Newton déclare plutôt que s'il en est ainsi, alors y^2 "ne peut pas être exprimée en termes algébriques", quelle que soit la méthode choisie.

À ce point, le premier des deux problèmes rejoint le deuxième. Il s'agit de comprendre ce qui aurait pu convaincre Newton que la méthode précédente fournit la solution cherchée si et seulement si cette solution consiste en la détermination d'une expression Algébrique propre à exprimer y^2. Comme, conformément à cette méthode, la nature de A dépend du choix de B, il est clair que s'il existe un quotient de polynômes qui satisfait les conditions du problème, alors la méthode en question doit nous permettre de le déterminer. Si cette méthode ne conduit donc pas à la solution cherchée, c'est que y^2 ne peut pas être exprimée par un quotient de polynômes. Newton semble donc affirmer que si la sous-tangente $sn._x$ est exprimée par un quotient de polynômes (par une fonction rationnelle de x, dans notre langage), alors aucune expression Algébrique différent d'une quotient de polynômes (aucune fonction irrationnelle de x) ne peut exprimer y^2.

Supposons que ce ne soit pas ainsi, c'est-à-dire que, tout en ayant $sn._x = \frac{S}{T}$, S et T étant deux polynômes en x premiers entre eux, on ait $y^2 = g(x)$, $g(x)$ étant une expression Algébrique non réductible à un quotient de polynômes. Supposons ainsi que cette équation, une fois réduite en forme entière, se transforme en l'équation :

$$G(x, y^2) = \sum_{j=0}^{n} \mathfrak{X}_j y^{2j} = 0 \tag{6.108}$$

où les $\mathfrak{X}_j$ sont, comme dans la première des équations (5.136), des polynômes en x. Conformément à l'égalité (5.142), on aura alors :

$$\frac{S}{T} = -\frac{y^2}{x} \frac{\sum\limits_{j=0}^{n} \ddot{\mathfrak{X}}_j \; y^{2j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} 2j\mathfrak{X}_j y^{2j-2}} \tag{6.109}$$

Mais le membre de droite de cette égalité ne peut être à son tour un quotient de polynômes que si y^2 est réductible à un quotient de polynômes. Si l'on suppose que ce n'est pas ainsi, cette égalité est donc impossible.

Newton a donc tout simplement compris que l'algorithme qui conduit à la détermination de la sous-tangente $sn._x$ d'une courbe d'équation $F(x, y) = 0$ ne peut pas conduire à l'élimination d'une irrationalité éventuellement présente dans l'expression de y^2 donnée par cette équation[112].

[112]Il en va de même si l'irrationalité est présente dans n'importe quelle puissance paire de y. Au contraire, une irrationalité présente dans une puissance impaire de y peut, dans certains cas, être éliminée en passant

* * *

Après avoir présenté, illustré par deux exemples, et commenté comme l'on vient de voir sa méthode relative à la recherche d'une expression rationnelle de y^2 correspondant à une expression rationnelle donnée, exprimant $sn._x$ en termes de x, Newton décrit[113] comment on peut déterminer une expression rationnelle de y^4, puis de y^6, correspondant à des expressions rationnelles données exprimant respectivement $(sn._x)^2$ et $(sn._x)^4$ en termes de x. Enfin, il clôt sa note en décrivant, beaucoup plus rapidement[114], comment on peut déterminer une expression rationnelle de x, puis de x^2, correspondant à une expression rationnelle donnée, exprimant respectivement $sn._x$ et $(sn._x)^2$ en termes de y.

Naturellement, pour parvenir à ces résultats, il est nécessaire de modifier convenablement la procédure précédente. Ces modifications ne touchent pourtant pas à l'essentiel de la méthode, et Newton lui-même ne les décrit qu'assez sommairement, exception faite pour le premier cas. Je ne vais donc pas, à mon tour, prendre le temps de les détailler[115].

6.4 Annexe

Reconstruction de la table de quadrature donnée par Newton dans l'été 1665[116]

1. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^n}{a^{n-1}} \quad (n = 1, 2, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, 8, \ldots)$

   $\kappa = 0$
   $F(x, z) = 0$

$$nx^{n-1} = a^{n-2}z \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\frac{\xi^n}{a^{n-2}}\right|$$

à la sous-normale. En effet, si on pose

$$y^\nu = [g(x)]^{\frac{h}{k}}$$

où h et k sont deux nombres entiers strictement positifs premiers entre eux et $g(x)$ une fonction rationnelle de x, on aura

$$sn._x = \frac{h}{\nu k}[g(x)]^{\frac{2h}{\nu k}-1}g'(x)$$

Or, si $\nu = 2n$, on aura

$$\frac{2h}{\nu k} = \frac{1}{n}\frac{h}{k}$$

qui ne pourra se réduire à un nombre entier pour aucune valeur de n. En revanche si $\nu = 2(n+1)$, on aura

$$\frac{2h}{\nu k} = \frac{2h}{(2n+1)k}$$

qui pourra se réduire à un nombre entier lorsque $k = 2$. C'est peut-être une autre raison pour laquelle Newton se limite dans sa note à considérer des puissances paires de y.

[113] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, [4], respectivement 335-338 et 338-339.

[114] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, [4], respectivement 339-340 et 340-341.

[115] Cf., de toute manière, les explications données par Whiteside : Newton (MP), I, **2**, 5, § 2, notes : (45)-(47), 335-337 ; et (53), 338 ; (56), 339 ; et (60), 341.

[116] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 1, [4], 305-313 et la section 6.1.

2. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^n}{a^2 b^{n-3}} + \dfrac{x^3}{a^2} \quad (n = 1, 2, 3, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \ldots)$

$\begin{cases} n \text{ impaire} & : \quad \kappa = 0 \\ n \text{ paire} & : \quad \kappa = -b \quad ; \quad \kappa = 0 \end{cases}$
$F(x, z) = 0$

$$nx^{n-1} + 3b^{n-3}x^2 = b^{n-3}az \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi} [z]\right] = \left|\frac{\xi^n}{ab^{n-3}} + \frac{\xi^3}{a}\right|$$

3. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^n}{a^2 b^{n-3}} - \dfrac{x^3}{a^2} \quad (n = 1, 2, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, 7, \ldots)$

$\begin{cases} n \text{ impaire} & : \quad \kappa = -b \quad ; \quad \kappa = 0 \quad ; \quad \kappa = b \\ n \text{ paire} & : \quad \kappa = -b \quad ; \quad \kappa = 0 \end{cases}$
$F(x, z) = 0$

$$nx^{n-1} - 3b^{n-3}x^2 = b^{n-3}az \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi} [z]\right] = \left|\frac{\xi^n}{ab^{n-3}} - \frac{\xi^3}{a}\right|$$

4. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{a^{n+1}}{x^n} \quad (n = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, 6, \ldots)$

$\kappa = -\infty \quad [\xi > \kappa] \quad ; \quad \kappa = +\infty \quad [\xi < \kappa]$
$F(x, -z) = 0$

$$na^{n+2} = x^{n+1}z \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi} [z]\right] = \left|\frac{a^{n+2}}{\xi^n}\right|$$

5. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^n}{a^n}\sqrt{ax} \quad (n = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, 6, \ldots)$

$\kappa = 0 \quad [\xi > \kappa]$
$F(x, -z) = F(x, z) = 0$

$$(2n+1)^2 x^{2n-1} = 4a^{2n-3}z^2 \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi} [z]\right] = \left|\frac{\xi^n}{a^{n-1}}\sqrt{a\xi}\right|$$

6. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{a^n}{x^n}\sqrt{ax} \quad (n = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, 5, , \ldots)$

$\kappa = +\infty \quad [\xi < \kappa]$
$F(x, -z) = F(x, z) = 0$

$$(2n-1)^2 a^{2n+3} = 4x^{2n+1}z^2 \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi} [z]\right] = \left|\frac{a^{n+1}}{\xi^n}\sqrt{a\xi}\right|$$

7. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^n}{a^n}\sqrt{ax+a^2} \quad (n = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, 6, \ldots)$

$$\begin{cases} n = 0 & : \quad \kappa = -a \quad [\xi > \kappa] \quad ; \\ n = 1, 2, \ldots & : \quad \kappa = -a \quad [\xi > \kappa] \quad ; \quad \kappa = 0 \end{cases}$$

$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{aligned} x^{2n-2}\left[(2n+1)x + 2na\right]^2 &= \\ = 4a^{2n-3}\,(x+a)\,z^2 \end{aligned} \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\frac{\xi^n}{a^{n-1}}\sqrt{a\xi+a^2}\right|$$

8. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{a^n}{x^n}\sqrt{ax+a^2} \quad (n = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 4\ldots)$

$\kappa = -a \quad [\xi > \kappa] \quad ; \quad \kappa = +\infty \quad [\xi < \kappa]$

$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{aligned} a^{2n+3}\left[(2n-1)x + 2na\right]^2 &= \\ = 4x^{2n+2}(x+a)z^2 \end{aligned} \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\frac{a^{n+1}}{\xi^n}\sqrt{a\xi+a^2}\right|$$

9. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^n}{a^n}\sqrt{ax-a^2} \quad (n = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, 3\ldots)$

$\kappa = a \quad [\xi > \kappa]$

$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{aligned} x^{2n-2}\left[(2n+1)x - 2na\right]^2 &= \\ = 4a^{2n-3}(x-a)z^2 \end{aligned} \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\frac{\xi^n}{a^{n-1}}\sqrt{a\xi-a^2}\right|$$

10. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{a^n}{x^n}\sqrt{ax-a^2} \quad (n = \mathbf{1}, 2\ldots)$

$\kappa = a \quad [\xi > \kappa] \quad ; \quad \kappa = +\infty \quad [\xi < \kappa]$

$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{aligned} a^{2n+3}\left[(2n-1)x - 2na\right]^2 &= \\ = 4x^{2n+2}\,(x-a)\,z^2 \end{aligned} \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\frac{a^{n+1}}{\xi^n}\sqrt{a\xi-a^2}\right|$$

11. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^n}{a^n}\sqrt{a^2-ax} \quad (n = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, 3\ldots)$

$$\begin{cases} n = 0 & : \quad \kappa = a \quad [\xi < \kappa] \quad ; \\ n = 1, 2, \ldots & : \quad \kappa = 0 \quad ; \quad \kappa = a \quad [\xi < \kappa] \end{cases}$$

$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{aligned} x^{2n-2}\left[2na - (2n+1)x\right]^2 &= \\ = 4a^{2n-3}(a-x)z^2 \end{aligned} \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\frac{\xi^n}{a^{n-1}}\sqrt{a^2-a\xi}\right|$$

12. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{a^n}{x^n}\sqrt{a^2 - ax} \quad (n = \mathbf{1}, 2\ldots)$

$\kappa = -\infty \quad [\xi < \kappa] \quad ; \quad \kappa = a \quad [\xi < \kappa]$
$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{aligned} a^{2n+3}\left[(2n-1)x - 2na\right]^2 &= \\ &= 4x^{2n+2}(a-x)z^2 \end{aligned} \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_\kappa^\xi [z]\right] = \left|\frac{a^{n+1}}{\xi^n}\sqrt{a^2 - a\xi}\right|$$

13. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^n}{a^n}\sqrt{ax + x^2} \quad (n = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, 5, \ldots)$

$\kappa = -a \quad [\xi < \kappa] \quad ; \quad \kappa = 0 \quad [\xi > \kappa]$
$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{aligned} x^{2n-1}\left[2(n+1)x + (2n+1)a\right]^2 &= \\ &= 4a^{2n-2}(a+x)z^2 \end{aligned} \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_\kappa^\xi [z]\right] = \left|\frac{\xi^n}{a^{n-1}}\sqrt{a\xi + \xi^2}\right|$$

14. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{a^n}{x^n}\sqrt{ax + x^2} \quad (n = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 4, \ldots)$

$$\begin{cases} n = 1 & : \quad \kappa = -a \quad [\xi < \kappa] \\ n = 2, 3, \ldots & : \quad \begin{cases} \kappa = -\infty \quad [\xi > \kappa] \\ \kappa = -a \quad [\xi < \kappa] \\ \kappa = +\infty \quad [\xi < \kappa] \end{cases} \end{cases}$$
$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{aligned} a^{2n+2}\left[(2n-1)a + 2(n-1)x\right]^2 &= \\ &= 4x^{2n+1}(x+a)z^2 \end{aligned} \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_\kappa^\xi [z]\right] = \left|\frac{a^{n+1}}{\xi^n}\sqrt{a\xi + \xi^2}\right|$$

15. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^n}{a^n}\sqrt{ax - x^2} \quad (n = 0, \mathbf{1}, 2, 3, \ldots)$

$\kappa = 0 \quad [\xi > \kappa] \quad ; \quad \kappa = a \quad [\xi < \kappa]$
$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{aligned} x^{2n-1}\left[(2n+1)a - 2(n+1)x\right]^2 &= \\ &= 4a^{2n-2}(a-x)z^2 \end{aligned} \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_\kappa^\xi [z]\right] = \left|\frac{\xi^n}{a^{n-1}}\sqrt{a\xi - \xi^2}\right|$$

16. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^n}{a^n}\sqrt{a^2 + x^2} \quad (n = \ \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \ldots)$

$$\begin{cases} n = 0 & : \quad \kappa = ? \\ n = 1, 2, \ldots & \quad\ \ \kappa = 0 \end{cases}$$
$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{aligned} x^{2n-2}\left[(n+1)x^2 + na^2\right]^2 &= \\ &= a^{2n-2}(a^2+x^2)z^2 \end{aligned} \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_\kappa^\xi [z]\right] = \left|\frac{\xi^n}{a^{n-1}}\sqrt{a^2 + \xi^2}\right|$$

17. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{a^n}{x^n}\sqrt{a^2+x^2} \quad (n = \ \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 4, \ldots)$

$$\begin{cases} n=1 & : \quad \kappa = ? & & ; \\ n=2,3,\ldots & \quad \kappa = -\infty \quad [\xi > \kappa] & & ; \quad \kappa = +\infty \quad [\xi > \kappa] \end{cases}$$

$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{aligned} a^{2n+2}\left[(n-1)x^2 + na^2\right]^2 &= \\ = x^{2n+2}(a^2+x^2)z^2 & \end{aligned} \quad \leftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\frac{a^{n+1}}{\xi^n}\sqrt{a^2+\xi^2}\right|$$

18. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^n}{a^n}\sqrt{a^2-x^2} \quad (n = \ \mathbf{0}, \mathbf{1}, 2, 3, \ldots)$

$$\begin{cases} n=0 & : \quad \kappa = -a \quad [\xi > \kappa] \quad ; \quad \kappa = a \quad [\xi < \kappa] \\ n=1,2,\ldots & \quad \kappa = -a \quad [\xi > \kappa] \quad ; \quad \kappa = 0 \qquad \kappa = a \quad [\xi < \kappa] \end{cases}$$

$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{aligned} x^{2n-2}\left[na^2 - (n+1)x^2\right]^2 &= \\ = a^{2n-2}(a^2-x^2)z^2 & \end{aligned} \quad \leftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\frac{\xi^n}{a^{n-1}}\sqrt{a^2-\xi^2}\right|$$

19. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{a^n}{x^n}\sqrt{a^2-x^2} \quad (n = \ \mathbf{1}, 2, 3, \ldots)$

$\kappa = -a \quad [\xi > \kappa] \quad ; \quad \kappa = a \quad [\xi < \kappa]$

$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{aligned} a^{2n+2}\left[(n-1)x^2 - na^2\right]^2 &= \\ = x^{2n+2}(a^2-x^2)z^2 & \end{aligned} \quad \leftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\frac{a^{n+1}}{\xi^n}\sqrt{a^2-\xi^2}\right|$$

20. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^n}{a^n}\sqrt{a^2+bx+x^2} \quad (n = 0, \mathbf{1}, 2, 3, \ldots)$

$$\begin{cases} n=0 & : \begin{cases} b<2a & : \quad \kappa = ? \\ b=2a & : \quad \kappa = -a \\ b>2a & : \begin{cases} \kappa = \frac{-b-\sqrt{b^2-4a^2}}{2} & [\xi < \kappa] \\ \kappa = \frac{-b+\sqrt{b^2-4a^2}}{2} & [\xi > \kappa] \end{cases} \end{cases} \\ n=1,2\ldots & : \begin{cases} b<2a & : \quad \kappa = 0 \\ b=2a & : \quad \kappa = -a \qquad ; \quad \kappa = 0 \\ b>2a & : \begin{cases} \kappa = \frac{-b-\sqrt{b^2-4a^2}}{2} & [\xi < \kappa] \\ \kappa = \frac{-b+\sqrt{b^2-4a^2}}{2} & [\xi > \kappa] \end{cases} \quad ; \quad \kappa = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{aligned} x^{2n-2}\begin{bmatrix} 2na^2 + b(2n+1)x+ \\ +2(n+1)x^2 \end{bmatrix}^2 &= \\ = 4a^{2n-2}(a^2+bx+x^2)z^2 & \end{aligned} \quad \leftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\frac{\xi^n}{a^{n-1}}\sqrt{a^2+b\xi+\xi^2}\right|$$

21. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{a^n}{x^n}\sqrt{c^2+bx+x^2} \quad (n = \mathbf{0}, 1, 2, \ldots)$

$$\left\{\begin{array}{lcl}
n=0 & : & \left\{\begin{array}{lcl} b<2c & : & \kappa=? \\ b=2c & : & \kappa=-a \\ b>2c & : & \begin{array}{ll} \kappa=\frac{-b-\sqrt{b^2-4c^2}}{2} & [\xi<\kappa] \\ \kappa=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c^2}}{2} & [\xi>\kappa] \end{array} \end{array}\right. \\
n=1 & : & \left\{\begin{array}{lcl} b<2c & : & \kappa=? \\ b=2c & : & \kappa=-c \\ b>2c & : & \begin{array}{ll} \kappa=\frac{-b-\sqrt{b^2-4a^2}}{2} & [\xi<\kappa] \\ \kappa=\frac{-b+\sqrt{b^2-4a^2}}{2} & [\xi>\kappa] \end{array} \end{array}\right. \\
n=2,3\ldots & : & \left\{\begin{array}{lcl} b<2c & : & \kappa=-\infty \quad [\xi>\kappa] \quad ; \quad \kappa=+\infty \quad [\xi<\kappa] \\ b=2c & : & \left\{\begin{array}{l} \kappa=-\infty \quad [\xi>\kappa] \quad ; \quad \kappa=-c \\ \kappa=+\infty \quad [\xi<\kappa] \end{array}\right. \\ b>2c & : & \left\{\begin{array}{ll} \kappa=-\infty & [\xi>\kappa] \\ \kappa=\frac{-b-\sqrt{b^2-4a^2}}{2} & [\xi<\kappa] \\ \kappa=\frac{-b+\sqrt{b^2-4a^2}}{2} & [\xi>\kappa] \\ \kappa=+\infty & [\xi<\kappa] \end{array}\right. \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{array}{c} a^{2n+2}\left[\begin{array}{c} 2nc^2+b(2n-1)x+ \\ +2(n-1)x^2 \end{array}\right]^2 = \\ = 4x^{2n+2}(c^2+bx+x^2)z^2 \end{array} \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\frac{a^{n+1}}{\xi^n}\sqrt{c^2+b\xi+\xi^2}\right|$$

22. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{1}{a}\sqrt{a^{4-n}x^n+ax^3} \quad (n = \ 0, \mathbf{1}, 2, 3, \ldots)$

$$\left\{\begin{array}{lcl}
n=0 & : & \kappa=-a \quad [\xi<\kappa] \\
n \text{ impaire} & : & \kappa=0 \quad [\xi>\kappa] \\
n=2,4,\ldots & : & \kappa=-a \quad [\xi<\kappa] \quad ; \quad \kappa=0 \quad [\xi>\kappa]
\end{array}\right.$$

$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$\begin{array}{c} x\left[na^{3-n}x^{n-3}+3\right]^2 a = \\ = 4(a^{3-n}x^{n-3}+1)z^2 \end{array} \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\sqrt{a^{4-n}\xi^n+a\xi^3}\right|$$

23. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{a^{n+1}}{bx^{n-1}+x^n} \quad (n = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, 5\ldots)$

$\kappa=-\infty \quad [\xi>\kappa] \quad ; \quad \kappa=+\infty \quad [\xi<\kappa]$

$F(x,-z) = 0$

$$\begin{array}{c} a^{n+2}\left[(n-1)b+nx\right] = \\ = x^n(b+x)^2 z \end{array} \quad \longleftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\frac{a^{n+2}}{b\xi^{n-1}+\xi^n}\right|$$

24. $\mathcal{A}(x)=\dfrac{a^{2-n}x^n}{b+x} \quad (n=0,\mathbf{1},\ \mathbf{2},3\ldots)$

$$\begin{cases} n=0 & : \quad \kappa=-\infty \quad [\xi>\kappa] \quad ; \quad \kappa=+\infty \quad [\xi<\kappa] \\ n=1,2,\ldots & : \quad \kappa=0 \end{cases}$$
$F(x,z)=0$

$$\begin{aligned} x^{n-1}\left[(n-1)x+nb\right]a^{3-n} &= \\ =(b+x)^2 z \end{aligned} \quad \leftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right]=\left|\frac{a^{3-n}\xi^n}{b+\xi}\right|$$

25. $\mathcal{A}(x)=\dfrac{a^{n+1}}{x^{n-2}(b^2+x^2)} \quad (n=0,1,\mathbf{2},3,4,\ldots)$

$$\begin{cases} n=0 & : \quad \kappa=0 \\ n=1 & : \quad \kappa=-\infty \quad [\xi>\kappa] \quad ; \quad \kappa=0 \quad ; \quad \kappa=+\infty \quad [\xi<\kappa] \\ n=2,3,\ldots & : \quad \kappa=-\infty \quad [\xi>\kappa] \quad ; \quad \kappa=+\infty \quad [\xi<\kappa] \end{cases}$$
$F(x,-z)=0$

$$\begin{aligned} a^{n+2}\left[(n-2)b^2+nx^2\right] &= \\ =x^{n-1}(b^2+x^2)^2 z \end{aligned} \quad \leftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right]=\left|\frac{a^{n+2}}{\xi^{n-2}(b^2+\xi^2)}\right|$$

26. $\mathcal{A}(x)=\dfrac{a^n}{x^n}\sqrt[3]{a^2x} \quad (n=\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},4,\ldots)$

$\kappa=+\infty \quad [\xi<\kappa] \quad ; \quad F(x,-z)=0$

$$(3n-1)^3a^{3n+5}=27x^{3n+2}z^3 \quad \leftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right]=\left|\frac{a^{n+1}}{\xi^n}\sqrt[3]{a^2\xi}\right|$$

27. $\mathcal{A}(x)=\dfrac{x^n}{a^n}\sqrt[3]{a^2x} \quad (n=\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},4,\ldots)$

$\kappa=0$
$F(x,z)=0$

$$(3n+1)^3x^{3n-2}=27a^{3n-5}z^3 \quad \leftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right]=\left|\frac{\xi^n}{a^{n-1}}\sqrt[3]{a^2\xi}\right|$$

28. $\mathcal{A}(x)=\dfrac{a^n}{x^n}\sqrt[3]{ax^2} \quad (n=\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},4,\ldots)$

$\kappa=-\infty \quad [\xi>\kappa] \quad ; \quad \kappa=+\infty \quad [\xi<\kappa]$
$F(x,-z)=0$

$$(3n-2)^3a^{3n+4}=27x^{3n+1}z^3 \quad \leftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right]=\left|\frac{a^{n+1}}{\xi^n}\sqrt[3]{a\xi^2}\right|$$

29. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^n}{a^n}\sqrt[3]{ax^2} \quad (n = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 4, \ldots)$

$\kappa = 0$
$F(x,z) = 0$

$$x^{3n-1}(3n+2)^3 = 27a^{3n-4}z^3 \quad \leftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\frac{\xi^n}{a^{n-1}}\sqrt[3]{a\xi^2}\right|$$

30. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{a^n}{x^n}\sqrt[4]{a^3x} \quad (n = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, 3, \ldots)$

$\begin{cases} n = 0 & : \quad \kappa = 0 \quad [\xi > \kappa] \\ n = 1, 2, 3 & : \quad \kappa = +\infty \quad [\xi < \kappa] \end{cases}$
$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$a^{4n+7}\left[(4n-1)\right]^4 = 256x^{4n+3}z^4 \quad \leftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\frac{a^{n+1}}{\xi^n}\sqrt[4]{a^3\xi}\right|$$

31. $\mathcal{A}(x) = \dfrac{a^n}{x^n}\sqrt[4]{ax^3} \quad (n = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 4, \ldots)$

$\begin{cases} n = 0 & : \quad \kappa = 0 \quad [\xi > \kappa] \\ n = 1, 2, 3 & : \quad \kappa = +\infty \quad [\xi < \kappa] \end{cases}$
$F(x,-z) = F(x,z) = 0$

$$(4n-3)^4 a^{4n+5} = 256x^{4n+1}z^4 \quad \leftarrow \quad s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}[z]\right] = \left|\frac{a^{n+1}}{\xi^n}\sqrt[4]{a\xi^3}\right|$$

Chapitre 7

De l'algorithme des normales à l'algorithme des mouvements (au début de l'automne 1665)

Dès l'automne 1664, Newton avait comprit que si une courbe est exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par n'importe quelle équation Algébrique entière $F(x, y) = 0$, il suffit, pour parvenir à exprimer la sous-normale de cette courbe en termes de ces deux coordonnées, d'appliquer un algorithme fort simple s'appuyant sur deux applications de la règle de Hudde au polynôme $F(x, y)$, pris une fois comme un polynôme en x et une autre fois comme un polynôme en y, suivies respectivement d'une division par x et par y. Dans l'été 1665, il avait ensuite généralisé et justifié l'algorithme de quadrature que, dès le début du 1664, il avait tiré de sa lecture de l'*Arithmetica infinitorum* de Wallis, et il avait ainsi établi que si une courbe est exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par une équation de la forme $z = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{q_i}$, les q_i étant des exposants rationnels tous plus petits ou plus grands que -1, il suffit, pour parvenir à exprimer son aire, d'appliquer un algorithme linéaire qui, dans le cas où les exposants q_i sont des entiers positifs, se réduit à une inversion de la règle de Hudde suivi par une multiplication par x. Si la la courbe qu'on est censé carrer est exprimée, en revanche, par une équation Algébrique qui n'est pas réductible à la forme précédente, alors il est quelque fois possible de parvenir à sa quadrature, en consultant une table que Newton avait aussi construit pendant l'été 1665, grâce à une procédure à rebours fondée sur le théorème de van Heureat.

La comparaison entre ces trois procédures montre que, dans certains cas, la quadrature d'une courbe donnée, tient soit à l'application d'une règle inverse à celle qui s'applique deux fois pour trouver la sous-normale, soit à une lecture à rebours d'une table qu'on obtient en cherchant la sous-normale d'une classe de courbes exprimées par des équations entières convenablement choisies. On peut en conclure, et certainement Newton le fit, que le problème algorithmique consistant dans la recherche de l'équation d'une courbe dont on suppose connaître l'expression de la sous-normale — référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales — est un problème proche du problème consistant à trouver l'expression de l'aire d'une courbe exprimée — par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales — par une équation donnée. Cette proximité n'est pourtant pas un corrélat algorithmique satisfaisant du rapport de réciprocité entre le problème des normales et celui des quadratures établi, en deçà de tout algorithme, par le théorème de van Heuraet : elle ne se réduit pas à une relation de réciprocité algorithmique.

D'abord, il est aisé d'observer que l'algorithme des normales opère sur des équations entières en deux variables, et conduit à trouver une expression qui, en général, contient, elle-aussi, deux variables. Il induit ainsi une transformation de la forme

$$F(x, y) = 0 \to f(x, y) \tag{7.1}$$

où $F(x, y) = 0$ est nécessairement une équation entière et $f(x, y)$ est un quotient de polynômes en x et y exprimant la sous-normale cherchée. En revanche, le problème de trouver l'expression de l'aire d'une courbe exprimée par une équation donnée relève, d'après Newton, du passage de cette équation, à une expression où n'intervient qu'une seule variable. Sa solution exige donc une transformation de la forme

$$G(x, z) = 0 \to g(x) \tag{7.2}$$

où $G(x, z) = 0$ est une équation Algébrique et $g(x)$ une expression Algébrique (dans laquelle on pourra ensuite opérer la substitution $x \to \xi$). Une éventuelle inversion de la première de ces transformations ne pourrait donc produire la deuxième qu'à condition que l'équation $G(x, z) = 0$ puisse être obtenue de la composition de l'égalité $z = f(x, y)$ avec une équation donnée en x et y, et que l'équation $F(x, y) = 0$ puisse ensuite être transformée dans une égalité telle que $y = g(x)$. Mais, même lorsque tout ceci est possible, il reste que l'équation $F(x, y) = 0$ de la courbe dont l'expression $f(x, y)$ est supposée exprimer la sous-normale n'est pas une expression de l'aire de la courbe d'équation $G(x, z) = 0$.

Pour traduire la réciprocité entre les problèmes des normales et des quadratures établie par le théorème de van Heuraet dans sa version adaptée, dans la réciprocité entre deux transformations formelles, conduisant respectivement à résoudre ces problèmes, il faut introduire un quatrième terme qui puisse servir d'intermédiaire entre l'équation d'une courbe et les expressions de sa sous-normale et de son aire. Ce quatrième terme est évidemment ce que nous reconnaissons aujourd'hui comme le rapport différentiel, ou la dérivée d'une fonction donnée.

Pour trouver un objet propre à jouer un rôle analogue, Newton aurait pu, au début de l'automne 1665, s'adresser du côté du rapport $\frac{e}{o}$ entre les incréments infiniment petits des coordonnées d'une courbe. Supposons en fait qu'on sache exprimer le rapport $\frac{e}{o}$ relatif à une courbe d'équation $F(x, y) = 0$ en termes de la seule variable x, et qu'on ait ainsi $\frac{e}{o} = f(x)$. Si z est l'ordonnée d'une autre courbe, liée à celle-ci par la relation prescrite par le théorème de van Heuraet dans sa version adaptée, alors ce théorème relève (lorsqu'on le démontre comme Newton l'avait fait dans l'automne 1664 et que l'on compare cette preuve avec la deuxième des deux preuves qu'il avait donné le 20 mai 1665 pour son algorithme des normales[1]) des deux égalités $sn._x = y\frac{e}{o}$ et $z = K\frac{sn._x}{y}$. Ainsi, si on pose $K = u$, il s'ensuit que $z = \frac{e}{o} = f(x)$. Les deux problèmes des normales et des quadratures tiennent donc,

[1]Cf. respectivement la section 5.1.2 et la section 5.5.1, en particulier pp. 273-275.

respectivement, aux transformations réciproques

$$\begin{aligned} F(x,y) = 0 \rightarrow \frac{e}{o} = f(x) \\ z = f(x) \rightarrow F(x,y) = 0 \end{aligned} \tag{7.3}$$

où la variable y exprime en même temps l'ordonnée de la première courbe et l'aire de la deuxième.

Pour parvenir à exprimer l'aire d'une courbe dont l'ordonnée, référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, est exprimée par une expression Algébrique en x, disons $f(x)$, il faut ainsi chercher l'expression en x qui, étant égalée à y, fournit l'équation d'une courbe dont les coordonnées cartésiennes orthogonales sont telles que le rapport $\frac{e}{o}$ de leurs incréments infiniment petits est exprimé par l'expression $f(x)$. Celle-ci n'est qu'une conséquence du théorème de van Heuraet dans sa version adaptée qui, en tant que telle, est parfaitement indépendante de la nature de l'algorithme qui peut être employé pour passer de l'équation $F(x,y) = 0$ à l'expression $f(x)$ et des conditions d'inversibilité de cet algorithme. Elle montre néanmoins, *a priori* de toute considération de nature Algébrique, quel est l'algorithme qu'il faut chercher à invertir, si on veut résoudre — lorsqu'il est possible — le problème de la quadrature d'une courbe, exprimée par une équation Algébrique, par la détermination de l'expression Algébrique de son aire. Cet algorithme n'est pas celui des normales, mais celui donnant le rapport $\frac{e}{o}$.

La manière dans laquelle Newton rédigea, dans l'été 1665, autant sa table de quadratures que ses esquisses d'un traité des quadratures[2] et celle dans laquelle il se posa, quelques jours plus tard, le problème de l'inversion de l'algorithme des normales[3] montrent qu'à cette date Newton n'avait pas encore saisit ce point capital. C'est en revanche ce qu'il saisit au début de l'automne suivant.

7.1 L'algorithme des mouvements

Ceci est témoigné par une courte note[4] que Newton rédigea probablement quelques jours après celles qu'on a discuté dans la section 6.3. Au lieu de considérer d'emblée le rapport $\frac{e}{o}$ des incréments des coordonnées d'une courbe, Newton considère pourtant un autre rapport, égal à celui-ci : celui entre les "mouvements" de deux "corps" (puntiformes) qui "décrivent" deux segments (qu'on peut prendre respectivement comme les coordonnées variables d'une courbe). Voici ce qu'il écrit au début de sa note[5] :

> 1. If two bodies c, d describe the streight lines ac, bd [fig. 1], in the same time, (calling $\mathsf{ac} = x$, $\mathsf{bd} = y$, $p =$ the motion of c, $q =$ the motion of d) & if I have an equation expressing the relation of $\mathsf{ac} = x$ & $\mathsf{bd} = y$ whose termes are all put equal to nothing. I multiply each term of the equation by so many times py or $\frac{p}{x}$ as x hath dimensions in it. & also by soe many times qx or $\frac{q}{y}$ as y hath dimensions in it. the su$\overline{\text{me}}$ of these products is an equation expressing the relation of the motions of c & d. [...]

[2] Cf. respectivement les sections 6.1, 4.4, et 6.2.
[3] Cf. la section 6.3.
[4] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, [1], 343-347.
[5] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, [1], 344.

2. If an equation expressing the relation of their motions bee given, tis more difficult & sometimes Geometrically impossible, thereby to find the relation of the spaces described by these motions.

Newton ne présente aucune justification de la proposition 1. Il est pourtant facile de voir que, si on part d'une équation quelconque

$$F(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j,j}x^{i-j}y^{j}=0 \tag{7.4}$$

on trouve, selon le premier des algorithmes indiqués :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(i-j)A_{i-j,j}x^{i-j}y^{j+1}p+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}jA_{i-j,j}x^{i-j+1}y^{j}q=0 \tag{7.5}$$

et donc, en divisant pour xy,

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(i-j)A_{i-j,j}x^{i-j-1}y^{j}p+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}jA_{i-j,j}x^{i-j}y^{j-1}q=0 \tag{7.6}$$

qui n'est rien que le résultat de l'application du deuxième algorithme. Cette équation étant par construction du premier degré en p et q, il est ensuite facile d'en tirer l'égalité :

$$\frac{q}{p}=-\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(i-j)A_{i-j,j}x^{i-j-1}y^{j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}jA_{i-j,j}x^{i-j}y^{j-1}} \tag{7.7}$$

En comparant cette égalité avec les égalités (5.79) et (5.149), et en supposant que les coordonnées x et y sont orthogonales, on obtient sur le champ :

$$\frac{q}{p}=\frac{sn._x}{y}=\frac{e}{o} \tag{7.8}$$

Si cette égalité montre la relation entre le théorème énoncé par Newton et le problème des normales, il reste le fait que pour l'obtenir on s'est réclamé d'une solution préalable de ce dernier problème. Si on veut employer l'algorithme exprimé par l'égalité (7.7) pour résoudre ce problème, il faut en revanche démontrer *a priori* que si les segments variables x et y sont les coordonnées cartésiennes orthogonales d'une courbe quelconque, alors le rapport $\frac{p}{q}$ des mouvement des corps qui décrivent ces segments est égale au rapport $\frac{sn._x}{y}$ référé à cette courbe. Newton ne fait rien de similaire, en faisant probablement confiance au pouvoir explicatif du modèle cinématique qu'il avait employé à trois reprises, entre l'été 1664 et l'été 1665, pour démontrer et/ou formuler le théorème de van Heuraet dans sa version adaptée[6].

[6] Cf. respectivement : la section 5.1.2, en particulier pp. 236-237 ; la note (10) du chapitre 6 ; et la section 6.2.1, en particulier p. 309.

* * *

Dans son commentaire, Whiteside[7] qualifie p et q de "fluxional 'speeds' de x et y", et observe que dans sa note "Newton introduit pour la première fois une notation fluxionale pour la dérivée" par rapport au temps. De cette manière on ne peut pourtant pas expliquer la genèse de l'idée de Newton, qui certes ne possédait pas *a priori* la notion de dérivée par rapport au temps. C'est plutôt la notion de dérivée par rapport au temps qu'on doit expliquer en termes des "mouvements" p et q. Pour ce faire, une autre remarque de Whiteside nous est certainement plus utile : dans une autre note[8], ce dernier nous rappelle une observation de J. E. Hofmann qui, en se référant à une note successive[9] que Newton date du 13 novembre 1665, suggère que ce dernier s'est inspiré de la troisième des *Lectiones Mathematicæ* que Barrow avait délivrées à Cambridge en 1664, après sa nomination comme *Lucasian Professor*[10]. En réalité Whiteside a l'aire de ne pas trop croire à cette suggestion, en observant que Newton aurait pu tirer son idée de plusieurs sources[11]. L'argument de Barrow auquel Hofmann se réfère explicite néanmoins une idée qu'il me semble pouvoir éclairer la démarche de Newton.

L'objet de la troisième des *Lectiones Mathematicæ* de Barrow est typiquement post-cartésien : l'identité de l'arithmétique et de la géométrie, ou, plus précisément, la possibilité de retrouver (et démontrer) des propriétés des nombres en tant que propriétés des grandeurs géométriques. Pour soutenir sa thèse, Barrow cite un exemple : une preuve géométrique de l'égalité numérique infinitaire

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{m}{n}\right)^{i}=\frac{n}{n-m} \tag{7.9}$$

où $\frac{m}{n}$ est un nombre fractionnaire quelconque, évidemment plus petit que l'unité.

L'idée de Barrow est simple et géniale. Imaginons deux "points mobiles" qui translatent uniformément sur une droite, de telle manière que la vitesse du premier est à la vitesse du deuxième comme n est à m. Imaginons aussi que les deux points commencent leur mouvement au même temps, le plus rapide étant positionné derrière le plus lent. Cela reconstitue le cadre du paradoxe d'Achille. Pourtant, comme Barrow fait référence à des mouvements effectifs, son Achille rattrape la tortue après un certain temps et à un certain point. Soit alors Z ce point, et soient respectivement A et B les points de départ du premier et du deuxième points mobiles. Les deux mouvements étant uniformes, on en tirera la proportion

$$\mathsf{AZ}:\mathsf{BZ}=n:m \tag{7.10}$$

Mais, pour effet de la division de Zenon, la distance AZ peut être divisée en une infinité des distances plus petites, d'abord la distance AB qu'on peut prendre comme unitaire, ensuite la distance entre B et le point C au quel le deuxième point mobile arrive au même temps

[7] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, note (1), 343.

[8] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, note (4), 344-345.

[9] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [1], 382-386. Je consacrerai à cette note le chapitre 9.

[10] Cf. Hofmann (1943), 115 et Barrow (1683), lect. III.

[11] Whiteside cite la troisième journée des *Discorsi* de Galileo [cf. Galilei (1638), 150-236] et le traitement de la progression géométrique de la part de Grégoire de Saint-Vincent [cf. Grégoire de Saint-Vincent (1647), liber II, pars II, 95-106]. À propos de l'éventuelle participation de Newton aux leçons que Barrow délivra à Cambridge après sa nomination comme *Lucasian Professor*, cf. la note (87) du chapitre 5.

que le premier arrive en B, qui sera évidemment égale à $\frac{m}{n}\mathsf{AB} = \frac{m}{n}u$, après la distance entre C et le point D au quel le deuxième point mobile arrive au même temps que le premier arrive en C, qui sera évidemment égale à $\frac{m}{n}\mathsf{BC} = \left(\frac{m}{n}u\right)^2$, et ainsi de suite. La distance AZ représentera alors la somme infinie $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\frac{m}{n}u\right)^i$ et, en étant, par soustraction,

$$\mathsf{AZ} : (\mathsf{AZ} - \mathsf{BZ}) = n : (n - m) \tag{7.11}$$

avec $\mathsf{AZ} - \mathsf{BZ} = \mathsf{AB} = u$, on aura :

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{m}{n}u\right)^i : u = n : (n - m) \tag{7.12}$$

d'où l'égalité (7.9) suit sans difficultés (car $u^i = u$, pour tout i).

Ce que je retiens de cet argument est un aspect fort marginal : le fait que le rapport entre les vitesses de deux points mobiles est exprimé successivement par plusieurs rapports, tous égaux entre eux, entre des segments toujours différents. Néanmoins, la différence entre vitesses et espaces parcourus n'est guère effacée. Tout au contraire, l'argument de Barrow porte sur la distinction entre les espaces parcourus et les vitesses de deux mouvements qui font que ces espaces sont constamment entre eux dans un rapport donné. Ce jeu est possible sous deux conditions : l'uniformité des mouvements considérés et la prise en compte d'intervalles temporels quelconques mais toujours égaux pour l'un et l'autre des deux mouvements.

Ceci ayant été observé, revenons à l'une des toutes premières notes de Newton, où ce dernier, frais de sa lecture de la première partie de l'*Arithmetica infinitorum* de Wallis, parvint à carrer une parabole, en raisonnant sur l'équation d'une telle courbe pensée comme une expression de la relation entre les variations de l'abscisse et de l'ordonnée de celle-ci[12]. Si on généralise cette approche à n'importe quelle courbe, on représente, comme il est naturel de faire, la variation des coordonnées de cette courbe par les mouvements rectilignes de deux points qui décrivent ces coordonnées, on exprime — en suivant la suggestion de Barrow — le rapport entre les vitesses de ces deux mouvements par le rapport entre les segments qu'ils décrivent dans un certain temps, et on observe que ces deux mouvements ne diffèrent entre eux que par leurs vitesses (de telle sorte que la comparaison de ces mouvements se réduit à la comparaison de leurs vitesses), alors on retrouve le modèle cinématique évoqué par Newton lors de sa preuve du théorème de van Heureat. En général, les vitesses des deux points mobiles qui décrivent les coordonnées d'une courbe sont mutuellement variables. Pourtant, si les intervalles temporels considérés sont infiniment petits, alors on peut supposer que les segments décrits au cours de ces intervalles sont engendrés par des mouvements uniformes, dont les vitesses constantes correspondent aux vitesses ponctuelles des mouvements qui engendrent les coordonnées de la courbe. La droite qui prolonge le troisième côté d'un triangle infiniment petit, dont les deux autres côtés sont donnés par ces derniers segments, ne pourra alors qu'être la tangente à la courbe considérée.

Si on suppose que les coordonnées sont orthogonales, cet argument fournit une justification informelle de l'égalité (7.8), d'où, en connaissant l'égalité (5.79), il est ensuite facile de tirer l'algorithme énoncé par Newton. Si on suppose que Newton a raisonné ainsi, alors on doit en conclure qu'il est passé non pas de la solution du problème consistant à déterminer

[12]Cl. la section (4.1.1).

le rapport entre les "mouvements" p et q à la solution du problème des normales, mais *viceversa* de la solution préalable du deuxième problème à la solution du premier. La nouveauté contenue dans le texte cité ci-dessus ne reviendrait alors qu'à une nouvelle manière de présenter le problème des normales et sa solution, par l'intermédiaire du rapport des "mouvements" p et q. C'est néanmoins une nouveauté essentielle.

Si j'ai raison, où Newton écrit "mouvement", le lecteur moderne devrait lire "vitesse (ponctuelle)"[13]. Le langage de Newton ne tient pas pourtant à une confusion. Il est plutôt la conséquence naturelle d'une schématisation dans laquelle on ne considère que des mouvements que différent entre eux seulement par leurs vitesses (les mobiles, les trajectoires et les temps pendant lesquels ces mouvements sont considérés étant constamment égaux)[14]. Les "mouvements" p et q ne doivent donc pas être conçus comme des dérivées par rapport au temps *ante litteram*, car le temps ne semble pas intervenir explicitement dans l'argument de Newton. Ces "mouvements" apparaissent plutôt comme des caractères ponctuels (or, comme Newton le dira plus tard, des "déterminations"[15]) des mouvements rectilignes qui décrivent les deux coordonnées x et y d'une courbe donnée.

* * *

Que Newton soit parvenu à l'égalité (7.7) en s'appuyant sur l'égalité (5.79) — et en supposant donc le problème des normales comme étant déjà résolu — ou qu'il y soit parvenu de manière indépendante de la considération des normales et des tangentes d'une courbe dont les segments x et y sont censés être les coordonnées, c'est un fait qu'il ne poursuit pas sa note en montrant comment l'égalité (7.7) peut être appliquée à la solution du problème des normales[16]. Il se limite à exploiter cette égalité pour reformuler en termes nouveaux les résultats qu'il avait auparavant tiré du théorème de van Heuraet, dans sa version adaptée. C'est le programme énoncé par la proposition 2 du texte cité ci-dessus.

L'égalité (7.7) étant donnée, il suffit de considérer l'équation

$$y^{\nu} - bx^{\mu} + c = 0 \tag{7.13}$$

[13]Si on voulait être encore plus précis, on devrait parler, plutôt que de vitesses ponctuelles, des modules de ces vitesses. Les grandeurs p et q sont en effet considérées par Newton — autant ici que dans toute occasion successive — comme des grandeurs purement scalaires. Dans la plus part des cas, Newton réfère pourtant ces grandeurs à des segments géométriquement déterminés, de sorte que ne comporte pas d'ambiguïtés. C'est probablement la raison pour laquelle la plupart des historiens n'a pas observé que les grandeurs que, avant la rédaction du *De methodis*, Newton dénote d'habitude par les symboles "p", "q" ou "r", et qu'il qualifie parfois de "mouvements", parfois de "déterminations d'un mouvement" et le plus souvent (à partir du mois d'octobre 1665) de "vitesses" ne sont pas des vitesses dans notre sens, mais des modules de certaines vitesses. Pour ne pas alourdir mon langage et respecter la convention de Newton, qui est généralement acceptée par les historiens, j'utiliserai à mon tour le terme "vitesse" pour me référer à ces grandeurs dans toutes les circonstances où la prise en compte d'une certaine situation géométrique déterminée sera suffisante pour éviter toute ambiguïté. Ces circonstances ne coïncident pas pourtant avec l'ensemble des circonstances dans lesquelles Newton traite avec ces grandeurs. Un cas où la confusion entre vitesses et leurs modules se révèle particulièrement gênant sera par exemple traité dans la section 10.1.1,ci-dessus. Dans des cas comme celui-ci, je chercherai ainsi d'employer un langage plus précis propre à dévoiler la confusion de Newton et à fournir une interprétation précise de ses arguments.

[14]Le langage de Newton est symptomatique d'une conception du mouvement comme un événement localement caractérisé par des propriétés (ou, pour utiliser le langage moyenâgeuse qui semble ici s'imposer, des qualités), qui le déterminent. La vitesse n'est qu'une de ces propriétés, la seule qu'on suppose ici différer dans les mouvements considérés.

[15]Cf. la section (8.2.1), en particulier, pp. 8.2.1-415.

[16]C'est ce que Newton fera quelques semaines plus tard : cf. le chapitre 8.

(où ν et μ sont des exposants entiers, dont le premier est différent de zéro) pour tirer sur le champs l'égalité

$$\frac{q}{p} = \frac{\mu b x^{\mu-1}}{\nu y^{\nu-1}} = \frac{\mu}{\nu} b^{\frac{1}{\nu}} x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} \tag{7.14}$$

Il n'y a alors qu'à poser $\nu = n$, $\mu = m + \nu = m + n$ et $b = \left(\frac{\nu}{\mu} a\right)^{\nu} = \left(\frac{n}{m+n} a\right)^{n}$ pour tirer la double implication

$$q = ax^{\frac{m}{n}} p \Leftrightarrow y = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} + c \tag{7.15}$$

Tout à la suite de la proposition 2, Newton observe justement[17] que si $q = ax^{\frac{m}{n}} p$, alors $y = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$.

Il est clair qu'ici ce n'est question ni d'aires ni du théorème de van Heuraet. Newton n'est désormais intéressé qu'à l'inversion de l'algorithme donnant le rapport des mouvements p et q. Or, par définition ces mouvements sont censés décrire deux segments qu'il est naturel de penser comme les coordonnées d'une courbe. Il s'ensuit que l'interprétation plus plausible de cette implication est la suivante : si le rapport des mouvements q et p décrivant les coordonnées cartésiennes d'une courbe est égal à $ax^{\frac{m}{n}}$, alors l'ordonnée de cette courbe est égale à $\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$. Il est alors naturel que Newton n'ait pas fait mention de la constante c (ou ait supposé que cette constante est nulle), car la courbe d'équation $y = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} + c$ est invariante sous la variation de c.

Il reste pourtant que le passage du rapport $\frac{q}{p}$ à l'ordonnée y semble être désormais conçu comme le résultat d'une transformation algorithmique inverse à celle qui conduit, en accord avec l'égalité (7.82), de l'équation de la courbe d'ordonnée y à expression du rapport des mouvements qui décrivent les coordonnées cartésienne de cette courbe. On a donc à faire avec un nouveau algorithme, et Newton observe d'emblée que cette algorithme est linéaire[18] :

> If the valor of q consistheth of severall such termes, consider each terme severally. as if $ax[p] + bxx[p] = q$. the first terme gives $\frac{ax^2}{2}$. the 2^d^ $\frac{bx^3}{3}$. therefore $\frac{axx}{2} + \frac{bxxx}{3} = y$.

Sans autres précisions, ceci passe ensuite à rédiger une table[19], où différentes expressions Algébriques du rapport $\frac{q}{p}$ sont associées aux expressions Algébriques de l'ordonnée y de la courbe correspondante. Chaque ligne de cette table comporte deux égalités : la premire, de la forme $f(x) = \frac{q}{p}$, fournit une expression du rapport $\frac{q}{p}$; la deuxième, de la forme $g(x) = y$ fournit l'expression de l'ordonnée y de la courbe dont relève ce rapport, encore qu'il est clair que Newton ait calculé la première de ces expressions en partant de la deuxième.

Les deux premières lignes car l'ordonnée y est supposée être égale à deux quotients de polynômes en en x. Pour trouver l'expression correspondante du rapport $\frac{q}{p}$, il suffit donc de se rapporter aux premières des égalités (6.74) et (6.75)pour la position $n = 1$. La comparaison de ces égalités avec l'égalité (7.84) fournit en effet la double implication

$$\frac{p}{q} = \frac{\ddot{A}B - A\ddot{B}}{xB^2} \Leftrightarrow y = \frac{A}{B} + c \tag{7.16}$$

[17]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, [1], 344.
[18]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, [1], 344-345.
[19]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, [1], 345-347.

où A et B sont deux polynômes en x quelconques et $\ddot{A}$ et $\ddot{B}$ sont les polynômes obtenus de ceux-ci en multipliant chacun de leurs termes par l'exposant de la puissance de x qui intervient dans ce terme.

Les autres entrées de la table de Newton sont de loin plus problématiques, car elle portent toutes sur des équations de la forme

$$y = M\sqrt{N} \tag{7.17}$$

où M et N sont deux polynômes en x. D'un point de vue moderne, le calcul de la dérivée d'une fonction de cette sorte se fait en appliquant deux règles fondamentales : la règle de dérivation du produit et la règle de dérivation des fonctions composées. Or, rien nous laisse supposer que Newton possédât, à l'automne 1665, quelques choses de similaire à ces règles. Il se pose donc le problème de comprendre comment Newton ait pu parvenir aux résultats énoncées dans sa table.

* * *

La plus simple des conjectures est qu'il soit passé par la réduction en forme entière de toutes les équations en x et y intervenant dans sa table. Considérons cette possibilité.

Si on pose en général

$$M = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \text{et} \qquad N = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \tag{7.18}$$

la réduction en forme entière de l'équation (7.17) fournit l'équation

$$y^2 - \sum_{i=0}^{2n+m} \alpha_i x^i = 0 \tag{7.19}$$

avec

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{i} \left(\sum_{h=0}^{j} a_h a_{j-h} \right) b_{i-j} \tag{7.20}$$

De la, conformément à l'égalité (7.7), il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \frac{q}{p} &= \frac{\sum\limits_{i=0}^{2n+m} \alpha_i i x^{i-1}}{2y} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{2n+m} \alpha_i i x^{i-1}}{2\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{2n+m} \alpha_i x^i}} \\ &= \frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{2n+m} \alpha_i i x^{i-1}\right)\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i}}{2\left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i\right)} = \frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{2n+m} \alpha_i i x^{i-1}\right)\sqrt{N}}{2MN} \end{aligned} \tag{7.21}$$

Or, si on procède de cette manière en partant de l'équation

$$y = \left(a + bx^{n-m}\right)\sqrt{ax^m + bx^n} \tag{7.22}$$

qui intervient dans la troisième ligne de la table de Newton — c'est-à-dire qu'on pose $M = a + bx^{n-m}$ et $N = ax^m + bx^n$ — on obtient

$$\frac{q}{p} = \frac{\left[\begin{array}{c} ma^3x^{m-n} + 3na^2b \\ +3(2n-m)b^2ax^{n-m} + (3n-2m)b^3x^{2(n-m)} \end{array}\right]}{2x\left[a^2x^{m-n} + 2ab + b^2x^{n-m}\right]}\sqrt{ax^m + bx^n} \tag{7.23}$$

Le résultat énoncé par Newton est en revanche le suivant

$$\frac{q}{p} = \frac{ma + (3n-2n)bx^{n-m}}{2x}\sqrt{ax^m + bx^n} \quad ; \quad y = (a + bx^{n-m})\sqrt{ax^m + bx^n} \tag{7.24}$$

Pour passer de l'égalité (7.23) à ce résultat, il faut ainsi observer que

$$\begin{aligned} ma^3x^{m-n} + 3na^2b + 3(2n-m)b^2ax^{n-m} + (3n-2m)b^3x^{2(n-m)} = \\ = \left[ma + (3n-2n)bx^{n-m}\right]\left[a^2x^{m-n} + 2ab + b^2x^{n-m}\right] \end{aligned} \tag{7.25}$$

Bien que facile à vérifier *a posteriori*, cette égalité est pourtant loin d'être aisée à déterminer *a priori*.

Cela semble suggérer que si Newton était parvenu à son résultat par la voie qu'on vient de considérer, en partant de l'équation (7.22), il n'aurait pas écrit le rapport $\frac{q}{p}$ sous forme dans laquelle il l'écrit. Le même argument peut être répété pour toutes les autres lignes de la table de celui-ci.

On pourrait alors supposer que, sans pour autant le déclarer explicitement, Newton soit parvenu parvenu à des règles formellement analogues aux règles de dérivation du produit et de la racine carrée d'un polynôme, et qu'il les ait employées pour obtenir ses résultats.

Pour ce qui est de la première de ces règles, cela est tout-à-fait plausible : l'égalité (6.99), qu'on a obtenu en n'employant que des procédures parfaitement familières à Newton, exprime en effet une règle analogue à celle-ci, qui aurait été parfaitement convenable. Un raisonnement similaire nous convainc que cela est aussi plausible pour la deuxième règle. Car, si on pose

$$y^2 = \sum_{i=0}^{h} a_i x^i = N \tag{7.26}$$

il est facile d'obtenir, conformément à l'égalité (7.7),

$$\frac{q}{p} = \frac{\sum_{i=0}^{h} i a_i x^{i-1}}{2y} = \frac{\sum_{i=0}^{h} i a_i x^{i-1}}{2\sqrt{\sum_{i=0}^{h} a_i x^i}} = \frac{\ddot{N}}{2x\sqrt{N}} \tag{7.27}$$

qui, encore une fois, exprime une règle analogue à la règle de dérivation de la racine carré, parfaitement convenable pour les exigences de Newton.

Néanmoins, si on veut passer d'une équation de la forme de la (7.17) à l'expression du rapport $\frac{q}{p}$ qui lui correspond, il ne suffit pas d'appliquer ces deux règles séparément ; il faut aussi les composer. Il faut, en particulier, appliquer la règle exprimée par l'égalité (6.99) non pas au produit de deux polynômes, mais directement au produit $M\sqrt{N}$. Pour cela, il faut considérer un objet tel que $\ddot{\sqrt{N}}$, c'est-à-dire qu'il faut penser les deux points superposés non seulement comme un commode convention notationnelle propre à dénoter certains polynômes, mais comme le symbole d'un opérateur opérant sur des expressions Algébriques autres que des polynômes. C'est seulement à ce point qu'il est possible d'appliquer la règle énoncée par l'égalité (7.27). Cette règle doit alors être pensée comme relevant non pas de la détermination de l'expression du rapport $\frac{q}{p}$ correspondant à une équation de la forme de la (7.26), mais comme relevant de la détermination de la forme de l'expression Algébrique dénotée par le symbole "$\ddot{\sqrt{N}}$" pensé comme l'on vient de dire. Le rapport $\frac{q}{p}$ doit alors être pensé, non pas comme le rapport entre les vitesses de deux mouvements, mais comme une transformée relative à une expression Algébrique — dans ce cas la racine carrée d'un polynôme —, et être de ce fait identifié avec l'expression Algébrique dénotée par le symbole "$\ddot{\sqrt{N}}$" divisée par la variable x.

Alternativement, il faut imaginer pouvoir séparer l'équation (7.17) en deux équations distinctes $v = M$ et $w = \sqrt{N}$, et chercher les rapports $\frac{s}{p}$ et $\frac{t}{p}$ relatifs à ces équations (où s et t sont respectivement les mouvements qui décrivent les segments v et w, ou les vitesses de ces mouvements), et observer que de l'égalité $y = vw$ il s'ensuit que

$$\frac{q}{p} = \frac{s}{p}w + \frac{t}{p}v = \frac{\ddot{M}}{x}\sqrt{N} + \frac{\ddot{N}}{2x\sqrt{N}}M = \frac{2N\ddot{M} + M\ddot{N}}{2xN}\sqrt{N} \tag{7.28}$$

C'est une procédure que Newton présentera une année plus tard, dans le *Traité d'octobre 1666*[20].

En appliquant cette procédure, à partir de l'équation (7.22), on obtient sur le champs l'égalité

$$\frac{q}{p} = \frac{\begin{bmatrix} 2\left[ax^m + bx^n\right]\left[(n-m)bx^{n-m}\right] + \\ \left[a + bx^{n-m}\right]\left[max^m + mbx^n\right] \end{bmatrix}}{2x\left[ax^m + bx^n\right]}\sqrt{ax^m + bx^n} \tag{7.29}$$

et il suffit alors d'observer que

$$\left[a + bx^{n-m}\right]\left[max^m + mbx^n\right] = \left[ax^m + bx^n\right]\left[ma + nbx^{n-m}\right] \tag{7.30}$$

pour tirer de là la première des égalités (7.24).

Cette vérification n'est pourtant pas suffisante, je crois, pour nous conduire à supposer que Newton soit effectivement parvenu à ces résultats en suivant ce parcours. Pour ce faire, il aurait dû considérer le rapport entre les mouvements décrivant deux segments (ou les vitesses de ces mouvements) comme le résultat de l'application d'un opérateur donnée à une expression Algébrique exprimant un de ces segments en termes de l'autre. Il aurait donc dû porter son attention non pas sur la valeur de ce rapport, mais sur cet opérateur lui même. Cela est justement ce que Newton ne semble pas faire dans ses notes de l'automne 1665. Non seulement ce n'est pas plausible de penser qu'il soit parvenu à une conception de la sorte sans en laisser une trace explicite dans ses notes. Mais il est aussi facile de comprendre que la notation qu'il emploie est, d'elle même, inapte à exprimer convenablement cette conception.

[20]Cf. la section 11.1.2, en particulier pp. 504-11.1.2.

* * *

Il ne reste donc qu'à supposer que Newton a construit sa table cas par cas[21], en se servant à chaque fois d'artifices convenables aptes à donner au rapport $\frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{2n+m} \alpha_i i x^{i-1}\right)\sqrt{N}}{2MN}$ une forme la plus compacte possible. Comme le note Whiteside[22], l'équation (7.22) peut, par exemple, être écrite comme il suit :

$$y^2 x^{2m} - (ax^m + bx^n)^3 = 0 \tag{7.31}$$

Or, si on pose $(ax^m + bx^n)^3 = B$ et $ax^m + bx^n = N$, de l'égalité (6.99) il s'ensuit

$$\ddot{B} = \ddot{N}N^2 + N\left[\ddot{N}N + \ddot{N}N\right] = 3\ddot{N}N^2 \tag{7.32}$$

et donc, conformément à l'égalité (7.7) :

$$\begin{aligned} \frac{q}{p} &= -\frac{2mx^{2m}y^2 - 3\left(max^m + nbx^n\right)\left(ax^m + bx^n\right)^2}{2yx^{2m+1}} \\ &= \frac{3\left(max^m + nbx^n\right)\left(ax^m + bx^n\right)^2 - 2m\left(ax^m + bx^n\right)^3}{2\left(ax^m + bx^n\right)^{\frac{3}{2}} x^{m+1}} \\ &= \frac{3\left(max^m + nbx^n\right) - 2m\left(ax^m + bx^n\right)}{2x^{m+1}}\sqrt{ax^m + bx^n} \\ &= \frac{ma + (3n - 2m)\,bx^{n-m}}{2x}\sqrt{ax^m + bx^n} \end{aligned} \tag{7.33}$$

qui est justement la première des égalités (7.24).

La quatrième entré de la table de Newton dérive ensuite de la troisième par la simple substitution $n \to n + m$. Aussi la cinquième et la sixième entrées de cette table dérivent l'une de l'autre par une substitution linéaire de deux exposants de x et peuvent avoir été trouvées en suivant une procédure similaire à la précédente. En particulier, la sixième entrée relève de l'équation

$$y = \left[ma^2 x^{m-n} + (m - n)ab - nb^2 x^{n-m}\right]\sqrt{ax^m + bx^n} \tag{7.34}$$

qu'il est aisée de réécrire sous la forme[23]

$$y^2 x^{2m+2n} - (max^m - nbx^n)^2 (ax^m - bx^n)^3 = 0 \tag{7.35}$$

Et il suffit d'observer que de l'égalité (7.32) il s'ensuit que si $B = M^2 N^3$, alors

$$\ddot{B} = 2\ddot{M}MN^3 + 3\ddot{N}N^2M^3 \tag{7.36}$$

[21] On peut aussi observer qu'en absence d'une identification préalable du développement d'une puissance (non entière) d'un polynôme avec le développement de Taylor de ce polynôme, Newton aurait aussi eu des sérieuses difficultés à obtenir ses résultats en passant par une réduction en série entière du produit $M\sqrt{N}$.

[22] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, note (10), 345.

[23] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, note (12), 346.

pour opérer sur l'équation (7.35) comme sur l'équation (7.31), en obtenant l'égalité :

$$\frac{q}{p} = \frac{(3m-2n)ma^2x^{m-n} - (3n-2m)nb^2x^{n-m}}{2x}\sqrt{ax^m+bx^n} \tag{7.37}$$

qui est celle que Newton écrit. Pour passer ensuite de cette sixième entrée à la cinquième, il suffit d'opérer les substitutions[24] $m \to 2m+6n$ et $n \to 2m+4n$.

Ce n'est pas nécessaire de continuer ultérieurement dans l'analyse détaillée des entrées successives de la table de Newton. Il suffit d'observer que toutes ces entrées peuvent être obtenues par des procédure similaires, en passant de pas en pas à des équations plus compliquées en x et y. C'est, dans la substance ce que montre Whiteside dans ses notes, auxquelles je n'ai donc qu'à renvoyer[25].

Il ne reste qu'à insister sur deux points : *i*) bien que désormais intéressé à des relations algorithmiques, Newton ne peut pas éviter de penser celles-ci comme propres à des expressions Algébriques, une donnant l'ordonnée d'une courbe, et l'autre le rapport des mouvements que décrivent ses coordonnées ; *ii*) pour trouver ces relations, Newton opère conformément à des règles analogues à notre règle de dérivation d'un produit, cette règle étant limitée aux cas où les facteurs de ce produit sont des polynômes, mais il ne semble pas saisir la possibilité de généraliser ces règles en indiquant les propriétés générales d'un opérateur linéaire agissant sur n'importe quelle expression Algébriques $f(x)$;le rapport $\frac{q}{p}$ continue à être pensée comme un rapport entre des mouvements (ou vitesses) égal au rapport $\frac{sn.x}{y}$, et n'est nullement conçu comme une transformée de $f(x)$ obéissant aux propriétés d'une tel opérateur.

7.2 Quadrature par substitution : deux nouvelles tables de quadratures

Bien que Newton ait présenté son algorithme et rédigé sa table sans faire aucune référence à normales, tangentes et quadratures, il suffit de se réclamer de l'égalité (7.8) et du théorème de van Heuraet dans sa version adaptée pour conclure que si $\mathcal{A}(x)$ est une expression Algébrique telle que : le rapport $\frac{q}{p}$ des mouvements qui décrivent les segments y et x, liés entre eux par l'équation $y = \frac{\mathcal{A}(x)}{K}$, est égal à $f(x)$ — K étant une constante quelconque — ; $x = \kappa$ est une racine (réelle) de l'équation $\mathcal{A}(x) = 0$; et $x = \xi$ est une valeur de x telle que la courbe exprimée, par rapport à un certain système de coordonnées cartésiennes, par l' équation $y = \frac{\mathcal{A}(x)}{K}$ est monotone entre κ et ξ ; alors l'aire de la courbe exprimée, par rapport au même système de coordonnées, par l'équation $z = Kf(x)$, évaluée entre $x = \kappa$ et $x = \xi$, est égale à $\sin\varrho\,|\mathcal{A}(\xi)|$, ϱ étant l'angle formé par les coordonnés x et z[26].

Ceci étant établi, supposons que la constante K est unitaire et que l'expression $f(x)$ peut être réduite à une autre expression Algébrique $\varphi(w)$, où n'apparaît que la nouvelle variable w, pourvu qu'on pose $w = \phi(x)$, $\phi(x)$ étant une certaine expression Algébrique en x. Il s'ensuit que, quelque soit la valeur de x, si $w = \phi(x)$, alors l'ordonnée z de la courbe exprimée, par rapport à un certain système de coordonnées cartésiennes, par l'équation

[24] Cf. encore Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, note (12), 346.
[25] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, notes (13)-(17), 346-347.
[26] Cf. la section 3.5.3, en particulier pp. 158-158.

$z = f(x)$ est égale à l'ordonnée v de la courbe exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes semblable à ce dernier, par l'équation $v = \varphi(w)$.

Considérons alors cette dernière équation en y prenant w comme une variable indépendante. L'argument précédent nous assure que si $\mathcal{B}(w)$ est une expression Algébrique telle que : le rapport $\frac{\bar{q}}{t}$ des mouvements qui décrivent respectivement les segments $\bar{y}$ et w, liés entre eux par l'équation $\bar{y} = \mathcal{B}(w)$, est égale à $\varphi(w)$; $w = \varkappa$ est une racine (réelle) de l'équation $\mathcal{B}(w) = 0$; et $w = \chi$ est une valeur de w telle que la courbe d'équation $\bar{y} = \mathcal{B}(x)$ est monotone entre κ et χ ; alors l'aire de la courbe d'équation $v = \varphi(w)$, évaluée entre $w = \varkappa$ et $w = \chi$, est égale à $\sin \varrho\, |\mathcal{B}(\chi)|$, ϱ étant l'angle formé par les coordonnés w et v. Si on suppose que ces prémisses sont satisfaites et on choisit $\varkappa$ et χ de telle sorte que

$$\varkappa = \phi(\kappa) \qquad \text{et} \qquad \chi = \phi(\xi) \tag{7.38}$$

ou bien

$$f(\kappa) = \varphi(\varkappa) \qquad \text{et} \qquad f(\xi) = \varphi(\chi) \tag{7.39}$$

on aura nécessairement (conformément à la méthode des indivisibles)

$$s\left[\sum\nolimits_{\varkappa}^{\chi} [\varphi(w)]\right] = |\mathcal{B}(\chi)| = s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi} [f(x)]\right] = |\mathcal{A}(\xi)| \tag{7.40}$$

et donc :

$$y = \bar{y} \qquad \text{et} \qquad q = \bar{q} \tag{7.41}$$

Il suffira alors d'éliminer q entre les égalités $\frac{q}{p} = f(x)$ et $\frac{\bar{q}}{t} = \frac{q}{t} = \varphi(w)$ pour obtenir l'équation

$$f(x) = \frac{t}{p}\varphi(w) \tag{7.42}$$

Il s'ensuit que si l'on suppose que le rapport $\frac{t}{p}$ des mouvements qui décrivent respectivement les segments w et x, liés entre eux par l'équation $w = \phi(x)$, est égale $\psi(x)$, alors on aura

$$\varphi(w) = \frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{f(\phi^{-1}(w))}{\psi(\phi^{-1}(w))} \tag{7.43}$$

où, conformément à la convention usuelle aujourd'hui, le symbole "$\phi^{-1}(w)$" indique l'expression en w qui résulte de l'inversion de l'équation $w = \phi(x)$.

Si on lit un tel argument à rebours, on en conclut que l'aire $s\left[\sum_{\kappa}^{\xi} [z]\right]$ d'une courbe donnée, exprimée, par rapport à un certain système de coordonnées cartésiennes, par l'équation $z = f(x)$, est égale à l'aire $s\left[\sum_{\varkappa}^{\chi} [v]\right]$ de la courbe exprimée, par rapport à un système de coordonnées semblable, par l'équation $v = \varphi(w)$, à condition que :

$$\begin{gathered} w = \phi(x)\,; \quad \chi = \phi(\xi)\,; \quad \varkappa = \phi(\kappa) \\ \frac{t}{p} = \psi(x) \\ \varphi(w) = \frac{f(\phi^{-1}(w))}{\psi(\phi^{-1}(w))} \end{gathered} \tag{7.44}$$

t et p étant respectivement les mouvements qui décrivent les segments w et x. Ainsi, si une courbe d'équation $z = f(x)$ est donnée, et qu'on veut la carrer, il est possible de réduire ce problème à celui de la quadrature d'une autre courbe d'équation $v = \varphi(w)$, à condition que les conditions précédentes soient respectées. C'est ce qu'on connaît aujourd'hui comme la règle de quadrature par substitution, formulé dans une langage et démontrée par un argument qui, dans l'automne 1665, auraient été parfaitement familières à Newton.

7.2.1 La première table : égalité des aires

Parmi les notes publiées par Whiteside, il n'y en a aucune où un argument similaire à celui-ci est présenté de manière explicite. Dans une de ces notes[27] — rédigée, probablement, peu de temps après celle que j'ai discuté dans la section 7.1) — Newton présente néanmoins une longue table, dont chaque ligne fournit deux équations Algébriques, exprimant respectivement deux courbes — référées à des système de coordonnées cartésiennes semblables, implicitement prises comme orthogonales — dont l'aire est égale, pourvu que les abscisses respectives soient liées entre elles par une troisième équation Algébrique. La référence à des aires est cette fois explicite.

Après avoir dessiné une figure telle que la figure 2, Newton pose $\mathsf{AP} = x$, $\mathsf{PM} = z$, $\mathsf{OQ} = w$, et $\mathsf{QN} = v$, et construit sa table conformément aux schéma suivant[28] :

"The area APM of the line whose nature is"	"is equal to the area OQN of the line whose nature is"	"supposeing the relation twixt AP and OQ to bee"	(7.45)
$z = f(x)$	$v = \varphi(w)$	$w = \phi(x)$	

Comme d'habitude, Newton ne distingue pas entre l'abscisse d'une courbe et la limite variable de l'aire de celle-ci, et il n'indique pas non plus la valeur de l'abscisse qui constitue la limite constante de cette aire, en se limitant à se rapporter à une figure générique où cette limite est identifiée avec la valeur $x = 0$. Il est néanmoins facile de vérifier que les équations $z = f(x)$, $v = \varphi(w)$, et $w = \phi(x)$ qui apparaissent à chaque ligne de sa table sont liées entre elles par les relations indiquées par les égalités (7.44). On est donc porté à supposer que Newton a imaginé un argument analogue au précédent, et qu'il s'en est servi pour justifier les résultats énoncés dans sa table.

Aussi dans ce cas, les entrées successives de la table de Newton se laissent regrouper en un nombre assez rentrant de classes — 14, pour la précision. Les différents éléments de chacune de ces classes ne différent entre eux que pour la valeur assignée à des exposants rationnels qui interviennent dans l'équation $w = \phi(x)$ — dont dépend la valeur assignée à des exposants et à des coefficients intervenant dans l'équation $z = f(x)$ —, l'équation $v = \varphi(w)$ restant en revanche invariante. Mise à part deux seules exceptions[29], c'est Newton lui-même qui, après avoir considéré différents exemples pour chacune de ces classes, écrit le triplet d'équations dont celle-ci relève en général. Si on compare entre eux les différents exemples de l'équation $v = \varphi(w)$ qui interviennent dans cette table, on se rend compte de surcroît

[27]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, [2], 348-354.
[28]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, [2], 348.
[29]Cf. la note (35), ci-dessous.

qu'ils relèvent tous des quatre formes suivantes

$$\begin{array}{lcl} v = \dfrac{\alpha}{w} & ; & v = \sqrt{\alpha + \beta w^2} \\ v = \sqrt{\alpha w + \beta w^2} & ; & v = \sqrt{\alpha + \beta w + \gamma w^2} \end{array} \tag{7.46}$$

où α, β et γ sont des coefficients constants. Cette circonstance, jointe au fait que cette même équation $v = \varphi(w)$ reste invariante à l'intérieur de chaque classe, suggère que Newton a construit sa table à rebours, en cherchant l'équation $z = f(x)$, exprimant une courbe d'aire égale à la courbe exprimée par une équation donnée, $v = \varphi(w)$, sous la condition $w = \phi(x)$.

Pour exemplifier cette procédure, considérons la première classe[30], relevant de l'équation invariante

$$v = [\varphi(w) =]\ \sqrt{cw + dw^2} \tag{7.47}$$

et de la condition

$$w = [\phi(x) =]\ x^{\theta} \tag{7.48}$$

où θ est un exposant rationnel quelconque. Cette dernière équation étant donnée, on aura

$$\frac{t}{p} = [\psi(x) =]\ \theta x^{\theta - 1} \tag{7.49}$$

et donc, selon l'égalité (7.43),

$$f(w^{\frac{1}{\theta}}) = f(x) = \theta w^{\frac{\theta-1}{\theta}} \sqrt{cw + dw^2} = \theta x^{\theta-1}\sqrt{cx^{\theta} + dx^{2\theta}} \tag{7.50}$$

Il s'ensuit que la condition (7.48), implique l'égalité :

$$s\left[\sum\nolimits_{\kappa}^{\xi}\left[\theta x^{\theta-1}\sqrt{cx^{\theta} + dx^{2\theta}}\right]\right] = s\left[\sum\nolimits_{\kappa^{\theta}}^{\xi^{\theta}}\left[\sqrt{cw + dw^2}\right]\right] \tag{7.51}$$

À la spécification des relations entre les limites de quadrature près, c'est exactement le résultat énoncé par Newton, d'abord selon les conditions[31] $\theta = 1, 2, 3, 4, \frac{1}{2}, -1, -2, -3$, et ensuite en général.

Si on généralise l'égalité (7.50), on obtient l'égalité

$$f(x) = \psi(x)\,[\varphi(\phi(x))] \tag{7.52}$$

Comme $\psi(x)$ n'est rien d'autre que le rapport $\frac{t}{p}$ des mouvements qui décrivent respectivement les segments w et x, liés entre eux par l'équation $w = \phi(x)$, cette égalité générale permet d'obtenir l'équation $z = f(x)$, à partir de la donnée des équations $v = \varphi(w)$ et $w = \phi(x)$, toutes les fois qu'on sait exprimer ce rapport en termes de la seule variable x. Il est ainsi fort probable que Newton ait construit sa table, en se réclamant de cette égalité, à partir de quelques équations de l'une de quatre formes (7.46), et, pour chacune de ces équations, de plusieurs conditions $w = \phi(x)$, ne différent entre elles que pour la valeur assignée à des exposants, supposées rationnels.

[30]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, [2], 348.

[31]Pour le cas $\theta = 1$, Newton pose en réalité $u = a\sqrt{caw + da^2w^2}$ et $w = ax$, ce qui donne également $z = f(x) = \sqrt{cx + dx^2}$. À propos de cette variation non essentielle, cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, [2], 348, note (20).

Les formes (7.46) interviennent alors, dans cette table, comme des formes élémentaires : le but de Newton semble être de montrer comment réduire la quadrature d'un ensemble assez large des courbes à la quadrature d'autres courbes, exprimées par des équations d'une de ces quatre formes. Or, il est clair pour nous qu'aucune courbe exprimée par une équation d'une de ces formes peut être carrée par des moyens Algébriques sans passer par un développement en série entière, les primitives des fonctions correspondantes faisant intervenir toutes des logarithmes. Dans l'automne 1665, Newton était bien loin de disposer des moyens pour démontrer ceci de manière satisfaisante, il semble pourtant comprendre que les équations de la première de ces formes ne sont pas les seules qui posent problème lorsqu'on est censé exprimer Algébriquement, par des moyens finitaires, les aires des courbes qu'elles expriment. Le fait qu'il suffit de choisir convenablement les coefficients α, β et γ pour que des équations des trois autres formes expriment des ellipses ou des hyperboles a probablement convaincu Newton de la possibilité de traiter ces formes comme des archétypes élémentaires du phénomène consistant dans l'impossibilité de parvenir à carrer par des moyens Algébriques finitaires une courbe exprimée par une équation Algébrique. Si de notre point de vu, ceci marque l'origine de la théorie des intégrales elliptiques, du point de vue de Newton, il ne s'agit que de montrer comment il est possible de réduire la quadrature de courbes exprimées par des équations d'une forme différente à la quadrature de courbes exprimées par des équations de ces formes[32]. Si mon interprétation est correcte, c'est justement le but de sa table.

L'absence de toute référence aux limites de quadrature, et à la possibilité de les déterminer de manière convenable, les uns par rapports aux autres[33], nous laisse supposer pourtant que Newton se soit laissé, encore une fois, conduire par l'automatisme d'un algorithme — dans ce cas celui qui est exprimé par l'égalité (7.52) —, sans songer à déterminer l'exacte signification géométrique de ses résultats.

Dans l'annexe qui clôt le présent chapitre[34], j'ai reconstruit la table de Newton en me servant de l'égalité (7.52) pour calculer la forme générale de l'équation $z = f(x)$ en supposant données les équations $v = \varphi(w)$ et $w = \phi(x)$.

Dans les lignes 9-11 de cette annexe j'ai changé le signe de z par rapport aux résultats énoncés par Newton. Ces lignes sont les seules dans lesquelles l'application de l'égalité (7.52) conduit à une expression générale de z où apparaît d'emblée le facteur -1. Newton élimine ce facteur autant dans cette expression générale, que dans les expressions particulières tirées de celle-ci en assignant à θ et ϑ des valeurs fixes[35]. Ainsi, pour ce qui est de la ligne 9, il

[32]Newton avait déjà abordé ce problème, de toute autre manière, et par rapport à la seule forme élémentaire $y = \frac{\alpha}{\beta+\gamma x}$ dans une courte note rédigée probablement quelques semaines plus tôt [cf. la section 6.2.2] et il y reviendra, en suivant un approche encore différente, dans le *Traité d'octobre 1666*, où il déclarera explicitement que les aires des courbes exprimées par des équations de cette sorte peuvent être trouvées en consultant des tables logarithmiques ou trigonométriques [cf. la section 11.1.3].

[33]Qu'on observe que si on ne reste qu'à l'équivalence indiquée par la table de Newton, rien n'oblige à choisir les limites constantes κ et $\varkappa$ comme l'exige le théorème de van Heuraet. Ceci est pourtant nécessaire si on veut justifier les résultats énoncés par cette table, en se réclamant d'un tel théorème. Dans ce cas, le calcul de ces limites ne peut pourtant se faire, en termes Algébriques, autrement qu'en passant par des développements en série entière.

[34]Cf. ci-dessous, pp. 381-385.

[35]On note cependant que pour ce qui est de la ligne 10 (ainsi que de la ligne 4), Newton n'écrit pas l'expression générale de z, tandis qu'il se limite, pour ce qui est de la ligne 11, à considérer un seul cas particulier donné par la position $\theta = 2$.

écrit en général

$$z = \frac{ae\theta x^{\theta} + be\vartheta x^{\vartheta}}{2x\left(ax^{\theta} + bx^{\vartheta}\right)^2}\sqrt{acx^{\theta} + bcx^{\vartheta} + de^2} \tag{7.53}$$

tandis que pour $\theta = 0$ et $\vartheta = 1$ et pour $\theta = 0$ et $\vartheta = -1$, il écrit respectivement

$$\begin{gathered} z = \frac{be}{2\left(a+bx\right)^2}\sqrt{ac+bcx+de^2} \\ \text{et} \\ z = \frac{-be}{2x^3\left(a+bx^{-1}\right)^2}\sqrt{acx^2+bcx+de^2x^2} \end{gathered} \tag{7.54}$$

Whiteside[36] semble considérer ceci comme un erreur de la part de Newton. Or, si on suppose que ce dernier se réfère non pas à des aires, mais à des primitives[37], cette erreur est indéniable, mais il est aussi difficile à expliquer. En revanche, si on interprète sa table comme portant sur des aires, pensée comme des grandeurs nécessairement positives, alors il ne s'agit que de l'application d'une simple convention, car, dans ce sens, l'aire de la courbe d'équation $z = f(x)$ ne diffère pas de celle de la courbe d'équation $z = -f(x)$.

7.2.2 La deuxième table : quadrature par inversion de l'algorithme des mouvements

Comme la table de Newton est construite en supposant donnée l'équation $v = \varphi(w)$, rien n'empêche de supposer que cette équation, plutôt que satisfaire à une des formes (7.46), prenne la forme $v = K$, où K est une constante quelconque. La courbe exprimée par cette courbe sera alors une droite parallèle à l'axe, et l'aire de cette courbe sera celle d'un parallélogramme. Évaluée entre $w = \varkappa$ et $w = \chi$, cette aire sera donc égale à $\sin \varrho K \left|\chi - \varkappa\right|$, ϱ étant l'angle formée par les coordonnées x et z. Dans ce cas, l'égalité (7.52) se réduit à l'égalité

$$f(x) = K\psi(x) \tag{7.55}$$

On en déduit que l'aire de la courbe d'équation $z = f(x) = K\psi(x)$, évaluée entre $x = \kappa$ et $x = \xi$ est égale à $\sin \varrho K \left|\phi(\xi) - \phi(\kappa)\right|$. Il suffit alors de choisir κ de sorte que $\phi(\kappa) = 0$ pour en conclure que l'aire de la courbe exprimée par une équation $z = f(x)$, évaluée entre $x = \kappa$ et $x = \xi$, est exprimée, sous la substitution $x \to \xi$, par le produit $\sin \varrho \left|\phi(x)\right|$, où l'expression $\phi(x)$ est telle que $f(x)$ exprime le rapport $\frac{t}{p}$ des mouvements décrivant les segments w et x liés entre eux par l'équation $w = \phi(x)$. C'est un autre argument montrant que l'inversion de l'algorithme des mouvements fournit une transformation qui peut être employée pour résoudre le problème des aires. Il suffit alors de poser $v = \varphi(w) = K$ pour construire, de la même manière que la table précédente, une table de quadrature.

C'est exactement ce que fait Newton, toute de suite après en avoir terminé avec la table précédente[38], en se référant implicitement à des coordonnées orthogonales, ce qui donne, $\sin \varrho = u$ et donc $\sin \varrho \left|\phi(x)\right| = \left|\phi(x)\right|$. Comme d'habitude, il ne distingue pas entre la

[36] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, [2], 353, note (25).

[37] Celle-ci semble être d'justement l'opinion de Whiteside : cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, note 19, 348.

[38] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, [3], 354-363.

variable x et sa valeur ξ, et il ne spécifie pas la limite constante de quadrature à laquelle il se réfère implicitement. Il ne fait non plus aucune mention des valeurs absolues, en se limitant à appliquer la même convention appliquée lors de la construction de la table précédente : écrire toujours en général l'expression de z avec le signe positif, et passer de cette expression à celles relatives aux différentes valeurs des exposants par une simple substitution qui conserve le signe de ces exposants.

Il clair que, d'un point de vue purement algorithmique, cette table ne diffère de la table dont on a discuté dans la section 7.1 — que Newton fait suivre à son énonciation de l'algorithme des mouvements — que pour la présence non essentielle, entre l'équation $z = f(x)$ et l'équation $w = \phi(x)$, de l'équation $v = K$ (où, dans la plus part des cas, Newton pose $K = 1$) : l'expression $f(x)$ dérive de l'expression $\phi(x)$, ainsi que dans cette dernière table l'expression du rapport $\frac{q}{p}$ dérive de l'expression donnée de y. La nouvelle table est simplement plus large que la précédente, mais, à part que pour les cas les plus simples, elle semble obtenue à l'aide d'artifices similaires, en employant des règles analogues à notre règle de dérivation d'un produit, et passant toujours par la réduction de l'équation donnée en forme entière.

Ce qui est en revanche différent dans les deux cas est l'interprétation de l'algorithme inverse à celui des mouvements : si cet algorithme ne permettait, dans la table précédente, que de revenir à une équation entre x et y, à partir du rapport des mouvements qui décrivent les segments liés par cette équation, il est dans la nouvelle table censé conduire d'emblée à l'expression d'une aire. En rédigeant cette nouvelle table, Newton montre ainsi avoir parfaitement compris le lien entre l'algorithme des mouvements et le problème des aires et, par ce biais, le lien, plus fondamental, entre ce dernier problème et le problème de la recherche du rapport des mouvements. La voie vers une unification de ses résultats à propos de tangentes et quadratures, dans le cadre d'une théorie des rapports des mouvements, est ainsi ouverte. Il ne tardera pas à la parcourir.

7.3 Équations des mouvements

Si ma reconstruction est correcte, les trois tables obtenues par Newton à l'aide de l'algorithme des mouvements sont construites toutes les trois en appliquant cet algorithme à des équations entières en deux variables obtenues à partir d'équations de la forme $y = f(x)$, où $f(x)$ est une expression Algébrique en x. Cet algorithme est donc appliqué à chaque fois à une équation entière en deux variables, $F(x, y) = 0$, tout en disposant au préalable d'une égalité exprimant y en termes de x. Ce n'est qu'en remplaçant y par $f(x)$ dans l'équation $G(x, y, p, q) = 0$ qui résulte de $F(x, y) = 0$ grâce à l'application de cet algorithme que Newton obtient une expression du rapport $\frac{q}{p}$ en termes de x. La recherche d'une méthode propre à passer directement d'une équation entière en deux variables, x et y, à une équation en q et p, dans laquelle n'intervient que la seule variable x, et *viceversa*, de cette dernière équation à une équation entière en x et y, fait l'objet d'une nouvelle note, rédigée probablement peu de temps après celles qu'on vient de discuter[39]. Cette note se laisse diviser tout naturellement en deux parties, la première[40] concernée avec le problème directe, la deuxième[41] avec le

[39]Cf. Newton(MP), I, **2**, 5, § 5, [1]-[2], 363-368.
[40]Cf. Newton(MP), I, **2**, 5, § 5, [1], 363-366.
[41]Cf. Newton(MP), I, **2**, 5, § 5, [2], 367-368.

problème inverse.

La méthode récursive proposée par Newton pour résoudre le problème directe est en principe applicable à toute sorte d'équation entière, quel que soit son degré par rapport à y. Pourtant, dès que ce degré dépasse le troisième, elle exige des calculs si longs que son application devient de plus en plus difficile, jusqu'à devenir bien tôt pratiquement impossible, à l'aide des outils de calcul dont disposait Newton. Ce dernier ne l'illustre d'ailleurs que sur trois exemples[42], respectivement donnés par une équation de premier, de deuxième et de troisième degré en y. Comme la solution par radicaux de ces équations prises comme des équations dans l'inconnue y, ne comporte, et ne comportait pas à l'époque de Newton, aucune difficulté, il est clair que dans ces cas cette méthode ne fournit que des équations que Newton aurait pu trouver par une autre voie, même si dans certains cas cette procédure alternative aurait pu demander des calculs plus pénibles. Elle semble pourtant fournir des suggestions pour la solution du problème inverse. Ce problème n'est pas banal, même lorsque l'équation entre les variables x et y qu'on est censé obtenir ne dépasse pas le troisième degré. On peut ainsi présumer que la vrai raison de l'intérêt de Newton vers cette méthode réside dans son caractère propédeutique pour une solution espérée du problème inverse.

Autant la considération du problème directe, que celle du problème inverse témoignent de toute façon d'un intérêt toujours plus vifs vers des relations purement algorithmiques, portant sur des équations et des expressions prises en elles mêmes, plutôt que sur les courbes ou les autres objets géométriques que ces équations ou expressions sont censées exprimer.

7.3.1 Le problème directe : de l'équation des variables à l'équation des mouvements

Voici d'abord comment Newton propose d'opérer pour résoudre le problème directe.

Supposons donnée l'équation (7.4), et, en employant la même notation employée dans la section 5.5.1, écrivons cette équation sous la forme

$$\sum_{j=0}^{n} \mathfrak{X}_j y^j = 0 \tag{7.56}$$

les $\mathfrak{X}_j$ étant des polynômes en x. Si on note par les symboles "$\overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_j$" $(j = 0, 1, ..., n)$ les polynômes $\frac{\ddot{\mathfrak{X}}_j}{x}$, obtenus des équations $\mathfrak{X}_j = 0$ par l'application de l'algorithme des mouvements et en supposant, pour simplifier, que le mouvement p est unitaire[43], on aura, en appliquant ce même algorithme à l'équation (7.56) :

$$\sum_{j=0}^{n} \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_j\, y^j + q \sum_{j=0}^{n} j \mathfrak{X}_j y^{j-1} = 0 \tag{7.57}$$

[42]Cf. Newton(MP), I, **2**, 5, § 5, [1], [a], [b_1] et [c_1], 363-365.

[43]En réalité Newton indique les polynômes $\overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_j$ par les mêmes symboles pointés employés le 20 mai 1665 pour indiquer les polynômes $\sum_{i=0}^{n-j} A_{i.j} i x^i$. Cette usage de ces symboles restera pourtant isolé dans les notes de Newton [cf. Newton(MP), I, **2**, 5, § 5, note (2), 363]. Il me semble donc convenable de modifier cette notation pour éviter des confusions.

Mais de l'équation (7.56) il est aussi facile de tirer l'égalité

$$y^n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{-\mathfrak{X}_j}{\mathfrak{X}_n} y^j \tag{7.58}$$

d'où, par comparaison avec l'équation (7.57), on obtient :

$$\mathfrak{X}_n \sum_{j=0}^{n-1} \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_j\, y^j - \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_n \sum_{j=0}^{n-1} \mathfrak{X}_j y^j + q\mathfrak{X}_n \sum_{j=0}^{n} j\mathfrak{X}_j y^{j-1} = 0 \tag{7.59}$$

qui, comme on le voit aisément, est une équation de premier degré en q, où n'interviennent que les premières $n-1$ puissances de y. D'ici est alors facile d'obtenir :

$$y^{n-1} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-2} \mathfrak{A}_j y^j - q\mathfrak{X}_n \sum\limits_{j=0}^{n-1} j\mathfrak{X}_j y^{j-1}}{\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 q} \tag{7.60}$$

où on aura posé, pour simplifier,

$$\begin{aligned}
&\overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_{n-1}\, \mathfrak{X}_n - \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_n\, \mathfrak{X}_{n-1} = \mathfrak{a}_0 \\
&n\mathfrak{X}_n^2 = \mathfrak{a}_1 \\
&\overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_n\, \mathfrak{X}_j - \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_j\, \mathfrak{X}_n = \mathfrak{A}_j
\end{aligned} \tag{7.61}$$

(avec $j = 0, 1, ..., n-2$). En multipliant en suite l'équation (7.59) pour y et en comparant l'équation résultante y avec l'égalité (7.58), on a

$$\mathfrak{X}_n \sum_{j=0}^{n-2} \mathfrak{A}_j y^{j+1} - q\mathfrak{X}_n^2 \sum_{j=0}^{n-1} j\mathfrak{X}_j y^j + (\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 q) \sum_{j=0}^{n-1} \mathfrak{X}_j y^j = 0 \tag{7.62}$$

et donc :

$$y^{n-1} = -\frac{\sum\limits_{j=0}^{n-2} \mathfrak{H}_j y^j + q\mathfrak{X}_n^2 \sum\limits_{j=0}^{n-2} (n-j)\, \mathfrak{X}_j y^j}{\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_1 q} \tag{7.63}$$

où on aura posé

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_{-1} = 0 \\
&\mathfrak{A}_{n-2}\mathfrak{X}_n + \mathfrak{a}_0\mathfrak{X}_{n-1} = \mathfrak{h}_0 \\
&\mathfrak{X}_n^2\mathfrak{X}_{n-1} = \mathfrak{h}_1 \\
&\mathfrak{a}_0\mathfrak{X}_j + \mathfrak{A}_{j-1}\mathfrak{X}_n = \mathfrak{H}_j
\end{aligned} \tag{7.64}$$

(avec $j = 0, 1, ..., n-2$). En comparant entre elles les égalités (7.60) et (7.63), on aura alors

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_1 q) \left(\sum_{j=0}^{n-2} \mathfrak{A}_j y^j - q\mathfrak{X}_n \sum_{j=0}^{n-1} j\mathfrak{X}_j y^{j-1} \right) \\
&+ (\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 q) \left(\sum_{j=0}^{n-2} \mathfrak{H}_j y^j + q\mathfrak{X}_n^2 \sum_{j=0}^{n-2} (n-j)\, \mathfrak{X}_j y^j \right)
\end{aligned}\right\} = 0 \tag{7.65}$$

et donc :

$$y^{n-2}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n-3}\mathfrak{B}_j y^j+\left(\sum\limits_{j=0}^{n-3}\mathfrak{C}_j y^j\right)q+\left(\sum\limits_{j=0}^{n-3}\mathfrak{D}_j y^j\right)q^2}{\mathfrak{b}_0+\mathfrak{b}_1 q+\mathfrak{b}_2 q^2} \tag{7.66}$$

où on aura posé

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h}_0\mathfrak{A}_{n-2}+\mathfrak{a}_0\mathfrak{H}_{n-2}=\mathfrak{b}_0\\
&\mathfrak{h}_1\mathfrak{A}_{n-2}-(n-1)\mathfrak{h}_0\mathfrak{X}_n\mathfrak{X}_{n-1}+\mathfrak{a}_1\mathfrak{H}_{n-2}+2\mathfrak{a}_0\mathfrak{X}_n^2\mathfrak{X}_{n-2}=\mathfrak{b}_1\\
&2\mathfrak{a}_1\mathfrak{X}_n^2\mathfrak{X}_{n-2}-(n-1)\mathfrak{h}_1\mathfrak{X}_n\mathfrak{X}_{n-1}=\mathfrak{b}_2\\
&-\mathfrak{h}_0\mathfrak{A}_j-\mathfrak{a}_0\mathfrak{H}_j=\mathfrak{B}_j\\
&(j+1)\,\mathfrak{h}_0\mathfrak{X}_n\mathfrak{X}_{j+1}-\mathfrak{h}_1\mathfrak{A}_j-\mathfrak{a}_1\mathfrak{H}_j-(n-j)\,\mathfrak{a}_0\mathfrak{X}_n^2\mathfrak{X}_j=\mathfrak{C}_j\\
&(j+1)\,\mathfrak{h}_1\mathfrak{X}_n\mathfrak{X}_{j+1}-(n-j)\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{X}_n^2\mathfrak{X}_j=\mathfrak{D}_j
\end{aligned} \tag{7.67}$$

(avec $j=0,1,...,n-3$).

Si $1\leq n\leq 3$, les égalités (7.58), (7.60) et (7.66) résolvent le problème, en permettant d'obtenir une expression de y en termes de x et q, qu'on pourra substituer à y dans l'équation entière donnée, pour tirer l'équation cherchée. Par exemple, si $n=3$, de l'égalité (7.66), on tire

$$y=\frac{\mathfrak{B}_0+\mathfrak{C}_0 q+\mathfrak{D}_0 q^2}{\mathfrak{b}_0+\mathfrak{b}_1 q+\mathfrak{b}_2 q^2} \tag{7.68}$$

qui, en étant comparée à l'équation (7.56) pour $n=3$, fournit une sextique en q :

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{X}_0\left(\mathfrak{b}_0+\mathfrak{b}_1 q+\mathfrak{b}_2 q^2\right)^3\\
+\mathfrak{X}_1\left(\mathfrak{B}_0+\mathfrak{C}_0 q+\mathfrak{D}_0 q^2\right)\left(\mathfrak{b}_0+\mathfrak{b}_1 q+\mathfrak{b}_2 q^2\right)^2\\
+\mathfrak{X}_2\left(\mathfrak{B}_0+\mathfrak{C}_0 q+\mathfrak{D}_0 q^2\right)^2\left(\mathfrak{b}_0+\mathfrak{b}_1 q+\mathfrak{b}_2 q^2\right)\\
+\mathfrak{X}_3\left(\mathfrak{B}_0+\mathfrak{C}_0 q+\mathfrak{D}_0 q^2\right)^3
\end{array}\right\}=0 \tag{7.69}$$

Si $n\geq 4$, on peut, en principe, continuer de la même manière, mais la complexité des calculs croît alors vertigineusement. En effet, si on multiplie l'équation (7.65) par y, on compose l'équation ainsi obtenue avec l'égalité (7.60), et on calcule y^{n-2} à partir de la résultante de cette composition, on parvient à exprimer y^{n-2} par un quotient de polynômes de $3^{\text{ème}}$ degré en q. On pourra alors égaliser entre elles cette nouvelle expression de y^{n-2} et celle qui est fournie par l'égalité (7.66) ; on obtiendra une nouvelle équation à partir de laquelle on pourra parvenir à exprimer y^{n-3} par un quotient de polynômes de $5^{\text{ème}}$ degré en q. En continuant de la même manière, on parvient en suite à exprimer y^{n-4} par un quotient de polynômes de $12^{\text{ème}}$ degré en q, y^{n-5} par un quotient de polynômes de $29^{\text{ème}}$ degré en q, y^{n-6} par un quotient de polynômes de $70^{\text{ème}}$ degré en q, et ainsi de suite.

Si on suppose que h et k sont deux nombres entiers positifs, et on note par "$[h]$" un polynôme de $h^{\text{ème}}$ degré en q où n'apparaît que la variable x, et par "$[h;y^k]$" un polynôme de $h^{\text{ème}}$ degré en q où la variable y apparaît au plus à la puissance k, le procédé récursif de Newton peut être reconstruit comme il suit.

1. On part d'une expression de y^n donnée par un quotient de polynômes de degré 0 en q ; c'est l'égalité (7.58), qu'on pourra écrire schématiquement ainsi :

$$y^n = \frac{[0; y^{n-1}]}{[0]} \tag{7.70}$$

2. En composant cette égalité avec l'équation obtenue de l'équation (7.56) par l'application de l'algorithme des mouvements — l'équation (7.57) — on obtient une expression de y^{n-1} donnée par un quotient de polynômes de 1er degré en q ; c'est l'égalité (7.60), qu'on pourra écrire schématiquement ainsi :

$$y^{n-1} = \frac{[1; y^{n-2}]}{[1]} \tag{7.71}$$

3. (a) En multipliant l'égalité (7.71) par y, et en composant l'égalité ainsi obtenue avec l'égalité (7.70), on obtient une nouvelle expression de y^{n-1} donnée par un quotient de polynômes de 1er degré en q ; c'est l'égalité (7.63) ; cette procédure peut être schématisée ainsi :

$$\left.\begin{aligned} &[1]y^n = [1; y^{n-1}] \\ &y^n = \frac{[0; y^{n-1}]}{[0]} \end{aligned}\right\} \to$$

$$\to [1]\frac{[0; y^{n-1}]}{[0]} = [1; y^{n-1}] \to$$

$$\to y^{n-1} = \frac{[1; y^{n-2}]}{[1]}$$

   (b) En égalisant cette dernière expression de y^{n-1} avec celle qui est donnée par l'égalité (7.71), on obtient une nouvelle équation, dont on peut tirer une expression de y^{n-2} donnée par un quotient de polynômes de 2ème degré en q ; c'est l'égalité (7.66), qu'on pourra écrire schématiquement ainsi :

$$y^{n-2} = \frac{[2; y^{n-3}]}{[2]} \tag{7.72}$$

4. (a) En multipliant l'égalité (7.72) par y, et en composant l'égalité ainsi obtenue avec l'égalité (7.71), on obtient une nouvelle expression de y^{n-2} donnée par un quotient de polynômes de 3ème degré en q ; cette procédure peut être schématisée ainsi :

$$\left.\begin{aligned} &[2]y^{n-1} = [2; y^{n-2}] \\ &y^{n-1} = \frac{[1; y^{n-2}]}{[1]} \end{aligned}\right\} \to$$

$$\to [2]\frac{[1; y^{n-2}]}{[1]} = [2; y^{n-2}] \to$$

$$\to y^{n-2} = \frac{[3; y^{n-2}]}{[3]}$$

(b) En égalisant cette dernière expression de y^{n-2} avec celle qui est donnée par l'égalité (7.72), on obtient une nouvelle équation, dont on peut tirer une expression de y^{n-3} donnée par un quotient de polynômes de $5^{\text{ème}}$ degré en q, qu'on pourra écrire schématiquement ainsi :

$$y^{n-3} = \frac{[5; y^{n-4}]}{[5]} \tag{7.73}$$

5. (a) En multipliant l'égalité (7.73) par y, et en composant l'égalité ainsi obtenue avec l'égalité (7.72), on obtient une nouvelle expression de y^{n-3} donnée par un quotient de polynômes de $7^{\text{ème}}$ degré en q ; cette procédure peut être schématisée ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} [5]y^{n-2} = [5; y^{n-3}] \\ y^{n-2} = \dfrac{[2; y^{n-3}]}{[2]} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow [5]\frac{[2; y^{n-3}]}{[2]} = [5; y^{n-3}] \rightarrow$$

$$\rightarrow y^{n-3} = \frac{[7; y^{n-4}]}{[7]}$$

(b) En égalisant cette dernière expression de y^{n-3} avec celle qui est donnée par l'égalité (7.73), on obtient une nouvelle équation, dont on peut tirer une expression de y^{n-4} donnée par un quotient de polynômes de $12^{\text{ème}}$ degré en q, qu'on pourra écrire schématiquement ainsi :

$$y^{n-4} = \frac{[12; y^{n-5}]}{[12]} \tag{7.74}$$

6. Et ainsi de suite

Cette reconstruction rend clair qu'conformément à cette procédure on parvient à exprimer $y^{n-\nu}$ $(\nu = 2, 3, ..., n-1)$ par un quotient de polynômes en q, dont le degré $dg(\nu)$ satisfait la loi récursive

$$dg(\nu) = 2dg(\nu - 1) + dg(\nu - 2) \tag{7.75}$$

avec $dg(0) = 0$ et $dg(1) = 1$. Ainsi, en partant d'une équation de n-ème degré en y $(n \geq 3)$, on obtiendrait une équation en x et q dont le degré en q est égal à $n\,[2dg(n-2) + dg(n-3)]$[44]. La difficulté pratique d'application d'une telle méthode pour $n \geq 4$ devient alors palpable.

* * *

Après avoir exposé sa méthode en général, Newton continue sa note par des calculs visant à résoudre le même problème dans des cas particuliers, en exploitant des artifices spécifiques à ces cas[45].

[44] Il me semble donc nécessaire de corriger la généralisation de Whiteside : cf. Newton(MP), I, **2**, 5, § 5, note (10), 365.

[45] Cf. Newton(MP), I, **2**, 5, § 5, [1], 365-366.

Si l'équation donnée est, par exemple, de $2^{\text{ème}}$ degré en y, il est possible d'exploiter les relations connues entre les racines de cette équation, pour trouver l'équation des mouvements[46]. En effet, en appliquant l'algorithme des mouvements à l'équation

$$\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{X}_1 y + \mathfrak{X}_2 y^2 = 0 \tag{7.76}$$

et en supposant p unitaire, on aura,

$$q = -\frac{\overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_0 + \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_1 y + \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_2 y^2}{\mathfrak{X}_1 + 2\mathfrak{X}_2 y} \tag{7.77}$$

Or, si r_1 et r_2 sont les deux racines de l'équation (7.76), on peut remplacer y dans ce quotient autant par r_1 qu'avec r_2 et calculer q^2 comme le produit des quotients résultants. En observant que $r_1 + r_2 = -\frac{\mathfrak{X}_1}{\mathfrak{X}_2}$ et $r_1 r_2 = \frac{\mathfrak{X}_0}{\mathfrak{X}_2}$, cela donne :

$$q^2 = \frac{\left[\begin{array}{c} \mathfrak{X}_2^2 \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}{}_0^2 - \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_0 \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_1 + \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_0 \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_2 \left(\mathfrak{X}_1^2 - 2\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_2\right) \\ + \mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_2 \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}{}_1^2 - \mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_1 \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_1 \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_2 + \mathfrak{X}_0^2 \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}{}_2^2 \end{array}\right]}{4\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_2^2 - \mathfrak{X}_1^2\mathfrak{X}_2^2} \tag{7.78}$$

Ce même quotient de polynômes prend naturellement une forme plus simple si $\mathfrak{X}_1 = a\mathfrak{X}_2$, a étant une constante quelconque. C'est ce que Newton montre lors d'un nouveau calcul[47].

En revanche[48], si l'équation donnée est de $n^{\text{ème}}$ degré en y, mais qu'elle ne contient y qu'à la puissance n-ème, la recherche de l'équation des mouvements peut se faire très rapidement sans parcourir les n étapes de la procédure récursive précédente. De l'équation

$$\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{X}_n y^n = 0 \tag{7.79}$$

on tire en effet, en appliquant l'algorithme des mouvements et en supposant p unitaire,

$$q = -\frac{\overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_0 + \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_n y^n}{n\mathfrak{X}_n y^{n-1}} \tag{7.80}$$

et de là, en remplaçant y^n et y^{n-1} par les expressions de ces puissances tirées de l'équation (7.79) elle-même :

$$q = \frac{\mathfrak{X}_n \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_0 - \mathfrak{X}_0 \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_n}{n\sqrt[n]{\mathfrak{X}_0^{n-1}\mathfrak{X}_n^{n+1}}} \tag{7.81}$$

Ces courts et simples calculs n'ont d'intérêt que parce qu'il montrent l'intérêt de Newton vers des relations purement algorithmiques, tout en confirmant combien celui-ci est loin de la définition d'un opérateur analogue à notre opérateur de dérivation. Encore que formellement

[46]Cf. Newton(MP), I, **2**, 5, § 5, [1], [b_2], 365-366. Avant de considérer une équation de $2^{\text{ème}}$ degré, Newton cherche d'appliquer un argument analogue à une équation de $3^{\text{ème}}$ degré, mais il désiste face à la complexité des calculs nécessaires [cf. *ibid.*, note (12), 365].

[47]Cf. Newton(MP), I, **2**, 5, § 5, [1], [b_3], 366.

[48]Cf. Newton(MP), I, **2**, 5, § 5, [1], [d_1], 366.

équivalent à la dérivée de $y = \sqrt[n]{-\frac{\mathfrak{X}_0}{\mathfrak{X}_n}}$ l'expression de q fournie par l'égalité (7.81) est en effet obtenue par une procédure qu'il est impossible de généraliser et provient en dernière instance de la transformation d'une équation entière.

Sans doute plus significatifs sont par contre les calculs qui occupent les trois dernières lignes de la note de Newton[49]. Imaginons qu'une équation entière $F(x, y) = 0$ soit donnée et que le rapport $\frac{q}{p}$ des mouvements des segments x et y liés entre eux par cette équation soit connu. Si on suppose que p est unitaire, il s'ensuit, que le mouvement q est exprimé par une expression Algébrique en x, disons $g(x)$. Or, rien n'empêche de considérer q comme l'ordonnée orthogonale d'une courbe d'abscisse x. L'équation $q = g(x)$ est alors celle d'une courbe qu'on sait carrer. Comme on l'a vu ci-dessus[50], l'aire de cette courbe, évaluée entre κ et ξ, est égale à celle d'une autre courbe d'équation $v = \varphi(w)$, évaluée entre $\varkappa$ et χ, si et seulement si $w = \phi(x)$, $\varkappa = \phi(\kappa)$, $\chi = \phi(\xi)$, et

$$\varphi(\phi(x)) = \frac{p}{t} g(x) \tag{7.82}$$

$\frac{p}{t}$ étant le rapport des mouvements qui décrivent les segments x et w. Or, si on suppose que $w - \phi(x) = \mathfrak{X}_n w^n - \mathfrak{X}_0$, et $v = \varphi(w) = \sqrt{\frac{-cw^2-a}{b}}$ (a, b et c étant des constantes quelconques) on en tire, conformément aux égalités (7.81) et (7.82) :

$$\frac{c}{b}\left(\frac{\mathfrak{X}_0}{\mathfrak{X}_n}\right)^{\frac{2}{n}} + \frac{a}{b} + q^2 \frac{n\sqrt[n]{\mathfrak{X}_0^{2n-2}\mathfrak{X}_n^{2n+2}}}{\left(\mathfrak{X}_n \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}_0} - \mathfrak{X}_0 \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}_n}\right)^2} = 0 \tag{7.83}$$

qui est l'équation d'une courbe d'aire égale à la courbe d'équation $v = \sqrt{\frac{-cw^2-a}{b}}$, sous la condition $\mathfrak{X}_n w^n - \mathfrak{X}_0 = 0$.

L'intérêt de cet argument est manifeste : Newton montre avoir désormais appris à traiter les mouvements comme des variables au même titre que d'autres, exprimées par des expressions Algébriques qui peuvent se combiner entre elles pour former d'autres expressions et équations.

7.3.2 Problème inverse : de l'équation des mouvements à l'équation des variables

Si $n = 1$, l'équation des mouvements obtenue par la méthode précédente à partir de l'équation (7.56), et sous la supposition que p est unitaire, est la suivante :

$$\mathfrak{X}_1 \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}_0} - \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}_1} \mathfrak{X}_0 + \mathfrak{X}_1^2 q = 0 \tag{7.84}$$

Si une équation de premier degré en q, $\alpha_0 + \alpha_1 q = 0$ est donnée, pour avoir l'equation entre x et y dont celle-ci dérive en tant qu'équation des mouvements, il faut ainsi déterminer les

[49] Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 5, [1], [d$_2$], 366. Newton n'explicite pas le but de ces calculs, dont je présente ici une interprétation plausible : cf. aussi *ibid.*, note (17), 366.

[50] Cf. la section 7.2,en particulier pp. 365-367.

polynômes $\mathfrak{X}_0$ et $\mathfrak{X}_1$ de sorte qu'ils respectent la condition

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\mathfrak{X}_1 \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_0 - \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_1 \mathfrak{X}_0}{\mathfrak{X}_1^2} \tag{7.85}$$

Il suffit de se rapporter à la première des égalités (6.75) et à l'égalité (7.8) pour comprendre que le problème de la recherche de cette équation est équivalent au problème de la recherche d'un quotient de polynômes qui exprime l'ordonnée d'une courbe, référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, dont la sous-normale est exprimée par un autre quotient de polynômes donné. C'est un problème que Newton avait déjà abordé quelques semaines plus tôt, et qu'on a discuté dans la section 6.3.3. Lorsqu'il vient à considérer le problème inverse de l'équation des mouvements, il peut ainsi supposer d'emblée que l'équation donnée en q est d'un degré supérieur au premier, et qu'elle dérive donc d'une équation entre x et y dont le degré est aussi supérieur au premier.

Or, on peut vérifier que si $n = 2$ ou $n = 3$, les équations des mouvements, obtenues par la méthode précédente, à partir de l'équation (7.56), sont respectivement du 2$^{\text{ème}}$ et du 6$^{\text{ème}}$ degré en q et possèdent trois caractéristiques communes. D'abord, le coefficient du terme de degré maximal en q présente comme facteur une puissance du polynôme $\mathfrak{X}_n$ supérieure à la deuxième (respectivement d'ordre 3 et 9), et ne présente comme facteur aucun des polynômes $\overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_0, \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_1, \ldots, \overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_n$. Ensuite, tous les autres coefficients des puissances de q qui interviennent en ces équations présentent aussi le polynôme $\mathfrak{X}_n$ comme un facteur simple ; si on divise ces équations par $\mathfrak{X}_n$ on obtient donc des équations entières plus simples de même degré en q, telles que le coefficient du terme de degré maximal en q présente encore le polynôme $\mathfrak{X}_n$ comme facteur multiple, tandis que les autres coefficients ne présentent pas ce polynôme comme facteur. Enfin, les coefficients des puissances de q qui interviennent dans ces équations sont tous des polynômes homogènes dans les variables $\mathfrak{X}_j$ et $\overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_j$ ($j = 0, 1, ..., n$), et, si on suppose que les polynômes $\mathfrak{X}_j$ sont tous de degré m en x — et donc les polynômes $\overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}}_j$ sont tous de degré $m-1$ en x — alors chacun de ces polynômes est de degré $(\rho - (\nu - \mu))\, m + (\nu - \mu)(m-1)$ en x, où μ est l'exposant de la puissance de q à laquelle ce coefficient est affecté, ν est le degré en q de ces équations, et ρ est enfin le degré dans les variables $\mathfrak{X}_j$ du coefficient de q^ν dans ces mêmes équations. Il n'est pas difficile de comprendre que ces trois caractéristiques dépendent de la nature de la méthode fournissant les équations des mouvements, et sont ainsi maintenues en passant à des valeurs supérieurs de n.

Ces remarques semblent être à la base des préceptes que Newton expose dans la deuxième partie de sa note[51]. Il ne s'agit en réalité que de quelques indications assez vagues rédigées dans un langage fort obscur, que Whiteside a prudemment qualifié de "*tentative suggestions*"[52]. Ils témoignent pourtant d'une prise de conscience de la difficulté du problème inverse, lorsque il est conçu en termes finitaires, comme la recherche d'une équation finie entre x et y à partir d'une équation en q donnée. En termes modernes, il s'agit du problème de la recherche d'une solution exacte pour une équation différentielle quelconque du premier ordre $F(x, y') = 0$, où n'apparaît pas la variable y.

[51] Cf. la note (41), ci-dessus.

[52] Cf. Newton(MP), I, **2**, 5, § 5, note (22), 368.

Supposons donnée une équation entière en q,

$$\sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i q^i = 0 \tag{7.86}$$

où les coefficients α_i sont des polynômes en x. Il s'agit de trouver les polynômes $\mathfrak{X}_j$ ($j = 0, 1, \ldots, n$) intervenant dans l'équation (7.56) d'où l'équation (7.86) dérive en tant qu'équation des mouvements. Si l'équation (7.86) est obtenue à partir de l'équation (7.56) en suivant la procédure précédente, alors le polynôme $\mathfrak{X}_n$ ne peut qu'être un facteur multiple (et réel) de α_ν. Newton propose de déterminer provisoirement $\mathfrak{X}_n$ comme le quotient de la division de α_ν par le produit de tous ses facteurs premiers (réels) non constants, pris une seule fois[53]. Ainsi si on suppose que $\alpha_\nu = K \prod_{i=0}^{h} \beta_i^{k_i}$ (où K est une constante, les β_i sont des polynômes en x premiers entre'eux, et les k_i des exposants entiers strictement positifs), on aura provisoirement :

$$\mathfrak{X}_n = \frac{\alpha_\nu}{\prod_{i=0}^{h} \beta_i} \tag{7.87}$$

Une telle détermination de $\mathfrak{X}_n$ n'est correcte qu'à des facteurs près, que Newton envisage d'éliminer par simplification, en déterminant les autres coefficients de l'équation (7.56), par la méthode des coefficients indéterminés[54], en fonction de cette première détermination provisoire de $\mathfrak{X}_n$. Il s'agit alors : de poser l'équation

$$\mathfrak{X}_n y^n + \sum_{j=0}^{n-1} A_j y^j = 0 \tag{7.88}$$

où le coefficient $\mathfrak{X}_n$ est donné par l'égalité (7.87) et les coefficients A_j ($j = 0, 1, ..., n-1$) sont en revanche indéterminés ; de chercher, par la méthode précédente, l'équation des mouvements relative à cette équation ; et de déterminer enfin les coefficients A_j en comparant terme à terme cette dernière équation avec l'équation donnée.

Lorsque n est plus grand que 3, le calculs nécessaires pour appliquer cette méthode sont de plus en plus complexes et deviennent vite pratiquement irréalisables. Pourtant, cette méthode ne peut même pas être applicable en ligne de principe si on ne fixe pas *a*

[53]Évidemment, rien n'empêche que l'équation (7.56) présente un coefficient $\mathfrak{X}_n$ constant. Dans ce cas, on aurait $\overset{\circ\circ}{\mathfrak{X}_n} = 0$, ce qui permettrait des simplifications dans l'équation des mouvements qui pourraient conduire à faire que $\mathfrak{X}_n$ n'intervient dans le coefficient de la puissance maximal de q que comme un facteur simple. C'est la raison pour laquelle, pour parvenir à la première détermination provisoire de $\mathfrak{X}_n$, il faut diviser α_ν par ses facteurs premiers (réels) non constants. En revanche, il suffit de considérer les cas plus simples, donnés par les suppositions $n = 2$ et $n = 3$, pour se rendre compte que si l'équation (7.56) n'est pas à son tour simplifiable par division, alors, si $\mathfrak{X}_n$ n'est pas constant, il n'est pas possible que l'équation des mouvements tirée de cette équation soit divisible par $\mathfrak{X}_n^2$.

[54]Si les coefficients $\alpha_{\nu-1}$, $\alpha_{\nu-2}$,..., $\alpha_{\nu-\lambda}(1 \leq \lambda \leq \nu-1)$ dans l'équation (7.86) sont nuls, Newton propose de simplifier d'emblée le coefficients $\mathfrak{X}_n$ en le déterminant de manière provisoire comme le quotient de la division de α_ν par le produit de tous ses facteurs premiers (réels) non constants, pris autant de fois qu'ils interviennent en α_ν jusqu'à un maximum de $\lambda + 1$ fois. Pour justifier cette démarche, il suffit d'étudier la forme des coefficients de $q^{\nu-1}$, $q^{\nu-2}$,..., $q^{\nu-\lambda}$ dans l'équation des mouvements obtenue à partir de l'équation (7.56), selon la procédure précédente.

priori autant la valeur de n que le degré en x des polynômes A_j, de telle sorte que l'erreur éventuelle puisse ensuite être corrigée par simplification. Il faudra donc parvenir *a priori* à approcher par excès autant la valeur de n que les degré en x des polynômes A_j. Pour ce qui est de la valeur de n, Newton propose de poser d'abord $n = \nu$. Pour ce qui est du degré en x des polynômes A_j, il suppose que le degré de chaque polynôme A_μ $(0 \leq \mu < n = \nu)$, soit égale au degré en x de α_μ plus $\nu - \mu$ moins la différence entre le degré en x de α_ν et le degré de $\mathfrak{X}_n$, ce dernier polynôme étant déterminé en accord à l'égalité (7.87). Si on suppose en effet que les $\mathfrak{X}_j$ $(j = 0, 1, ..., n)$ sont tous des polynômes de $m^{\text{ème}}$ degré en x, le degré de α_μ sera égal à $(\rho - (\nu - \mu))\, m + (\nu - \mu)(m-1)$ et

$$\left.\begin{array}{c} [\rho - (\nu - \mu)]\, m + (\nu - \mu)(m-1) \\ + \\ \nu - \mu \\ - \\ [(\rho - (\nu - \nu))\, m + (\nu - \nu)(m-1) - m] \end{array}\right\} = m \tag{7.89}$$

Bien que la méthode de Newton ne soit pratiquement à même de résoudre le problème posé que dans quelques cas fort simples, parmi ceux dans lesquels ce problème possède une solution finitaire, elle montre bien plus qu'un intérêt de la part de ce dernier vers des relations purement algorithmiques. Le mouvement q est pensé par celui-ci comme décrivant un segment, mais il est difficile de comprendre quel problème géométrique puisse être rattaché au problème du retour d'une équation entière en x et q à une équation entière en x et y. Ces équations semblent donc jouer d'elles mêmes le rôle d'objets propres. S'il ne s'agit pas encore d'objets *analytiques*, c'est que Newton ne peut, dans l'automne 1665, que les définir en rapport à des objets géométriques tels que des segments variables et des vitesses du mouvement rectiligne d'un corps qui décrit ces segments.

7.4 Annexe

Reconstruction de la table des courbes à aire égale donnée par Newton dans l'automne 1665[55].

1. $v = \varphi(w) \ : \ v = \sqrt{cw + dw^2}$

   $w = \phi(x) \ : \ w = x^\theta$

   $\dfrac{t}{p} = \psi(x) = \theta x^{\theta - 1}$

   $\theta = \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4, \dfrac{1}{2}$

$$z = f(x) \ : \ z = \theta x^{\theta - 1}\sqrt{cx^\theta + dx^{2\theta}}$$

[55]Cf. Newton (MP), I, **2**, 5, § 4, [2], 348-354 et la section 7.2.1.

2. $v = \varphi(w) \ : \ v = \sqrt{c + dw^2}$
$w = \phi(x) \ : \ w = x^\theta$
$\dfrac{t}{p} = \psi(x) = \theta x^{\theta-1}$
$\theta = -1, \pm 2, 3, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{3}{2}$

$$z = f(x) \ : \ z = \theta x^{\theta-1}\sqrt{c + dx^{2\theta}}$$

3. $v = \varphi(w) \ : \ v = \sqrt{c + dw + ew^2}$
$w = \phi(x) \ : \ w = x^\theta$
$\dfrac{t}{p} = \psi(x) = \theta x^{\theta-1}$
$\theta = -1, \pm 2, \pm 3, 4, \pm\dfrac{1}{2}$

$$z = f(x) \ : \ z = \theta x^{\theta-1}\sqrt{c + dx^\theta + ex^{2\theta}}$$

4. $v = \varphi(w) \ : \ v = \dfrac{1}{w}$
$w = \phi(x) \ : \ w = a + bx^\theta$
$\dfrac{t}{p} = \psi(x) = \theta b x^{\theta-1}$
$\theta = \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{3}{2}$

$$z = f(x) \ : \ z = \theta b x^{\theta-1}\frac{1}{a + bx^\theta}$$

5. $v=\varphi(w)\ :\ v=\dfrac{d}{w}$

$w=\phi(x)\ :\ w=ax^{\theta}+bx^{\vartheta}$

$\dfrac{t}{p}=\psi(x)=a\theta x^{\theta-1}+b\vartheta x^{\vartheta-1}$

$$d=1\ ;\quad \begin{array}{l}\theta=1;\vartheta=2,3,-1\\ \theta=2;\vartheta=3,4,5\\ \theta=3;\vartheta=,4,5\\ \theta=4;\vartheta=5,6\\ \theta=-1;\vartheta=1,2\\ \theta=-2;\vartheta=-1\end{array}$$

$$z=f(x)\ :\ z=\frac{d\left[a\theta x^{\theta-1}+b\vartheta x^{\vartheta-1}\right]}{ax^{\theta}+bx^{\vartheta}}$$

6. $v=\varphi(w)\ :\ v=\sqrt{c+dw^2}$

$w=\phi(x)\ :\ w=\sqrt{\dfrac{x^{2\theta}-c}{d}}$

$\dfrac{t}{p}=\psi(x)=\dfrac{\theta x^{2\theta-1}}{\sqrt{d(x^{2\theta}-c)}}$

$\theta=\pm 1,\pm\dfrac{1}{2}$

$$z=f(x)\ :\ z=\frac{\theta x^{3\theta-1}}{\sqrt{d(x^{2\theta}-c)}}$$

7. $v=\varphi(w)\ :\ v=\sqrt{c^2+dw^2}$

$w=\phi(x)\ :\ w=\sqrt{2bcx^{\theta}+b^2dx^{2\theta}}$

$\dfrac{t}{p}=\psi(x)=\dfrac{bc\theta x^{\theta-1}+b^2d\theta x^{2\theta-1}}{\sqrt{2bcx^{\theta}+b^2dx^{2\theta}}}$

$\theta=\pm 1,\pm 2$

$$z=f(x)\ :\ z=\frac{bc^2\theta x^{\theta}+2b^2cd\theta x^{2\theta}+b^3d^2\theta x^{3\theta}}{x\sqrt{2bcx^{\theta}+b^2dx^{2\theta}}}$$

8. $v = \varphi(w)\ :\ v = \sqrt{c + dw^2}$

$w = \phi(x)\ :\ w = \sqrt{ax^{\theta} + bx^{\vartheta}}$

$\dfrac{t}{p} = \psi(x) = \dfrac{a\theta x^{\theta-1} + b\vartheta x^{\vartheta-1}}{2\sqrt{ax^{\theta} + bx^{\vartheta}}}$

$\theta = 0; \vartheta = \pm 1, \pm 2$

$$z = f(x)\ :\ z = \frac{a\theta x^{\theta} + b\vartheta x^{\vartheta}}{2x\sqrt{ax^{\theta} + bx^{\vartheta}}}\sqrt{c + adx^{\theta} + bdx^{\vartheta}}$$

9. $v = \varphi(w)\ :\ v = \sqrt{c + dw^2}$

$w = \phi(x)\ :\ w = \dfrac{e}{\sqrt{ax^{\theta} + bx^{\vartheta}}}$

$\dfrac{t}{p} = \psi(x) = -\dfrac{ae\theta x^{\theta-1} + be\vartheta x^{\vartheta-1}}{2\sqrt{\left(ax^{\theta} + bx^{\vartheta}\right)^3}}$

$\theta = 0; \vartheta = \pm 1, \pm 2$

$$z = f(x)\ :\ z = -\frac{ae\theta x^{\theta} + be\vartheta x^{\vartheta}}{2x\left(ax^{\theta} + bx^{\vartheta}\right)^2}\sqrt{acx^{\theta} + bcx^{\vartheta} + de^2}$$

10. $v = \varphi(w)\ :\ v = \sqrt{c^2 + d^2w^2}$

$w = \phi(x)\ :\ w = \dfrac{cb}{2ad\sqrt{a^2x^{2\theta} + bx^{\theta}}}$

$\dfrac{t}{p} = \psi(x) = -\dfrac{2a^2bc\theta x^{2\theta-1} + b^2c\theta x^{\theta-1}}{4ad\sqrt{\left(a^2x^{2\theta} + bx^{\theta}\right)^3}}$

$\theta = \pm 1, \pm 2$

$$z = f(x)\ :\ z = -\frac{bc^2\left(4a^4\theta x^{3\theta} + 4a^2b\theta x^{2\theta} + b^2\theta x^{\theta}\right)}{8a^2dx\left(a^2x^{2\theta} + bx^{\theta}\right)^2}$$

11. $v = \varphi(w)\ :\ v = \sqrt{c^2 - \dfrac{ac^2}{e^2}w^2}$

$w = \phi(x)\ :\ w = \dfrac{e}{\sqrt{a + b^2x^{\theta}}}$

$\dfrac{t}{p} = \psi(x) = -\dfrac{b^2e\theta x^{\theta-1}}{2\sqrt{\left(a + b^2x^{\theta}\right)^3}}$

$\theta = 2$

$$z = f(x)\ :\ z = -\frac{b^3ce\theta x^{\frac{3}{2}\theta}}{2x\left(a + b^2x^{\theta}\right)^2}$$

12. $v = \varphi(w) \ : \ v = -\dfrac{c}{w}$

$w = \phi(x) \ : \ w = \dfrac{1}{ax^\theta + bx^\vartheta}$

$\dfrac{t}{p} = \psi(x) = -\dfrac{a\theta x^{\theta-1} + b\vartheta x^{\vartheta-1}}{\left(ax^\theta + bx^\vartheta\right)^2}$

$\theta = 0; \vartheta = 1, 2, 3$

$$z = f(x) \ : \ z = \frac{c\left(a\theta x^{\theta-1} + b\vartheta x^{\vartheta-1}\right)}{ax^\theta + bx^\vartheta}$$

13. $v = \varphi(w) \ : \ v = \dfrac{c}{w}$

$w = \phi(x) \ : \ w = \dfrac{dx^\zeta + ex^\eta}{ax^\theta + bx^\vartheta}$

$\dfrac{t}{p} = \psi(x) = \dfrac{\left(ax^\theta + bx^\vartheta\right)\left(d\zeta x^{\zeta-1} + e\eta x^{\eta-1}\right) - \left(dx^\zeta + ex^\eta\right)\left(a\theta x^{\theta-1} + b\vartheta x^{\vartheta-1}\right)}{\left(ax^\theta + bx^\vartheta\right)^2}$

$e = \vartheta = 0; d = 1; \zeta = \theta = 1, 2$

$$z = f(x) \ : \ z = c\left[\frac{d\zeta x^{\zeta-1} + e\eta x^{\eta-1}}{dx^\zeta + ex^\eta} - \frac{a\theta x^{\theta-1} + b\vartheta x^{\vartheta-1}}{ax^\theta + bx^\vartheta}\right]$$

14. $v = \varphi(w) \ : \ v = \dfrac{a}{w}$

$w = \phi(x) \ : \ w = x^\eta \sqrt{\left(bx^\theta + cx^\vartheta\right)^3}$

$\dfrac{t}{p} = \psi(x) = x^{\eta-1}\sqrt{bx^\theta + cx^\vartheta}\left[\eta\left(bx^\theta + cx^\vartheta\right) + \dfrac{3}{2}\left(b\theta x^\theta + c\vartheta x^\vartheta\right)\right]$

$\eta = -6; \theta = 4; \vartheta = 1$
$\eta = -3; \theta = 2; \vartheta = 0, 1$
$\eta = \theta = 0; \vartheta = 1, 2$

$$z = f(x) \ : \ z = a\left[\frac{2\eta\left(bx^\theta + cx^\vartheta\right) + 3\left(b\theta x^\theta + c\vartheta x^\vartheta\right)}{2x\left(bx^\theta + cx^\vartheta\right)}\right]$$

Cinquième partie

Vers la théorie des fluxions

En concluant le chapitre précédent, j'ai observé qu'autant les équations entières en x et q, que les équations entières liant le segment x à un autre segment y décrit par le mouvement q (lorsque elle sont pensées non pas comme des équations exprimant une courbe par rapport à un système de coordonnées cartésiennes, mais comme des expressions d'un lien entre deux segments variables décrits par deux mouvements, dont un supposé unitaire) se présentent sur la scène des recherches mathématiques de Newton, au début de l'automne 1665, comme des objets mathématiques propres essentiellement nouveaux. L'étude de leurs relations ne semble en effet viser la solution d'aucun problème géométrique formulé au préalable. Elle ne concerne que les propriétés d'un algorithme agissant sur des équations entières.

Cet algorithme, que Newton avait introduit quelques jours plus tôt, ne dérivait pourtant que d'une légère modification de l'algorithme des normales et des tangentes, et, s'il avait été référé par ce dernier aux mouvements décrivant deux segments variables liés entre eux par une équation Algébrique entière, il ne devait son apparition qu'à l'usage qu'il était possible d'en faire pour résoudre les problèmes géométriques des normales et des quadratures. Ainsi, à la différence des équations entières en x et q, les équations de premier degré en p et q et le rapport de ces mouvements dont ces équations fournissaient l'expression Algébrique ne se présentaient à Newton que comme des outils convenables pour étudier des courbes et en déterminer les normales et les aires. Si on ne reste qu'aux explications données par Newton dans la note discutée dans la section 7.1, le lien entre ces mouvements et la normale ou l'aire d'une certaine courbe n'était de surcroît garantit que par la nature de l'algorithme que leur avait été rattaché, sans une justification précise portant sur leur nature intrinsèque. Dans cette dernière note, Newton n'avait au fond qu'introduit une terminologie cinématique et des symboles atomiques connectés à cette terminologie — les lettres "p" et "q" — pour parler d'invariants algorithmiques qu'il avait remarqué être à l'œuvre dans la solution qu'il avait apporté quelques mois plus tôt aux problèmes des normales et des quadratures pour des courbes exprimées par des équations Algébriques.

Si on voulait résumer ce que Newton fit d'essentiel au début de l'automne 1665, on devrait donc dire ceci : il comprit le rôle crucial joué dans cette solution par un algorithme linéaire, portant d'un monôme $ax^n y^m$ au binôme $anx^{n-1}y^m + amx^n y^{m-1}$, et par la transformation inverse, portant d'une expression Algébrique donnée à une autre expression Algébrique dont celle-ci dérive par l'application de cet algorithme linéaire ; il introduisit une terminologie et des symboles aptes à une reformulation de cette solution comme une simple application de cet algorithme et des règles codifiant cette transformation inverse ; il formula et aborda un problème d'une genre nouveau, concernant l'étude, indépendamment de chaque application géométrique possible, des relations entre des équations dérivées les unes des autres grâce à une application de cet algorithme.

Il restait à comprendre s'il était possible de libérer le langage cinématique des mouvements décrivant des segments du formalisme qu'il avait servi à dénommer, pour le référer à des objets autonomes de ce formalisme, dont on aurait pu démontrer *a posteriori* que ce formalisme était à même d'exprimer les relations. Si de surcroît on aurait su montrer, sans se réclamer de ce formalisme, comment et pourquoi la considération de ces objets pouvait conduire à résoudre les problèmes des normales et des quadratures de toute sorte de courbes, alors on aurait aussi fourni une assise nouvelle pour la géométrie et ouvert la perspective d'une nouvelle théorie mathématique. De cette manière, on serait même parvenu à séparer de manière plus nette les problèmes géométriques abordés et résolus au sein de cette théorie — conçus par leur nature intrinsèque de problèmes géométriques — et le formalisme que, sous certaines conditions, et dans le cadre de la géométrie cartésienne, pouvait être employé pour exprimer ou trouver cette solution. La nouveauté et le pouvoir de la géométrie cartésienne et de son Algèbre auraient ainsi pu être comprises sous une nouvelle lumière — apte à en éclairer les limites et à en tracer correctement les frontières —, en dépassant la confusion heureuse, mais quelques fois fourvoyant, entre les courbes et leurs équations, qui l'avait accompagnée dès son origine, pour saisir plus en profondeur les liens existant entre ces deux objets intrinsèquement distincts, et assigner une place, à l'intérieur de la géométrie, aux courbes mécaniques, que Descartes avait en revanche expulsé de sa théorie. Cela aurait enfin permis de penser et étudier les équations, et le lien qu'elles expriment entre des variables, comme des objets autonomes de la géométrie, que la géométrie ne fait, à l'occasion, qu'employer pour des buts à elle, et de parvenir ainsi à envisager la possibilité et l'exigence d'une autre théorie nouvelle : l'*analyse*.

Il serait certes impropre de soutenir que dans l'automne 1665 Newton conçut ce programme dans son ensemble comme un projet de recherche. L'historien peut néanmoins constater *a posteriori* que ce fut justement ce programme qu'il réalisa, d'abord entre l'automne 1665 et l'automne 1666, et ensuite plus tard avec la rédaction du *De analysi* et du *De methodis*. Les chapitres qui suivent et terminent ma dissertation ont le but de formuler ce constat.

D'abord, dans les chapitres 8-11, constituant la cinquième partie de cette dissertation, je tracerait le parcours suivit par Newton entre l'automne 1665 et l'automne 1666, aboutissant à la rédaction d'un traité de géométrie habituellement connu comme le *Traité d'octobre 1666*. Ensuite, dans le chapitre 12, constituant ma conclusion, je montrerai comment Newton parvint enfin à dégager la perspective d'une théorie des équations et des expressions des variables, en montrant la voie de l'*analyse*.

* * *

Bien qu'il en fit jamais explicitement mention, on ne peut guère douter qu'avant la fin du mois d'octobre 1665, ou plus probablement autour de cette date, Newton vint à connaissance, directement ou indirectement, de la méthode des tangentes de Roberval. Il s'en inspira en fait largement dans deux notes, rédigées probablement le 30 octobre et le 8 novembre 1665, pour montrer comment il est possible d'employer les mouvements, ou, pour être plus précis, leur composition, pour construire la tangente de quelques courbes.

Dans ces deux notes, Newton insiste en particulier sur la possibilité d'appliquer sa méthode à la recherche des tangentes des courbes mécaniques[56]. Il ne fait qu'observer, presque en passant[57], que cette méthode s'applique aussi à des courbes géométriques. Ce sera quelques jours plus tard, dans une nouvelle note, rédigée le 13 novembre 1665, qu'il montrera comment on peut l'appliquer pour justifier l'usage de l'algorithme exprimé par l'égalité (7.7) dans la recherche des tangentes de n'importe quelle courbe exprimée, par rapport à un certain système de coordonnées cartésiennes, par une équation Algébrique.

Cette grande généralité de la méthode que Newton élabore en partant des suggestions de Roberval dépend du fait qu'en accord à cette méthode une courbe est pensée comme la trajectoire d'un mouvement résultant de la composition de deux mouvements plus simples, qui décrivent à leur tour des courbes dont on suppose connaître au préalable la tangente. Une courbe exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes, par une équation Algébrique peut en effet être pensée comme la trajectoire du mouvement composé par les deux mouvements rectilignes qui décrivent ses coordonnées. Pour en trouver la tangente, il n'y a alors qu'à chercher, à partir de l'équation de cette courbe, le rapport entre les vitesses ponctuelles de ces mouvements, et il n'est pas difficile de montrer que ceci peut être fait à l'aide de l'algorithme exprimé par l'égalité (7.7). C'est justement ce que Newton montre dans la note du 13 novembre. Mais il y a aussi d'autres manières de définir une courbe comme la trajectoire d'un mouvement composé qui ne relèvent pas de coordonnées cartésiennes ou d'équations Algébriques. Nombreuses courbes mécaniques, telles la spirale ou la quadratrice, se laissent tout naturellement définir de cette manière. Leur tangente peut donc être également trouvée à l'aide de cette même méthode. C'est sur ce point que Newton insiste dans ses notes du 30 octobre et du 8 novembre.

Ces deux dernières notes feront l'objet du chapitre 8. Pour permettre de mieux comprendre les acquis de Newton, il m'a paru nécessaire de faire précéder la discussion de ces notes par une présentation de la méthode des tangentes de Roberval et de ses difficultés intrinsèques que Newton parviendra a résoudre. C'est sur cette présentation qui s'ouvre ce chapitre. La note du 13 novembre fait en revanche l'objet du chapitre 9.

Les notes du 8 et du 13 novembre 1665 trouvent leur place respectivement aux pages 50^{v}-51^{r} et 57^{r}-57^{v} du *Wast Book*. Les six feuillets qui séparent ces deux notes furent probablement laissés d'abord en blanc pour permettre un développement ultérieur de la première de ces notes, et ne furent remplis que plus tard. La deuxième partie de la page 51^{r}, ainsi que la page 51^{v}, contiennent en particulier deux notes que Newton rédigea respectivement le 14 et le 16 mai 1666. Parmi les nombreuses notes mathématiques que Newton nous a laissées, il n'y a aucune qui ait été rédigée entre le 13 novembre et le 14 mai. Dans cette période, il fut probablement attiré, pour l'essentiel de son temps, par des études expérimentales sur la nature de la lumière et de la couleur et par des réflexions sur l'orbite de la lune (qui l'amenèrent ensuite aux théories des couleurs et de la gravitation universelle)[58], et il ne s'intéressa guère aux mathématiques. Et il continua à s'en désintéresser ensuite, jusqu'au mois d'octobre successif, lorsqu'il commença la rédaction du *Traité d'octobre 1666* (qu'il ne conclut probablement qu'au cours du mois suivant[59]). Encore une fois, ce ne fut qu'un

[56]Les deux notes ont un titre, le même dans les deux cas : "How to draw tangents to machanicall lines" [cf. Newton (MP), 1, **2**, 6, § 1, 369 et § 2, 377].

[57]Cf. Newton (MP), 1, **2**, 6, § 1, 372 et § 2, 380.

[58]Cf. Wesfall (1980), 177-216 et Hall (1992), 41-64.

[59]Cf. la note 13 du chapitre 9, et la citation relative.

épisode isolé, car Newton ne retourna à s'occuper de mathématiques que deux ans plus tard.

> L'automne 1665 — nous dit R. Westfall[60] — brilla d'une intense incandescence. Puis, une fois rédigé l'article du 13 novembre, la lumière s'éteignit, aussi soudainement et totalement que si Newton avait soufflé sa chandelle. Six mois passèrent, durant lesquels, si nous nous fions aux documents disponibles, il ne toucha pas aux mathématiques. En mai, son intérêts à nouveau stimulé, il consacra trois jours à l'élaboration de l'idée de mouvement en deux articles séparés, rédigés le 14 et le 16 mai. De nouveau, la lumière s'éteignit, puis de nouveau quelque chose le stimula en octobre, quand il rassembla ses pensées en un essais plus accompli. La lumière s'éteignit une troisième fois. C'était comme si d'avoir réussi à résoudre les problèmes qui s'étaient posés à lui avait épuisé son intérêt pour les mathématiques. Les recherches susceptibles de captiver son attention ne manquaient pas. Mais, à notre connaissance, durant les deux années suivantes, il ne s'occupa guère de mathématiques.

Mais aussi lorsqu'il recommença à s'occuper régulièrement de mathématiques, il ne s'intéressera à la théorie qu'il avait exposée dans le *Traité d'octobre 1666* que de temps à autre, ne visant pour l'essentiel qu'à fournir des reformulations convenables et des reinterprétations de l'ensembles des résultats exposés dans ce traité ou d'une partie de ceux-ci. C'est l'objectif des trois traités qu'on cite d'habitude lorsqu'on veut se référer aux expositions de la théorie des fluxions de la part de Newton lui-même : le *De analysi*, le *De methodis* et le *De quadratura*.

Le deuxième de ces trois traités suit de proche la structure du *Traité d'octobre 1666*, dont il n'est en fait qu'un développement. Ce dernier ne fait à son tour que conduire à terme (sauf que pour quelques détails) le même projet dont relèvent les notes du 14 et du 16 mai : celui justement d'un traité exposant de manière ordonnée la solution de plusieurs problèmes géométriques à l'aide de la théorie de la composition des mouvements, où les principaux résultats obtenus entre 1664 et 1665 aurait du être réunis dans un cadre unitaire. Le chapitre 10 est consacré aux deux notes du 14 et 16 mai 1666. Le chapitre 11 porte sur le *Traité d'octobre 1666*. Je ne viendrai enfin au *De analysi*, au *De methodis* et au *De quadratura* que très rapidement au cours du chapitre 12.

[60]Cf. Westfall (1980), 171.

Chapitre 8

Composition des mouvements et solution du problème des tangentes : la rencontre avec la méthode de Roberval (30 octobre et 8 novembre 1665)

Le parcours qui conduit Newton de son introduction de l'algorithme des mouvements, au début de l'automne 1665, jusqu'à la rédaction du *Traité d'octobre 1666*, tient pour l'essentiel à la reformulation, correction et extension de la méthode des tangentes de Roberval. Une exposition critique de cette méthode est donc nécessaire pour mieux comprendre ce parcours.

8.1 La méthode des tangentes de Roberval

En 1665, la méthode des tangentes de Roberval n'avait pas encore fait l'objet de publication. Elle avait pourtant été conçue par ce dernier une trentaine d'années auparavant et avait été transmise à travers des cours, des lettres, ou des conversations particulières. Roberval l'avait en particulier enseignée entre 1636 et 1644, sans doute en privé, et peut-être aussi au Collège Royal[1]. Ce qui est certain est que parmi les élèves de Roberval figura François de Bonneau, Sieur de Verdus (plus connu sous le nom de "Du Verdus"), un "gentilhomme

[1] Dans sa monographie consacrée à Roberval, L. Auger [cf. Auger (1962), 59] déclare ouvertement que cette méthode fit l'objet d'un cours professé par Roberval au Collège Royale en 1636, tandis que Cantor [cf. Cantor (1880-1908), II, 877] se limite à observer que Roberval présenta publiquement sa méthode "autour de 1636", en s'appuyant sur une déclaration de ce dernier :"Occasio satis fuit, ac propositionem univeralem tangentium inde deductam vulgarimus circa annum 1636 [...]" [cf. Roberval (LT), 445-446]. D'après K. Hara [cf. Hara (1975), 487b] Roberval "enseigna son invention entre 1639 et 1644". Pour des arguments en faveur de cette datation, cf. Hara (1965), 62-81.

bourdelois", qui devint plus tard un membre actif de l'Académie de Montmor[2] et fut un disciple, collaborateur et ami de T. Hobbes[3]. Ce dernier rédigea un compte rendu très détaillé des leçons de son maître, dont le même Roberval se servit en 1668, pour exposer sa méthode devant l'*Académie des Sciences*. Ce fût ce même compte rendu, à peine enrichi de quelques brefs et rares commentaires de la main de Roberval, introduits probablement à l'occasion de cette présentation, qui fût enfin publié, avec d'autres ouvrages de ce dernier, en 1693, 18 ans après sa mort, sous le titre d' "Observations sur la composition des Mouvemens, et sur le moyen de trouver les Touchantes des lignes courbes"[4].

Avant de l'exposer à l'*Académie*, Roberval avait communiqué sa méthode à différents savants. En 1640, il en fit par exemple mention dans une lettre à Fermat[5], plus tard, entre 1646 et 1647, il revint sur la question dans une longue lettre à Torricelli[6], qui ne parvint jamais à son destinataire, mort le 8 novembre 1947, et qui circula probablement au sein du "milieu savant"[7].

Le contenu de la première de ces lettres est symptomatique des préoccupations mathématiques de Roberval. Celui-ci informe son correspondant d'avoir pris connaissance de la méthode des tangentes de ce dernier par l'intermédiaire de Mersenne, et insiste sur la supériorité de cette méthode par rapport à celle de Descartes. D'après Roberval, cette supériorité dépend essentiellement d'une chose : la méthode de Descartes ne peut être rendue "universelle" que grâce à des suggestions qui viennent de la méthode de Fermat ; cette dernière est en revanche "universelle" d'elle-même. Bien qu'il reste difficile de comprendre ce qu'il veut dire exactement, il est clair qu'en parlant d'universalité d'une méthode des tangentes, Roberval se réfère à l'applicabilité de cette méthode à la recherche des tangentes des courbes mécaniques. Voici ce qu'il écrit[8] :

> Je vous diray que j'ay d'autant plus admiré vôtre invention, qu'à peine croyois-je que pour trouver les touchantes des lignes courbes, qui n'ont rapport qu'à d'autres courbes, ou partie à des droites, et partie à des courbes, on peut s'en servir, ce que Monsieur Descartes advoüe de la sienne sur ce sujet de la roulette et autres lignes pareilles, lesquelles pour cette considération, il rejette de la Géométrie, sans raison [...].

C'est justement à ce propos qu'il évoque sa propre méthode : il avoue avoir pensé, avant de connaître la méthode de Fermat, que sa propre méthode était la seule qui aurait pu s'appliquer à la recherche des tangentes de toutes les sortes de courbes, aussi bien géométriques que mécaniques. Sans ajouter guère de précisions, quant à la nature de sa méthode, il se limite à déclarer qu'elle est "tellement différente"[9] de celle de Fermat.

Deux choses ressortent de ce discours : d'abord que Roberval appréciait sa propre méthode parce qu'elle permettait de dépasser la distinction cartésienne entre courbes

[2]Sur l'Académie de Montmor et son rôle dans les discussions scientifiques du XVII$^{\text{ème}}$ siècle français, cf. Brown (1934), ch. III-V.

[3]Cf. Skinner (1966).

[4]Cf. Roberval (1693). Pour des renseignements sur l'histoire du manuscrit, cf. *ibid.*, 67 ("Avertissement").

[5]Cf. Fermat (1679), 165-166 (lettre de Roberval à Fermat, 4 Août 1640).

[6]Cf. Roberval (LT).

[7]Cf. Hara (1965), 37.

[8]Cf. Fermat (1679), 165.

[9]Cf. Fermat (1679), 165.

géométriques et courbes mécaniques, en montrant de ce fait que cette distinction n'était pas essentielle ; ensuite qu'il ne sut pas saisir les liens profonds qui lient cette même méthode à celle de Fermat et les deux à celle de Descartes. Si Newton conviendra implicitement avec Roberval sur le premier point, il le dépassera sur le second : la construction de sa nouvelle théorie des tangentes dépendra en fait d'une synthèse géniale des idées de Descartes, de Fermat et de Roberval.

8.1.1 Composition des mouvements

L'idée clef de la méthode de Roberval — son "principe d'invention", comme l'appelle Du Verdus — est présentée ainsi par ce dernier[10] :

> [...] en toutes les [...] lignes courbes qu'elles puissent estre, leur touchante, en quelque point que ce soit, est le ligne de direction du mouvement qu'a en ce mesme point le mobil qui la décrit. En sorte que composant des mouvemens en diverses façons, et venant à connoistre la direction du mouvement composé en quelque point que ce soit, d'une ligne courbe, nous connoistrons par mesme moyen sa touchante.

Ce "principe" est énoncé au début des "Observations", au cours d'une section qui répond au titre d' "Axiomes". En dépit de son titre, cette section se présente sous une forme discursive ; aucune proposition n'est séparée des autres et signalée de manière particulière. Il est donc difficile de comprendre exactement quels sont les axiomes sur lesquels Roberval prétend fonder sa méthode. S'il y a un axiome dans la déclaration précédente, ceci ne peut être que le suivant :

> La tangente à une courbe décrite par un point mobile, dans n'importe lequel de ses points, est la (droite qui indique la) direction ponctuelle du mouvement de ce point.

Toutefois, ceci ne nous dit pas quelle est cette direction. Habituellement on définit la direction ponctuelle d'un mouvement curviligne comme la tangente à la courbe trajectoire au point considéré. Évidemment, Roberval ne peut pas faire de même, sans transformer son axiome en une tautologie aussi vide qu'inutile. Pour faire de cette proposition un axiome, il faut disposer d'une définition de la direction ponctuelle d'un mouvement curviligne, qui ne se réclame pas de la tangente à la courbe trajectoire ; et pour en faire de surcroît un "principe d'invention", il faut disposer d'une méthode propre à déterminer cette direction, qui ne se fonde pas sur une connaissance préalable de cette tangente. Malheureusement, dans les "Observations" on ne trouve aucune définition générale de la direction ponctuelle d'un mouvement curviligne. Quant à la méthode pour déterminer cette direction, elle n'est présentée qu'à l'aide de plusieurs exemples. La seconde partie de la proposition précédente ne fait qu'indiquer, de manière très rapide et fort confuse, l'idée maîtresse de Roberval. Pour comprendre comment cette idée se traduit dans une méthode mathématique et comment cette méthode peut être justifiée, on ne peut que se rapporter à ces exemples. C'est justement la considération de ces exemples qui suggère le principe suivant, que Du Verdus n'énonce jamais ouvertement :

[10] Cf. Roberval (1693), 70.

> Si un mouvement résulte de la composition de deux autres mouvements dont on connaît la direction ponctuelle, alors la direction ponctuelle de ce premier mouvement résulte de la composition des directions ponctuelles des deux mouvement qui le composent.

Il s'agit évidemment d'une clause récursive très générique qui ne peut conduire à la détermination (et implicitement à une définition) de la direction ponctuelle d'un mouvement curviligne quelconque qu'à la condition de disposer : *i*) d'une classe de mouvements élémentaires, ou "simples"[11], auxquels on peut réduire, par décomposition, tout mouvement donné, et dont on connaît *a priori* la direction ponctuelle, ce qui fournirait la base de la récurrence ; *ii*) d'un principe de composition des directions ponctuelles des mouvements qui composent un mouvement donné.

La méthode de Roberval est manifestement fondée sur la prise en compte de deux sortes de mouvements élémentaires : d'abord, les mouvements rectilignes, dont celui-ci suppose tacitement que la direction est constante et correspond à la droite qui en constitue la trajectoire ; ensuite les mouvements circulaires, dont il suppose[12] que la direction ponctuelle est donnée par la perpendiculaire au rayon du cercle-trajectoire au point considéré (ce qu'on reconnaît a posteriori comme la tangente à ce cercle). Aucun argument général n'est en revanche donné pour assurer que tout mouvement peut être considéré comme étant composé (directement ou par l'intermédiaire d'autres mouvements) par des mouvements rectilignes ou circulaires.

Cette même absence de généralité est encore plus frappante en ce qui concerne le principe de composition des directions ponctuelles. Non seulement, dans les "Observations" on ne trouve nulle part énoncé un principe général dont cette composition relèverait en chaque circonstance. Mais il est même difficile d'extrapoler ce principe de la considération des différents exemples, car Roberval semble à chaque fois procéder *ad hoc*, ou, de toute façon, en suivant des principes particuliers, propres à l'exemple considéré. Si on veut enfin comparer ces différentes procédures avec les vagues déclarations d'ouverture qu'on trouve dans la première partie de l'ouvrage, on est confronté à une difficulté supplémentaire.

C'est que les "Observations" sont de toute évidence l'œuvre d'un mathématicien moins que médiocre et d'un esprit confus. À chaque instant Du Verdus perd le fil essentiel de son discours, pour introduire des éclaircissements inutiles. Il est de surcroît manifestement incapable de la moindre rigueur terminologique, et d'une discipline minime dans l'exposition. Ainsi, même lorsqu'on parvient à reconstruire un fil directeur, en faisant abstraction des détours, on a de la peine à comprendre le parcours argumentatif auquel il répond. Au tout début, on trouve des prétendues "définitions", où il est largement question de notions dynamiques, telles que puissance, force mouvante, impression. Certes, Roberval était bien loin du principe d'inertie, et on peut donc supposer que pour lui les termes "puissance", "force" et "impression" référaient à des causes du mouvement, plutôt qu'à des causes de changement de l'état du mouvement[13]. Mais, toujours est-il que dans la recherche des tangentes, il n'est

[11] Cf. Roberval (1693), 69.

[12] Cf. Roberval (1693), 69-70. Encore une fois, il est difficile de discerner aussi bien le contenu exacte de cette supposition, que sa nature logique : un axiome, une hypothèse, ou un théorème démontré par des moyens élémentaires ou préalables ?

[13] Cf. Roberval (PLM), 112 : "Icy on discutera des causes des mouvemens simples qui sont les principes actifs de la nature dans ses corps differens, soit qu'ils agissent par des causes ordinaires & réglées comme par la pesanteur, ou légèreté [...], soit que ces causes, quoy-qu'ordinaires, ne soient pas réglées, comme l'action

nulle part question, au moins explicitement, de ces causes. Il est d'ailleurs aisé de constater que dans la suite de l'exposition, ces termes disparaissent graduellement[14], pour laisser la place aux termes "mouvement" et "vitesse". Et c'est justement sur les relations entre les notions de vitesse et de mouvement qui porte la question des modalités de la composition des directions ponctuelles lors d'une composition de deux mouvements.

Or, lorsque Roberval parle de vitesse, il ne se réfère tout-au-plus qu'à une grandeur scalaire[15]. Ainsi, s'il est question de vitesse (dans sons sens), lorsqu'il s'agit de passer de la direction ponctuelle de deux mouvements composants à la direction ponctuelle du mouvement composé, ce n'est, pour ainsi dire, que parce que les directions ponctuelles des mouvements composants n'interviennent pas également dans la détermination du mouvement composé, l'influence de la direction de chacun des mouvements composants sur la direction du mouvement composé étant d'autant plus grande que la vitesse de ce mouvement (toujours dans le sens de Roberval) est grande. Si j'emploie ici un langage figuré, voire même métaphorique, c'est en état de cause, car l'usage de ce langage semble suggérer la raison qui peut avoir conduit Du Verdus — et probablement aussi Roberval —, à confondre cinématique et dynamique : la vitesse semble apparaître, en accord avec cette métaphore, comme ce qui confère à une direction ponctuelle une certaine importance, on pourrait même dire, en poussant jusqu'au bout la métaphore : un certain pouvoir, une certaine force.

Cette précision étant faite, revenons aux usages habituels du langage scientifique : lorsqu'il ne s'agira pas de citer ou de paraphraser Du Verdus, je parlerai par la suite de vitesse ponctuelle d'un mouvement au sens aujourd'hui habituel, en me référant à une grandeur vectorielle. En ce sens, il s'agit alors de comprendre comment on peut passer des vitesses ponctuelles — supposées connues — des deux mouvements composants à la vitesse ponctuelle du mouvement composé (ou plus simplement à sa direction). La question est donc celle du principe de composition des vitesses ponctuelles de deux mouvements qui composent un troisième mouvement dont on connaît la trajectoire.

Or, si dans les "Observations", ce principe n'est jamais exposé en général c'est parce que la méthode de Roberval est affectée d'une autre ambiguïté, concernant la notion même de composition de mouvements. En parlant de composition de mouvements, Roberval ne semble pas se référer à une classe bien déterminée de phénomènes cinématique. Il semblerait plutôt qu'il se réfère à des situations vaguement déterminées, caractérisées en général par le fait qu'un certain mouvement peut être pensé comme ce qui résulte de l'interaction de deux autres mouvements simultanés (dont on suppose de connaître les vitesses ponctuelles). Cette ambiguïté est néanmoins l'une des raisons de la puissance intrinsèque de la méthode. Lorsque l'on sait dépasser les difficultés dues à l'imprécision de l'exposition et aux confusions persistant dans la conception de Roberval, on peut retrouver, dans les exemples considérés par ce dernier, des suggestions sur la manière de traiter des situations cinématique différentes — toutes vaguement réductibles à l'idée d'une composition de deux mouvements — et dégager de ce traitement une indication suffisante pour décider de la direction ponctuelle, et donc de la tangente, du mouvement composé. C'est, en dernière instance, ce que Newton saura faire.

* * *

du feu, celle des ressorts, celle des animaux &c.".

[14] Cf. Hara (1965), 1-10.

[15] Cf. Roberval (1693), 69.

Pour comprendre correctement la méthode de Roberval et les acquis de Newton, il faut donc distinguer entre eux les différents phénomènes mécaniques que Roberval semble assimiler à des exemples de composition de mouvements.

D'abord, il me semble nécessaire de distinguer entre ce que l'on pourrait qualifier de "composition globale de deux mouvements" et ce que l'on qualifiera de "composition en chaque point de deux vitesses ponctuelles". On dira que le mouvement d'un point M, par rapport à un repère Φ, est "globalement composé" par deux mouvements, dans l'ordre $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, lorsque M se meut du mouvement $\mathcal{M}_1$ par rapport à un repère Ψ, qui se meut à son tour du mouvement $\mathcal{M}_2$ par rapport au repère Φ. On dira par contre que le mouvement d'un point M, par rapport à un repère Φ, est "composé en chaque point" des vitesses ponctuelles $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, lorsque, en chaque point de sa trajectoire, la vitesse ponctuelle de M est composée par les vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, évaluées par rapport au repère Φ.

Cette distinction préliminaire étant faite, considérons séparément les deux cas, en nous limitant, pour plus de simplicité, au cas d'un mouvement ayant lieu sur un plan (qui est d'ailleurs le seul qui tient à la méthode des tangentes de Roberval). On pourra alors imaginer les deux repères Φ et Ψ comme deux plans superposés l'un à l'autre, sur lesquels on a fixé un système de référence (par exemple un système de coordonnées).

Imaginons d'abord que le mouvement d'un point M par rapport au repère Φ soit globalement composé par deux mouvements $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, dont le deuxième est rectiligne. C'est le cas, par exemple, du mouvement qui engendre une cycloïde en tant qu'il est défini comme le mouvement d'un point d'une circonférence qui roule sur un axe fixe sans glissement (mais ce n'est pas le cas du mouvement qui engendre une spirale en tant qu'il est défini comme le mouvement d'un point qui décrit une droite sur un plan tournant, car le mouvement qui décrit cette droite n'est rectiligne par rapport à un plan Ψ qu'à la condition que ce plan tourne par rapport au plan Φ dans lequel la spirale est décrite). Naturellement, on peut décrire un tel mouvement comme étant le résultat de la composition, en chaque point de la trajectoire de M, des deux vitesses ponctuelles $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ des deux mouvements $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Cependant, si on décrit ainsi ce mouvement, sans remarquer que $\mathbf{v}_2$ est la vitesse ponctuelle d'un mouvement rectiligne qui est une composante de ce mouvement au sens d'une composition globale, on passe sous silence la propriété essentielle du phénomène mécanique que l'on veut décrire. C'est exactement parce que ce phénomène possède cette propriété qu'il est facile dans ce cas d'appliquer la méthode de Roberval. Cette propriété peut en effet être décrite ainsi : il suffit de connaître les vitesses ponctuelles des mouvements $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, de les représenter par deux vecteurs, et de composer ces derniers selon la règle du parallélogramme, pour trouver un troisième vecteur dont la direction est celle de la tangente à la trajectoire de M. L'idée de Roberval a donc, dans ce cas, une réalisation facile et donne lieu à une méthode simple et sûr, qu'on peut appliquer par exemple à la recherche de la tangente de toute sorte de cycloïde[16].

Imaginons maintenant que le mouvement d'un point M soit globalement composé par deux mouvements $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, dont le deuxième n'est pas rectiligne. Le cas le plus simple que l'on puisse imaginer est celui du mouvement qui engendre une spirale, par exemple la spirale d'Archimède. Le mouvement $\mathcal{M}_1$ est dans ce cas un mouvement rectiligne uniforme

[16] En s'adressant à Torricelli [cf. Roberval (LT), 445-446], Roberval avoue être parvenu à la conception de sa méthode au cours de ses recherches sur la cycloïde. Celle-ci est en effet la seule courbe, parmi celles qu'il considère et qu'on peut définir aisément, à laquelle cette méthode s'applique en toute simplicité, et pour des raisons intrinsèques, dans la forme qu'on vient d'indiquer. Ce point sera éclairci par la suite.

et le mouvement $\mathcal{M}_2$ un mouvement circulaire uniforme. Naturellement, ce mouvement peut aussi être décrit comme étant le résultat de la composition, en chaque point de la trajectoire de M, des deux vitesses ponctuelles $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ des deux mouvements $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Si on adoptait cette description on pourrait poursuivre en observant que $\mathbf{v}_2$ est la vitesse ponctuelle d'un mouvement qui est une composante de ce mouvement au sens d'une composition globale. Mais, comme ce dernier mouvement n'est pas rectiligne, cette précision n'entraîne aucune conséquence du point de vue de l'applicabilité de la méthode de Roberval. En effet, ni la direction de $\mathbf{v}_1$, ni celle de $\mathbf{v}_2$ ne sont en général constantes relativement à Φ. Ainsi, cette précision n'ajoute rien à la description du mouvement de M comme étant le résultat de la composition, en chaque point de la trajectoire de M, des deux vitesses ponctuelles quelconques. Il n'y aurait donc pas de gêne à ne pas distinguer ce cas du cas plus général d'un mouvement qui résulte de la composition en chaque point de deux vitesses ponctuelles quelconques.

Ainsi, si on fait abstraction du cas où le mouvement $\mathcal{M}_2$ est rectiligne, tout mouvement que l'on peut décrire comme étant le résultat de la composition globale de deux mouvements $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_2$, peut aussi être décrit, sans aucune perte essentielle d'information, comme étant le résultat de la composition, en chaque point d'une certaine trajectoire, de deux vitesses ponctuelles quelconques. Or, si le mouvement $\mathcal{M}_2$ n'est rectiligne, il n'est nullement certain que les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, qui représentent en chaque point les vitesses dont la composition fournit le mouvement de M, représentent en même temps les composantes de la vitesse ponctuelle du mouvement de M, le long des leurs directions mêmes. Il n'y a donc aucune raison pour penser que la vitesse ponctuelle du mouvement du point M puisse être trouvée en composant ce deux vitesses selon le principe du parallélogramme. Employer ce principe lors d'application de la méthode de Roberval pour déterminer la tangente à la trajectoire d'un mouvement qui ne laisse pas décrire comme étant le résultat de la composition globale de deux mouvements dont le deuxième est rectiligne est donc une erreur. On verra de nombreux exemples de cette erreur plus loin. Et on comprendra aussi pourquoi, dans certains cas, cette erreur peut ne pas conduire à des fausses conclusions.

Avant ceci, il faut considérer plus attentivement le cas où le mouvement d'un point M ne peut pas être conçu comme résultant d'une composition globale de deux mouvements, dont le deuxième est rectiligne. Évidemment, un mouvement étant donné, on peut toujours le penser comme résultant d'une composition en chaque point de deux vitesses ponctuelles $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. Il suffit de décomposer sa vitesse ponctuelle en deux autres vitesses ponctuelles, qu'on nommera à chaque fois "$\mathbf{v}_1$ " et "$\mathbf{v}_2$". Et rien n'empêche de faire en sorte que la direction des ces vitesses, ou du moins de la deuxième d'entre elles, soit constante. Donc, en un sens, tout mouvement peut être conçu comme étant le résultat d'une composition globale de deux mouvements, dont le deuxième est rectiligne. Pourtant, si on procède ainsi, on ne peut connaître les vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ que si l'on connaît *a priori* la vitesse ponctuelle du mouvement composé. Donc, si on cherche donc la tangente de la trajectoire de ce mouvement, cette décomposition est strictement inutile. Du point de vue de la méthode de Roberval, il faut supposer ne pas connaître *a priori* la vitesse ponctuelle du mouvement composé, qui devra au contraire être déterminée à partir d'une connaissance préalable de deux vitesses composantes $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. La définition du mouvement composé, ou du moins sa caractérisation tiendra alors à une définition préalable de ces vitesses. Il s'agit donc de comprendre comment il est possible de définir un mouvement résultant de la composition en chaque point des deux vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, à partir de la définition préalable de ces vitesses.

Trois cas, bien distincts entre eux, semblent possibles.

D'abord, on peut définir le mouvement en question comme étant le résultat de la composition globale de deux mouvements définis au préalable, dont $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont les vitesses ponctuelles. On a déjà distingué deux cas : celui où le deuxième de ces mouvements est rectiligne et celui où ce n'est pas ainsi. C'est ce second cas qui nous intéresse ici. Quelle que soit la nature du deuxième mouvement, il est clair que dans ce cas, les vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont définies comme les vitesses ponctuelles de deux mouvements distincts auxquels le point M — qui est à son tour défini indépendamment de ces mouvements, ou du moins de l'un d'entre eux — est soumis en même temps. L'exemple du mouvement qui décrit une spirale est parlant : on définit d'habitude ce mouvement comme le mouvement d'un point M qui décrit une droite sur un plan tournant ; les vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont alors les vitesses ponctuelles de ce point, en tant qu'il est respectivement censé avancer de manière rectiligne sur un plan et tourner autour d'un point fixe.

Ensuite, on peut définir les vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, comme les vitesses ponctuelles respectives des mouvements de deux courbes rigides qui se meuvent par rapport à un repère fixe, en entraînant de cette manière un mouvement de leur point d'intersection, par rapport à ce même repère. Dans ce sens, on peut encore dire que les vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont des vitesses ponctuelles de ce point d'intersection, qu'on pourra bien identifier avec le point M dont on dit que le mouvement composé est un mouvement. Mais il faudra alors être précis et distinguer entre les mouvements de ce point dont on peut dire que $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont les vitesses ponctuelles et d'autres mouvements qu'on pourra également assigner à ce point, dont ces vitesses ne sont nullement les vitesses ponctuelles. D'abord, on peut dire que ce point se meut respectivement sur l'une et l'autre des deux courbes, de sorte qu'il reste leur point d'intersection. Ensuite, on peut dire qu'il se meut par rapport au repère fixe en tant que point mobile sujet au mouvement composé. Enfin, on peut dire qu'il se meut avec les courbes rigides auxquelles il appartient en restant fixe sur ces courbes[17]. C'est seulement en ce dernier sens, que l'on peut dire qu'il est soumis aux vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, à condition naturellement que les vitesses ponctuelles des deux courbes rigides — qui s'identifient justement par définition avec les vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ — sont évaluées par rapport à ce même point. Il faut alors qu'on dispose d'un moyen pour déterminer les vitesses ponctuelles des deux courbes mobiles rapportées à leur point d'intersection, à partir d'une définition générale des vitesses ponctuelles des mouvements de ces courbes, indépendante de la considération de leur intersection. C'est par exemple ce que l'on fait lorsqu'on définit le mouvement qui décrit une quadratrice comme le mouvement du point d'intersection d'une droite qui descend verticalement le long du côté d'un carré générateur, et d'un rayon vecteur qui tourne autour d'un point fixe, en balayant le quart de cercle inscrit dans ce carré. Les vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont alors les vitesses ponctuelles respectivement de translation et de rotation des ces deux droites, la deuxième étant évaluée à chaque fois au point d'intersection. Le fait que Roberval cherche, et trouve, la tangente de la quadratrice à l'aide de sa méthode montre qu'il était près, comme le sera Newton, à accepter l'idée que le mouvement du point d'intersection de deux courbes rigides mobiles est un mouvement composé.

[17]Cette distinction entre différents mouvements dont on peut dire que le point d'intersection de deux courbes rigides mobiles est soumis sera rendue claire — dans le cas particulier de l'intersection de deux droites qui translatent uniformément — dans la quatrième proposition des "Observations" [cf. ci-dessous, pp. 411-412], et — dans le cas général — par Newton, dans ses notes du 14 et 16 mais 1666 [cf. la section 10.1.3].

Enfin, on peut définir les vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, comme les vitesses ponctuelles de deux mouvements qui engendrent respectivement des grandeurs qui fournissent des coordonnées quelconques, déterminant le point M. Si ces coordonnées sont cartésiennes, ce cas se réduit au précédent, et — les deux courbes rigides étant alors deux droites qui glissent l'une sur l'autre — on peut même décrire le mouvement dont il est question comme un mouvement globalement composé par deux mouvements dont le deuxième est rectiligne. Si les coordonnées sont polaires, ce cas se réduit en revanche au cas d'une composition globale de deux mouvements dont le deuxième est circulaire. Il est pourtant facile d'imaginer d'autres systèmes de coordonnées pour lesquels ce cas ne se réduit à aucun des cas précédents. Le cas le plus simple est celui des coordonnées bipolaires[18]. Un exemple de cette manière de concevoir un mouvement composé qui n'est réductible à aucun des cas précédents est celui du mouvement du point qui engendre une ellipse construite en accord avec la méthode du jardinier. Si dans ce cas, on peut encore parler de mouvement du point d'intersection de deux rayons vecteurs, il faut bien distinguer entre le cas, où les vitesses données $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont les vitesses ponctuelles de rotation de ces rayons — ce qui nous ramène au cas précédent — et celui où ces vitesses sont les vitesses ponctuelle d'augmentation et/ou de diminution de ces rayons — ce qui est typique du cas présent. Dans ce cas, ces vitesses sont des vitesses du point M si et seulement si ce point est défini comme étant respectivement le point générateur des deux coordonnées bipolaires dont il est question.

Or, ce qui est essentiel du point de vue de l'application de la méthode de Roberval est que dans aucun des trois cas précédents, on peut s'assurer *a priori* que les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ représentent en chaque point M de la trajectoire du mouvement composé, les composantes de la vitesse ponctuelle de ce point, évaluées le long des directions respectives de ces mêmes vecteurs, car dans tous ces cas la vitesse ponctuelle du mouvement composé ne dépend pas seulement des vitesses ponctuelles $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ évaluées au point en question, mais aussi de la manière dans laquelle ces vitesses changent en passant d'un point à un autre de la trajectoire de ce mouvement. Pour que ce changement n'ait aucune conséquence sur la vitesse ponctuelle de M — qui ne dépendra alors que de la composition de deux vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ —, il faut que les directions des ces vecteurs soient constamment orthogonales entre elles — comme c'est le cas dans toute spirale ou dans toute conchoïde —, ou que leurs modules soient constamment égaux entre eux — comme c'est le cas dans l'ellipse et dans toute conique, lorsque les vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont définies comme les vitesses de génération des coordonnées bipolaires donnant la distance de chaque point de la conique à deux foyers ou au foyer et à la directrice. Il s'ensuit que dans ces deux cas les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ représentent, en chaque point de la trajectoire du mouvement composé, les composantes de la vitesse ponctuelle de ce mouvement, évaluées le long des directions respectives de ces mêmes vecteurs, et on pourra donc obtenir la vitesse ponctuelle du mouvement composé, en composant les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ selon la règle du parallélogramme. Toutefois, l'usage de cette règle lors de l'application de la méthode de Roberval pour trouver la tangente de la courbe décrite par le mouvement composé ne fournira le résultat correct que pour une raison, pour ainsi dire, contingente. Tout simplement, en procédant ainsi on obtient (grâce à l'orthogonalité des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, ou à l'égalité de leurs modules) le même résultat qu'on obtiendrait en employant une autre règle de composition qui convient en général au

[18] J'utilise pour simplifier le terme "coordonnées bipolaires", pour indiquer deux coordonnées rectilignes données par les distances d'un point à deux points fixes.

cas de composition dont il est à chaque cas question. Pourtant, il est bien clair que cette règle n'est pas la même dans le trois cas que l'on vient de distinguer, ou du moins qu'elle doit être définie différemment cas pour cas. Pour que la méthode de Roberval puisse être exposée en toute généralité et de manière correcte, il faut donc que les différentes modalités de composition que l'on a distinguées soient étudiées séparément et que pour chacune d'elles soit définie une règle convenable de composition des vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$.

* * *

Cette étude n'est accomplie par Roberval que dans le cas de la deuxième de ces trois modalités — celle où le mouvement composé est défini comme le mouvement du point d'intersection de deux courbes rigides qui se meuvent avec deux mouvements dont $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont les vitesses ponctuelles respectives — et sous la seule hypothèse que ces courbes rigides soient des droites. En effet, des treize exemples présentés dans les "Observations"[19], un concerne toute sorte de cyclode[20], trois réfèrent aux trois espèces de coniques[21], six autres concernent des courbes décrites par un mouvement résultant de la composition en chaque point de deux vitesses ponctuelles, dont les directions sont constamment orthogonales[22]. Dans tous ces cas, Roberval obtient directement, et sans aucune explication, la tangente cherchée comme étant la droite qui prolonge la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs des vitesses ponctuelles composantes. Les trois exemples restants[23] concernent enfin des courbes décrites par le point d'intersection de deux droites mobiles, et sont traités à l'aide d'une procédure de composition particulière que Du Verdus expose dans la proposition quatrième des "Observations", sur laquelle on verra dans la suite[24].

Avant de considérer certains de ces exemples plus en détail, il me semble possible d'éclairer ultérieurement la situation, en discutant trois expositions successives de la méthode de Roberval : les deux premières, dues respectivement à Montucla et Monge, sont remarquables du fait des erreurs qu'elles contiennent — dérivant, dans un cas comme dans l'autre, d'une généralisation trop rapide de la méthode qui s'applique à une composition globale de deux mouvements dont le deuxième est rectiligne ; la troisième, due à Duhamel, l'est parce qu'elle se pose ouvertement la question de déterminer les conditions sous lesquelles cette même méthode peut être appliquée sans faute.

Les erreurs de Montucla et Monge

Voici tout d'abord comment Montucla présente, en toute généralité, la "méthode de Roberval", dans son *Histoire des mathématiques*[25] :

[19]Hara nous informe que dans le manuscrit des "Observations" conservé à la Bibliothèque Nationale de Paris (*Fonds français*, 9119), il y a quatorze exemples, avec l'ajout de l'aile de Hobbes [cf. Hara (1965), 35].

[20]Cf. Roberval (1963), *Prop. cinquième*, 11ème ex., 105-108.

[21]Cf. Roberval (1963), *Prop. cinquième*, 1er à 3ème ex., 80-83.

[22]Il s'agit respectivement de la conchoïde supérieure ou conchoïde de Nicomede [cf. Roberval (1963), *Prop. cinquième*, 4ème ex., 83-86], de la conchoïde inférieure [cf. *ibid.*, 5ème ex., 86-87], de la conchoïde générique [cf. *ibid.*, 6ème ex., 87-88], du limaçon de Pascal [cf. *ibid.*, 7ème ex., 88-92], de la spirale d'Archimède [cf. *ibid.*, 8ème ex., 92-96], et de la compagne de la roulette [cf. *ibid.*, 12ème ex., 108-110].

[23]Il s'agit respectivement de la quadratrice [cf. Roberval (1963), *Prop. cinquième*, 9ème ex., 96-100], de la cissoide [cf. *ibid.*, 10ème ex., 101-105], et de la parabole de Descartes [cf. *ibid.*, 13ème ex., 110-111].

[24]Cf. la section 8.1.2, ci-dessous.

[25]Cf. Montucla (1758), II, 39 et (1799-1802), II, 48.

> Puisque le mobile qui décrit une courbe est porté à chacun de ses points, dans une direction qui seroit la tangente, il s'agit de déterminer cette direction ; mais elle est toujours le résultat de deux mouvements. Tout se réduit donc à démêler à chaque point de la courbe le rapport et la direction de ces deux mouvements, par le moyen de quelqu'une de ses propriétés [...].

Et voici maintenait la présentation de Monge, lors de ses leçons aux *Écoles Normales de l'an III*[26] :

> Lorsque, d'après la loi de son mouvement, un point générateur est perpétuellement poussé vers un même point de l'espace, la ligne qu'il parcourt en vertu de cette loi est droite ; mais si, dans chaque instant de son mouvement, il est en même temps poussé vers deux points, la ligne qu'il parcourt, et qui, dans quelques cas particulier peut encore être une droite, est en général une ligne courbe. On aura la tangente à cette courbe en menant par le point de la courbe deux droites, suivant les deux directions différentes du mouvement du point générateur ; en portant sur ces directions, et dans le sens convenable, des parties proportionnelles aux deux vitesses respectives de ce point ; en achevant le parallélogramme, et en menant la diagonale, qui sera la tangente demandée [...].

Montucla laisse les exemples introduire le principe du parallélogramme ; Monge l'introduit en revanche *a priori*, lors la présentation générale de la méthode. Pourtant Montucla et Monge semblent s'accorder sur un précepte qui, comme on l'a vu, est généralement faux : une fois qu'on a déterminé les mouvements desquels se compose le mouvement décrivant une certaine courbe, il suffit de considérer les vecteurs des vitesses ponctuelles de ces mouvements et de leur appliquer le principe du parallélogramme, pour obtenir *ipso facto* la tangente à cette courbe.

Autant Montucla que Monge illustrent d'abord la méthode de Roberval sur l'exemple de l'ellipse, qu'ils supposent être générée selon la méthode du jardinier[27]. C'est un exemple de la troisième des trois modalités de composition en chaque point de deux vitesses ponctuelles que j'ai distinguées ci-dessus. Dans ce cas, les directions des deux vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont données en chaque point par les droites qui joignent ce point aux deux foyers. La somme des distances de chaque point de l'ellipse aux deux foyers étant constante, les modules de ces vitesses seront constamment égaux entre eux. Le vecteur qui résulte de la composition des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ selon le principe du parallélogramme fournit ainsi exactement la direction de la tangente ; et c'est bien de cette manière que Montucla et Monge résolvent le problème. Pourtant, ils n'expliquent guère les raisons géométriques et/ou mécaniques qui justifient cette solution. Ils ne se rendent pas compte non plus que celle-ci ne peut pas être généralisée, et ils ne manquent pas l'un et l'autre de le montrer en ajoutant, à la suite de ce premier exemple fort simple, un autre exemple où la même construction est indûment appliquée.

[26]Cf. Monge (1799), 86-87. Les leçons de Monge aux Écoles Normales de l'an III, ont été récemment publiées, avec celle de Laplace et Lagrange, et aux soins de B. Belhoste et R. Taton, en Dhombres (1992), 269-459 ; la citation est à la page 389.

[27]Cf. respectivement : Montucla (1758), II, 39, et (1799-1802), II, 48 ; et Monge (1799), 86, et Dhombres (1992), 389.

La faute de Montucla[28] est même criante, car elle concerne la quadratrice, une courbe dont Roberval avait déterminé exactement la tangente en appliquant sa méthode correctement[29]. Ayant assigné à chaque point de cette courbe deux vitesses ponctuelles — une verticale, propre au mouvement de descente de la droite qui balaye le carré générateur, et l'autre perpendiculaire au rayon vecteur, propre au mouvement de rotation de ce vecteur —, et ayant correctement déterminé le rapport des modules de ces vitesses, $\frac{2a}{\pi x}$ (a étant le côté du carré générateur et x la distance du point considéré au centre de rotation du rayon vecteur), il en déduit que la tangente est la direction du vecteur qui résulte en composant, selon le principe du parallélogramme, les vecteurs de ces vitesses. Comme on l'a déjà observé ci-dessus, ceci est faux, car ces vitesses ne sont que les vitesses ponctuelles des mouvements des droites mobiles dont le point d'intersection trace la quadratrice, et — comme ces vitesses ne sont ni constamment orthogonales entre elles, ni constamment égales en modules — elles ne coïncident guère avec les composantes de la vitesse ponctuelle du mouvement de ce point le long de leurs directions respectives.

La faute de Monge est plus subtile, même si elle tient en dernière instance, à la même généralisation erronée qui conduit à l'erreur de Montucla. Elle concerne une courbe dans l'espace, décrite par le point d'intersection de deux ellipsoïdes de révolution avec un foyer commun[30]. Monge assigne à chaque point de cette courbe trois vitesses ponctuelles, prises dans les directions de trois rayons vecteurs qui joignent ce point aux trois foyers des ellipses génératrices, il calcule correctement les rapports des modules de ces vitesses, mais il conclut indûment que la diagonale du parallélipipède construit sur les vecteurs de ces vitesses est la tangente cherchée. Or, dans ce cas aussi, ces dernières vitesses ne coïncident pas avec les composants de la vitesse ponctuelle du mouvement qui engendre la courbe considérée, le long de leurs directions respectives ; la diagonale de ce parallélogramme ne coïncide donc guère avec cette tangente.

Les conditions de Duhamel

Choqué par les erreurs de Montucla et de Monge, quelques dizaines d'années plus tard un autre mathématicien professionnel revient sur la question de la méthode de Roberval. Bien que d'une envergure sans doute moindre que celle de Monge, ce mathématicien n'est pas quelconque ; il s'agit de J.-M.-C. Duhamel, qui fut professeur d'analyse et mécanique à l'École Polytechnique, à la Sorbonne et à l'École Normale Supérieure.

Le mémoire de Duhamel[31] éclaircit certains aspects mathématiques de la question. Mais il s'avère aussi que son auteur n'a pas lu attentivement les "Observations", car il semble prêter à Roberval le faux précepte général dont dérivent les erreurs de Montucla et de Monge. Il affirme[32] même que, tout en étant fondé sur un "principe incontestable", tel celui de la composition des vitesses, la méthode de Roberval "a donné des règles fausses pour

[28] Cf. Montucla (1758), II, 40, note (a), et (1799-1802), note D au I$^{\text{er}}$ livre de la VI$^{\text{ème}}$ partie, II, 109-110, en particulier 110. En réalité, avant d'en venir à cette note, Montucla trouve aussi le moyen [cf. Montucla (1758), II, 39, et (1799-1802), II, 49] d'évoquer une fausse construction pour la tangente d'une courbe quelconque déterminée par la distance de ses points de deux points fixes.

[29] Cf. Roberval (1693), *Prop. cinquième*, 9$^{\text{ème}}$ ex., 96-100.

[30] Cf. Monge (1799), 87 et Dhombres (1992), 390.

[31] Cf. Duhamel (1838).

[32] Cf. Duhamel (1838), 257.

la détermination des tangentes aux courbes engendrées par des rayons vecteurs dirigés vers des centres fixes".

L'argument de Duhamel, visant à démasquer les prétendues erreurs de Roberval, est simple et a l'avantage d'amener à des conclusions claires. Cependant, il est en deçà de la possibilité de fournir des explications historiques. Ce n'est qu'un argument *a posteriori*, et de surcroît, il ne concerne qu'un seul cas parmi les différents cas de composition de mouvements que l'on a distingué ci-dessus. Duhamel considère d'emblée des courbes dans l'espace, dont les points sont déterminés en fonction de leurs distances à des points, et il suppose que ces distances sont générées par trois mouvements dont on connaît les vitesses ponctuelles respectives. Il adapte en suite ses conclusions au cas des courbes référées à des coordonnées cartésiennes. Il emploie un simple raisonnement qu'on qualifierait aujourd'hui de géométrie différentiel, pour déterminer une condition certaine qui lie la tangente de ces courbes aux vecteurs de ces vitesses, et se demande ensuite si cette condition est respectée ou non par la construction qu'il prête à Roberval. Il s'agit donc d'un argument qui évalue la méthode étudiée par ses résultats plutôt que par ses raisons.

Pour faire simple, je considère le cas d'une courbe plane IJ, dont le point courant M est déterminé par ses distances $\mathsf{OM} = x$ et $\mathsf{O'M} = y$ à des centres fixes, c'est-à-dire moyennement des coordonnées bipolaires (fig. 1).

Grâce au calcul différentiel, on sait que si dx et dy sont respectivement les accroissements ou décroissements infiniment petits de ces distances, alors la tangente de la courbe considérée au point M passe par le point d'intersection T des perpendiculaires NT et QT à deux segments $\mathsf{MN} = a$ et $\mathsf{MQ} = b$ tirés de M, respectivement dans les directions de OM et $\mathsf{O'M}$, et tels que $\frac{a}{b} = \frac{dx}{dy}$. Soient alors respectivement α et β les angles que les segments MN et MQ forment avec la tangente MT en ce point, et $\gamma = \alpha + \beta$, l'angle que ces segments forment entre eux. En traçant les perpendiculaires à a et b qui se rencontrent sur la tangente en T, on forme alors deux triangles MTN et MQT avec un côté commun MT, pris sur cette tangente. Les égalités trigonométriques

$$\begin{aligned} a &= \mathsf{MN} = [\mathsf{MT}]\cos\alpha \\ b &= \mathsf{MQ} = [\mathsf{MT}]\cos\beta \end{aligned} \tag{8.1}$$

nous fournissent ainsi sur le champ la condition

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \tag{8.2}$$

Construisons maintenant sur les segments MN et MQ le parallélogramme MQLN, et tirons du sommet L de ce parallélogramme deux perpendiculaires LA et LB respectivement aux droites auxquelles appartiennent les segments MN et MQ. Soient alors $\mathsf{L\hat{M}A} = \phi$ et $\mathsf{B\hat{M}L} = \psi$ les angles formés respectivement par la diagonale ML de ce parallélogramme et ces dernières droites (de telle sorte qu'on aura $\phi + \psi = \alpha + \beta = \gamma$). Il sera alors facile, en raisonnant sur les triangles rectangles MAL, MLB, ALN et BQL de tirer l'égalité

$$\frac{\cos\phi}{\cos\psi} = \frac{a + b\cos\gamma}{b + a\cos\gamma} \tag{8.3}$$

Or, la diagonale ML du parallélogramme MQLN est colinéaire à la tangente MT si et seulement si $\phi = \alpha$ et $\psi = \beta$. Compte tenu de la condition $\phi + \psi = \alpha + \beta$, il s'ensuit que la diagonale ML de ce parallélogramme est colinéaire à la tangente MT si et seulement si

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\phi}{\cos\psi} \tag{8.4}$$

En comparant cette égalité avec les égalités (8.2) et (8.3), on obtient sur le champs la condition :

$$(a^2 - b^2)\cos\gamma = 0 \tag{8.5}$$

La diagonale ML du parallélogramme MQLN est donc colinéaire à la tangente MT si et seulement si cette dernière condition est vérifiée. Le principe employé par Montucla et Monge donne ainsi le résultat correct, dans le cas d'une courbe plane dont chaque point est déterminé par deux coordonnées bipolaires, si et seulement si les vecteurs des vitesses ponctuelles des mouvements qui décrivent ces coordonnées sont orthogonaux entre eux (ce qui assure que $\cos\gamma = 0$), ou sont égaux en module (ce qui assure que $a^2 - b^2 = 0$).

On peut arriver à la même conclusion, en suivant un autre argument, que Duhamel ne manque pas d'exposer. Supposons que les coordonnées $\mathsf{OM} = x$ et $\mathsf{O'M} = y$ de la courbe IJ sont des fonctions d'un paramètre t, respectivement $x = x(t)$ et $y = y(t)$. Soient alors (fig. 2) M et $\mathsf{M'}$ deux points de cette courbe dont les coordonnées sont respectivement égales à $(x(t), y(t))$ et $(x(t+dt), y(t+dt))$. Pour construire les vecteurs $\mathbf{v}_{x(t)}$ et $\mathbf{v}_{y(t)}$ des vitesses ponctuelles du point M le long des directions de coordonnées $\mathsf{OM} = x(t)$ et $\mathsf{O'M} = y(t)$, il suffit de tirer de $\mathsf{M'}$ les droites $\mathsf{M'X}$ et $\mathsf{M'}$ Y respectivement parallèles à $\mathsf{O'M}$ et OM. Si X et Y sont respectivement les points où ces droites rencontrent les droites auxquelles appartiennent les segments $x(t)$ et $y(t)$, les segments MX et MY fournissent les modules de ces vecteurs. Soient alors respectivement $v_{x(t)}$ et $v_{y(t)}$ ces derniers segments. Si γ est, comme ci-dessus, l'angle formé par les deux coordonnées $x(t)$ et $y(t)$, il ne sera pas difficile, par un argument typique en géométrie différentielle de conclure que

$$\begin{aligned} v_{x(t)} &= dx_t - v_{y(t)}\cos\gamma \\ v_{y(t)} &= dy_t - v_{x(t)}\cos\gamma \end{aligned} \tag{8.6}$$

Il s'ensuit que les modules des composants de la vitesse ponctuelle du mouvement du point M qui engendre la courbe, pris le long des directions des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ — c'est-à-dire les segments $v_{x(t)}$ et $v_{y(t)}$ — sont entre eux comme les différentiels dx_t et dy_t des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ si et seulement si

$$\frac{dx_t - v_{y(t)}\cos\gamma}{dy_t - v_{x(t)}\cos\gamma} = \frac{dx_t}{dy_t} \tag{8.7}$$

ce qui a lieu en général si et seulement si l'angle γ est droit — c'est-à-dire que ces coordonnées sont orthogonales —, ou

$$\left[v_{x(t)}\right] dx_t = \left[v_{y(t)}\right] dy_t \tag{8.8}$$

— c'est-à-dire que $v_{x(t)} = v_{y(t)}$.

Si ce deuxième argument de Duhamel porte sur des considérations différentielles essentiellement étrangères aux conceptions mathématiques de Roberval et de ses contemporains, le premier se fonde sur un principe que — abstraction faite du langage vectoriel — ceux-ci aurait pu formuler, par exemple ainsi : si on suppose qu'une courbe est générée par un mouvement qui résulte de la composition en chaque point des vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ de deux mouvements qui engendrent à leur tour les coordonnées bipolaires auxquelles cette courbe est référée, alors le segment qui représente la vitesse ponctuelle du mouvement qui engendre cette courbe joint chaque point de celle-ci au point d'intersection des deux perpendiculaires à des segments proportionnels à $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ tirées de ce même point, le long des directions ce ses coordonnées. Ce principe ne dérive que d'une analyse du phénomène mécanique considéré, et peut être justifié par un argument assez simple fondé sur la possibilité de représenter des arcs de cercles infiniment petits par des perpendiculaires aux rayons de ces cercles.

8.1.2 Quelques exemples de la méthode : comment faut-il décomposer les mouvements générateurs

Les conclusions de Duhamel confirment par le calcul, et relativement au seul cas de composition des mouvements auquel elles se réfèrent, les conclusions auxquelles on était parvenu ci-dessus en général, en n'employant que des considérations mécaniques purement qualitatives. La nature mathématique du problème dont relève en général la méthode des tangentes de Roberval devrait donc être désormais claire. Il s'agit maintenant de considérer de plus près la présentation faite de cette méthode dans les "Observations", ce qui d'ailleurs ne tient, pour l'essentiel, qu'à l'exposition de quelques exemples.

Après les sections consacrées aux définitions et aux axiomes, dont on a rapporté ci-dessus l'essentiel, viennent dans ce texte quatre propositions qui devrait servir à fournir les outils de la méthode. Énoncées, pour plus de simplicité et précisions, dans le langage qu'on a introduit ci-dessus, les trois premières de ces propositions[33] affirment respectivement : que deux mouvements rectilignes uniformes peuvent être globalement composés à l'aide du principe du parallélogramme ; que tout mouvement globalement composé par des mouvements rectilignes uniformes est à son tour rectiligne et uniforme ; et que tout mouvement rectiligne peut être conçu comme étant globalement composé d'une infinité de manière par deux autres mouvements, rectilignes ou non. La quatrième[34] affirme en revanche que le mouvement du point d'intersection de deux droites qui translatent sur un plan en se coupant sous un angle quelconque n'est pas globalement composé par les seuls mouvements rectilignes de ces deux droites, mais aussi par deux autres mouvements rectilignes qui sont à leur tour déterminés. Roberval introduit cette proposition pour traiter des courbes, telles que la quadratrice, la cissoide et la parabole de Descartes, décrites par le mouvement du point d'intersection de deux droites mobiles. Néanmoins, lors de sa présentation devant l'*Académie des Sciences*, il ajoute en marge de cette proposition le commentaire suivant[35] :

> Toute cette proposition est mal digérée, et il vaut mieux la passer que de s'y arrêter.

On va suivre pour l'instant ce conseil, et renvoyant à plus tard[36] la considération de cette proposition.

Il ne reste alors que la cinquième proposition[37] qui énonce le problème auquel s'attache

---

[33] Cf. Roberval (1693), *Prop. première*, 70-72, *Prop. seconde*, 72-76, et *Prop. troisième*, 76-78.
[34] Cf. Roberval (1693), *Prop. quatrième*, 78-80.
[35] Cf. Roberval (1963), 78.
[36] Cf. ci-dessous, pp. 411-412.
[37] Cf. Roberval (1963), *Problème I, Prop. cinquième*, 80-111.

la méthode :"donner les tangentes des lignes courbes par les mouvemens mesles"[38]. Avant de venir aux exemples, Du Verdus se limite à énoncer une "règle générale" qui est aussi vague qu'inutile[39] :

> Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) éxaminez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante : de tous ces mouvemens composez en un seul, tirez la ligne direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

Il reste à comprendre comment il faut décomposer les mouvements qui engendrent ces courbes, et comment il faut ensuite composer les vitesses ponctuelles des mouvements composants. Pour comprendre ceci, il ne nous reste plus qu'à considérer les exemples donnés par Du Verdus.

Parmi ces exemples, dix concernent, comme on l'a déjà dit, des courbes auxquelles il est possible d'appliquer sans commettre des erreurs une règle de composition fondée sur le principe du parallélogramme. Je ne considérerais ici que trois de ces exemples, car ce seront les seuls que Newton considérera à son tour.

D'abord l'exemple le plus simple, celui de l'ellipse[40].

Roberval suppose le mouvement générateur de l'ellipse comme étant composé en chaque point des vitesses ponctuelles par lesquelles les deux rayons vecteurs qui joignent ce point aux deux foyers croissent ou décroissent. Soit alors M (fig. 3) un point quelconque de l'ellipse et $\mathsf{F}_1\mathsf{M} = x$ et $\mathsf{F}_2\mathsf{M} = y$ ces rayons vecteurs. Comme les deux vitesses ponctuelles par lesquelles ces rayons vecteurs croissent ou décroissent sont nécessairement égales en module, elles peuvent être représentées par deux segments égaux MN et MQ respectivement colinéaires à $\mathsf{F}_1\mathsf{M}$ et $\mathsf{F}_2\mathsf{M}$, et pris des deux côtés opposés de M par rapport aux foyers. Les considérations précédentes nous assurent alors que la diagonale du parallélogramme MQTN construit sur ces segments est la tangente cherchée. Tout en évitant de construire ce parallélogramme, Roberval parvient à une conclusion équivalente, en prescrivant de prolonger l'un des deux rayons vecteurs et de construire cette tangente comme étant la bissectrice de l'angle ainsi formé entre ce prolongement et l'autre rayon vecteur. C'est une construction fort simple et exacte qui — comme l'observe Roberval et comme les considérations précédentes nous assurent — s'applique aussi à toute autre conique. Simplement, dans les "Observations" on ne trouve aucun argument susceptible de justifier cette construction.

Le deuxième exemple que l'on va considérer est celui de la spirale d'Archimède[41].

Supposons que OMD (fig. 4) est une spirale d'Archimède d'origine O, et que M est l'un quelconque de ses points. Roberval conçoit celle-ci comme étant la trajectoire du mouvement de M résultant de la composition globale d'un mouvement rectiligne uniforme de ce même point le long de la droite OR, à partir de l'origine O, et d'une rotation uniforme de cette droite autour de cette origine. Comme le deuxième de ces mouvements n'est pas rectiligne, il convient de concevoir le mouvement qui engendre la spirale comme résultant de la composition en chaque point de deux vitesses ponctuelles, la première dirigée le long de la direction de la droite OR, et la deuxième dirigée le long de la tangente au point M

[38]Cf. Roberval (1963), 80.
[39]Cf. Roberval (1963), 80.
[40]Cf. Roberval (1963), *Prop. cinquième*, 3$^{\text{ème}}$ ex., 82-83.
[41]Cf.la note (22), ci-dessus.

au cercle de centre O et rayon OM — qui n'est rien d'autre que la perpendiculaire MS à ce rayon. Le module de la première de ces vitesses est par construction constant, tandis que le module de la deuxième varie proportionnellement au rayon OM, car la vitesse angulaire de rotation de ce rayon est constante. En particulier, ce rayon accomplie un tour complet autour de O en même temps que M parcourt, d'un mouvement uniforme sur OR, le segment OD. Dans le langage de Du Verdus[42] : "la raison du mouvement circulaire" de M "au mouvement droit du mesme point" est celle de la circonférence AMB au segment OD. Comme les directions MR et MS sont constamment orthogonales entre elles, il suffit alors de prendre sur ces directions deux segments MQ et MN qui soient entre eux dans cette proportion, construire sur ces segments le rectangle MNTQ, et tracer la diagonale MT de ce rectangle pour obtenir la tangente cherchée.

L'argument de Roberval se laisse reformuler en termes modernes comme il suit. Si la spirale est exprimée paramétriquement par le système linéaire

$$\begin{cases} x = Ht \\ \vartheta = Kt \end{cases} \tag{8.9}$$

où on aura posé $x = \mathsf{OM}$ et $\vartheta = \mathsf{M\hat{O}B}$, H et K étant deux constantes quelconques, on aura, en coordonnées polaires, l'équation

$$x = \frac{H}{K}\vartheta \tag{8.10}$$

Il sera alors facile de vérifier que les composants scalaires des vitesses ponctuelles du point qui engendre la spirale, le long des directions des droites MR et MS, sont respectivement les suivantes :

$$v_{\mathsf{MR}} = H \qquad \text{et} \qquad v_{\mathsf{MS}} = Kx \tag{8.11}$$

En observant que si $\vartheta = 2\pi$, alors $x = \mathsf{OD}$, et en posant $\mathsf{OD} = r$, de l'équation (8.10) on tirera ensuite l'égalité

$$\frac{H}{K} = \frac{r}{2\pi} \tag{8.12}$$

et donc :

$$\frac{v_{\mathsf{MS}}}{v_{\mathsf{MR}}} = \frac{2\pi}{r}x \tag{8.13}$$

Comme les vecteurs de ces vitesses sont constamment orthogonales, il suffit alors de composer par le principe du parallélogramme deux vecteurs dont les modules sont entre eux dans ce rapport pour obtenir le vecteur de la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de la spirale, qui en fournira la tangente. La construction de Roberval est donc exacte, mais, encore une fois, Du Verdus n'en donne aucune justification.

Le troisième exemple que je vais considérer est celui de la cycloïde[43].

Roberval conçoit celle-ci comme étant générée par un mouvement qui résulte de la composition globale d'un mouvement circulaire d'un point et d'un mouvement rectiligne de la circonférence décrite par ce premier mouvement. C'est une composition globale de deux

[42] Cf. Roberval (1693), 93.
[43] Cf. la note (20), ci-dessus.

mouvements dont le deuxième est rectiligne. Il suffit alors de trouver les vecteurs des vitesses ponctuelles de ces mouvements et de les composer, encore une fois, selon le principe du parallélogramme, pour obtenir le vecteur de la vitesse ponctuelle du mouvement composé, ce qui donnera la tangente cherchée. C'est justement ce que fait Roberval. Il suppose que la cycloïde AMBC (fig. 5) est décrite par le point M tournant uniformément le long de la circonférence DLM qui roule sans frottement sur la base AC de sorte que son centre O se meut selon un mouvement rectiligne uniforme le long de la direction HK parallèle à AC, et va de H à K en même temps que M accomplit un tour complet de cette circonférence. Pour trouver la tangente en M, il trace ensuite le segment MQ, parallèle à HK et la tangente QG au cercle FQB (B étant la position à laquelle parvient le point M après un demi-tour de la circonférence), il prend ensuite sur cette tangente un point T, tel que

$$\mathsf{MQ} : \mathsf{QT} = \mathsf{HK} : circ.(\mathsf{DLM}) \tag{8.14}$$

et reconnaît la tangente cherchée dans le segment MT.

En termes modernes, cet argument se laisse reformuler comme il suit. OM étant un rayon constant, il suffit de poser $\mathsf{HO} = x$ et $\mathsf{D\hat{O}M} = \vartheta$ pour parvenir à exprimer paramétriquement la cycloïde AMBC par le système (8.9), H et K étant encore deux constantes quelconques. L'équation (8.10) résultant de ce système exprimera alors cette cycloïde dans les coordonnes x, ϑ, et il sera donc facile de vérifier que les composants scalaires des vitesses ponctuelles du point qui la engendre, le long des directions des droites MR — parallèle à HK — et MS — tangente au cercle DLM en M — sont respectivement les suivantes

$$v_{\mathsf{MR}} = H \qquad \text{et} \qquad v_{\mathsf{MS}} = Kr \tag{8.15}$$

où on aura naturellement posé $\mathsf{OM} = r$. En observant que si $\vartheta = 2\pi$, alors $x = \mathsf{AC}$ et en posant $\mathsf{AC} = s$, de là il s'ensuit l'égalité

$$\frac{H}{K} = \frac{s}{2\pi} \tag{8.16}$$

d'où il sera facile de conclure que :

$$\frac{v_{\mathsf{MS}}}{v_{\mathsf{MR}}} = \frac{2\pi}{s} r \tag{8.17}$$

Comme le mouvement générateur de la cycloïde résulte d'une composition globale de deux mouvements dont le deuxième est rectiligne et que ce dernier est le rapport des vitesses ponctuelles de ces mouvements, il suffira de prendre dans la direction des droites MR et MS deux segments MQ et MN qui sont entre eux dans ce rapport, et de tracer la diagonale du parallélogramme construit sur ces segments pour avoir la tangente cherchée. La construction de Roberval est évidemment équivalente à celle-ci, et elle est donc, encore une fois, exacte, même si le principe du parallélogramme ne s'applique pas ici pour les mêmes raisons par lesquelles il s'applique dans les exemples précédents.

* * *

Si on compare entre elles les trois constructions précédentes, toutes fondées sur ce principe, on peut se demander si, au delà des carences de l'exposition de Du Verdus, Roberval était conscient des différentes raisons qui justifient dans ces trois cas l'application du même principe. La réponse ne peut pas être nette. En fait, s'il est vrai que celui-ci n'applique jamais ce principe lorsqu'il n'aurait pas du l'être, il est aussi vrai que — avec pet-être l'unique exception de la cycloïde[44] — il connaissait *a priori* les tangentes aux courbes considérées dans ses exemples, et il pouvait donc juger de la possibilité d'appliquer ce principe du point de vue du résultat auquel conduit cette application. Mais il y a plus : les trois cas considérés dans les "Observations" où Roberval n'applique pas ce principe — celui de la quadratrice, de la cissoide et de la parabole de Descartes — concernent tous une courbe qui est générée par le point d'intersection de deux courbes rigides soumises à des mouvements rectilignes ou circulaires (deux droites dans les cas de la quadratrice et de la cissoide, et une droite et une parabole ordinaire dans le cas de la parabole de Descartes). On pourrait donc se demander si Roberval ne croyait pas que le principe du parallélogramme s'applique ou non, selon que la courbe considérée est générée par le mouvement d'un point libre ou par le mouvement du point d'intersection de deux courbes rigides mobiles. Quelque soit la réponse qu'on veuille donner à cette question, il n'en reste pas moins est-il que le principe qu'il applique dans ces trois cas dépend de manière explicite du fait que les courbes en question sont générées par le mouvement d'un point d'intersection de deux courbes rigides mobiles.

Pour comprendre l'argument de Roberval, il faut revenir à la proposition quatrième des "Observations"[45]. Si on se limite au cas le plus général, parmi les deux que Du Verdus considère, cette proposition concerne le mouvement du point d'intersection de deux droites qui translatent uniformément.

Soient alors (fig. 6) XY et VW ces deux droites, et M leur point d'intersection. Supposons que la première de ces droites translate uniformément sur une troisième droite AD — de la position AB, jusqu'à la position dR — et que la deuxième translate uniformément sur une quatrième droite AE — de la position AC, jusqu'à la position eS. Considérons d'abord deux points K et H, respectivement pris sur XY et VW, restant fixes sur ces droites. Quand la droite XY est dans la position AB, le point K, est dans la position U (pourvu que $\mathsf{AU} = \mathsf{XK}$) ; quand la droite VW est dans la position AC, le point H est dans la position Z (pourvu que $\mathsf{AZ} = \mathsf{VH}$). Pendant la translation des deux droites auxquelles ils appartiennent, ces deux points décrivent ainsi les droites UK et ZH. Cela rend manifeste qu'un point qui appartient à une de ces droites reste constamment à l'intersection de celle-ci avec l'autre si et seulement s'il translate à son tour sur ces mêmes droites. Pensé comme appartenant aux droites XY et VW, le point M, sera ainsi soumis à cinq mouvements rectilignes uniformes, dont deux dérivent de la translation respective des droites XY et VW — et ont lieu respectivement selon les directions des droites AD et AE —, deux autres consistent dans la translation de ce point sur ces mêmes droites — et ont donc lieu selon les directions constantes de ces droites — et le cinquième — qui a lieu selon la direction de la droite AT — est du à la composition globale de ces quatre mouvements.

Roberval en déduit que les courbes générées par le point d'intersection de deux droites qui translatent uniformément n'est pas (globalement) composé des mouvements de ces courbes, mais aussi d'autres mouvements, pour ainsi dire auxiliaires[46]. Cette conclusion s'étend, *mutatis mutandis*, aux courbes décrites par le point d'intersection de deux corbe rigides mobiles, quel que soit leur mouvement. Cela peut se justifier en observant que sur des

[44]Cf. la note (16), ci-dessus, et Hara (1965), 62-81.
[45]Cf. la note (34), ci-dessus.
[46]Hara appelle ces mouvements "régulateurs" : cf. Hara (1965), 86.

intervalles infiniment petits (de temps et/ou d'espace) tout mouvement d'une courbe rigide peut être assimilé au mouvement rectiligne uniforme d'une droite. Il ne reste qu'à observer que lorsqu'on revient à des intervalles finis, on ne se retrouve pas en général avec une composition globale de quatre mouvements, mais avec une composition en chaque point de quatre vitesses ponctuelles. Si on imagine par exemple que les droites XY et VW (ou des courbes rigides dont ces droites sont les tangentes en M) se meuvent, par rapport au même repère, selon deux mouvements dont les vitesses ponctuelles sont données par deux vecteurs représentés par les segments MN et MQ (respectivement parallèles et égaux aux segments Xd et Ve), alors la vitesse ponctuelle du point M d'intersection de ces droites (ou courbes) résultera de la composition de quatre vitesses ponctuelles données respectivement par quatre vecteurs représentés par les segments MN, MQ, MI — parallèle et égal à NW, dc et FT — et MJ — parallèle et égal à QY, eb et GT. En employant le principe du parallélogramme pour composer ces quatre vitesses ponctuelles — et non pas les seules vitesses ponctuelles des droites (ou courbes) mobiles — on obtient la vitesse ponctuelle du mouvement du point d'intersection M, qui sera alors donnée par le vecteur représenté par le segment MT. Pour abréger, au lieu d'appliquer deux fois le principe du parallélogramme pour composer ces quatre vitesses ponctuelles, il suffira alors, pour parvenir au même résultat, de construire le quadrilatère MQTN sur les segments MN et MQ et sur les parallèles à MY et à MW tirées respectivement de N et de Q, et d'en prendre la diagonale. Il est facile de voir que ceci revient en dernière instance à composer deux vitesses ponctuelles — celles des droites (ou courbes) mobiles, données respectivement par les vecteurs représentés par les segments MN et MQ — selon un principe différent de celui du parallélogramme.

C'est exactement le principe que Roberval applique pour trouver la tangente de la quadratrice. Voici son argument[47].

Soit donné un quart de cercle OAB (fig. 7) de centre O et rayon OA, inscrit dans un carré OBCA. Roberval conçoit la quadratrice comme la courbe générée par le mouvement du point M d'intersection d'une droite XY — qui translate uniformément sur le côté AO de ce carré, de la position AC, jusqu'à la position OB — et d'un rayon vecteur OE — qui tourne uniformément autour du centre O, en passant en même temps de la position AO à la position OB[48]. Pris séparément, et considérés comme étant rectilignes et uniformes, ces mouvements conduiraient respectivement, et en même temps, le point M dans la position Q — MQ étant parallèle à AO et perpendiculaire à XY —, et dans la position N — MN étant perpendiculaire à OM, et donc tangente au quart de cercle FMG de centre O et rayon OM, et égal à l'arc MG de ce même quart de cercle. Conformément à la quatrième proposition des "Observations", pour obtenir la tangente cherchée, il faut composer ces mouvements avec deux mouvement auxiliaires qui conduisent le point M respectivement de Q et de N jusqu'à T, NT étant parallèle à OM. La droite MT sera alors la tangente cherchée.

La première partie de l'argument de Roberval se laisse aisément traduire en termes modernes. L'angle $\mathsf{A\hat{X}M}$ étant constamment droit, il suffit de poser $\mathsf{AX} = x$ et $\mathsf{A\hat{O}M} = \vartheta$ pour parvenir à exprimer paramétriquement la quadratrice AMD par le système (8.9), H et K étant à nouveau deux constantes quelconques. L'équation (8.10) exprimera alors cette

[47]Cf la note (23), ci-dessus.

[48]Cette loi de génération étant donnée, il est facile de prolonger la quadratrice en deçà de A et au delà de D, et Roberval considère en effet dans son exemple, un point pris en deçà de A. Sa construction peut pourtant être aisément répétée pour un point M pris entre A et D. Comme Newton considérera un point de la sorte, je présenterai ici la construction de Roberval adaptée à ce cas.

quadratrice dans les coordonnées x, ϑ. En posant $\mathsf{OA} = r$ et $\mathsf{OX} = z = r - x$, cette équation se transforme dans la suivante

$$z = r - \frac{H}{K}\vartheta \tag{8.18}$$

d'où, en observant que $z = 0$ lorsque $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, il est facile de conclure que

$$\frac{H}{K} = \frac{2r}{\pi} \tag{8.19}$$

Comme les composants scalaires des vitesses ponctuelles du point qui engendre la quadratrice le long des directions des droites MR — parallèle à AO — et MS — tangente au cercle FMG en M — sont les suivantes

$$v_{\mathsf{MR}} = H \qquad \text{et} \qquad v_{\mathsf{MS}} = Ky \tag{8.20}$$

où on aura posé $\mathsf{OM} = y$, il s'ensuit que

$$\frac{v_{\mathsf{MS}}}{v_{\mathsf{MR}}} = \frac{2r}{y\pi} \tag{8.21}$$

qui est justement la valeur que Roberval assigne au rapport entre MQ et MN. Pour le vérifier, il suffit d'observer que de l'équation (8.18) et de l'égalité (8.19), il s'ensuit l'équation

$$z = r\left(1 - \frac{2}{\pi}\vartheta\right) \tag{8.22}$$

qui, comparée à la proportion

$$arc(\mathsf{MG}) : \frac{\pi}{2}y = \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) : \frac{\pi}{2} \tag{8.23}$$

donne l'égalité

$$\frac{\mathsf{MQ}}{\mathsf{MN}} = \frac{\mathsf{OX}}{arc(\mathsf{MG})} = \frac{r\left(1 - \frac{2}{\pi}\vartheta\right)}{y\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)} = \frac{2r}{y\pi} \tag{8.24}$$

La deuxième partie de l'argument de Roberval tient en revanche au principe de composition énoncé par la quatrième proposition des “Observations”. En traduisant l'argument qui justifie cette proposition en termes de vitesses ponctuelles, il est facile de vérifier que ce principe est parfaitement correct et qu'il s'applique au cas de la quadratrice. Encore une fois la construction de Roberval est donc exacte, et dans ce cas elle est même justifiée en termes essentiellement corrects.

8.2 Les notes du 30 octobre et du 8 novembre 1665 : de la méthode de Roberval à la construction de la tangente à la courbe logarithmique

Il serait difficile de reconstruire les circonstances dans lesquelles Newton prit connaissance de la méthode des tangentes de Roberval. Peut-être Hobbes l'apprit de Du Verdus, ou de Roberval lui même[49], durant son exil à Paris, et le communiqua ensuite, directement ou indirectement, à Barrow qui en fit part à Newton, ou le cita au cours d'une leçon à laquelle Newton assista. Quoiqu'il en soit, il est peu probable que Newton ait pu disposer du manuscrit des "Observations" ou d'un autre compte-rendu écrit de la méthode. Il est plus vraisemblable qu'il fut seulement informé que des idées maîtresses de Roberval. Ceci est d'autant plus plausible que l'application qu'il fit de cette méthode à la quadratrice[50] montre qu'il n'était pas familier avec la procédure consistante dans l'introduction des mouvements auxiliaires pour étudier les mouvements du point d'intersection de deux courbes.

Les ressemblances entre les arguments de Roberval et ceux que Newton employa, pour parvenir à "tracer les tangents des courbes mécaniques"[51], dans ses notes du 30 octobre et du 8 novembre 1665[52] sont de toute façon si profondes qu'on ne saurait pas les expliquer avec la simple hypothèse d'une coïncidence fortuite.

À coté d'une construction correcte de la tangente de la spirale, et d'une autre construction fausse de la tangente de la quadratrice (où Newton commet la même erreur que commettra bien plus tard Montucla[53]), l'une et l'autre inspirées par la méthode de Roberval, la note du 30 octobre — qui nous est parvenue incomplète, car il manque une partie centrale qu'il n'est pas aisé de reconstruire complètement[54] — contient : deux courtes remarques évoquant la possibilité de réaliser une construction analogue pour la tangente de la cycloïde et de l'ellipse ; la présentation d'une méthode qui, à partir de la donnée de la tangente à une courbe donnée, permet de construire le centre de courbure de cette courbe ; une application de cette méthode au cas de la spirale d'Archimède — au cours de laquelle Newton montre comment il est possible d'étudier cette courbe par des moyens de nature Algébrique, en supposant que sa tangente est connue — ; quelques courtes formules qui semblent annoncer une étude de la courbe logarithmique que Newton abandonne pourtant très rapidement.

Dans la note du 8 novembre, Newton revient sur la plupart des résultats obtenus le 30 octobre, en les exposant de manière plus accomplie et systématique. Après avoir donné à nouveau sa fausse construction de la tangente à la quadratrice, il se rend compte de son erreur et il raye la proposition qui expose cette construction, en la remplaçant par une nouvelle qui présente une construction parfaitement correcte[55]. En clôturant sa note, Newton revient ensuite sur la courbe logarithmique et il accompli un pas décisif : en s'appuyant sur la considération du rapport des mouvements, et en passant par la considération de l'aire de l'hyperbole, il en construit la tangente et l'exprime en termes Algébriques.

C'est cette dernière construction, et les enseignements immédiats qu'il en tire à partir de la note du 13 novembre, qui permettent de comprendre *a posteriori* le rôle essentiel que

[49]Auger nous informe que Hobbes rencontra directement Roberval à Paris en 1642 [cf. Auger (1962), 72].

[50]Cf. ci-dessous, pp. 416 et 423.

[51]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, 369.

[52]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, respectivement § 1, 369-377 et § 2, 377-382. La date de la première note est proposée par Whiteside [cf. *ibid,* § 1, note (1), 369] ; celle de la deuxième est indiquée par Newton lui-même dans le marge de la page 50v du *Waste Book*, où cette note commence [cf. *ibid.* and § 2, note (1), 377].

[53]Cf. la section 8.1.1.

[54]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, note (1), 369.

[55]Il est difficile d'établir la date précise de cette correction. Elle ne devrait pas être postérieur au 13 novembre, date à laquelle Newton rédige une nouvelle note où il renvoie aux constructions exposés dans la note du 8 novembre [cf. la note (36), ci-dessous]. D'un autre côté, le fait que la construction correcte soit exposée au bas de sa note [cf. Newton (MP), I, **2**, 6,§ 2, note (15), 379 et *Plate* III] laisse penser qu'il ait rapporté cette correction ensuite, et de toute façon après avoir terminé de rédiger cette note.

la méthode de Roberval a joué dans l'évolution des idées de Newton. C'est en passant par cette méthode que celui-ci arriva à comprendre que la prise en compte des mouvements pouvait fournir non seulement une solution possible du problème des tangentes, mais aussi la clef d'un traitement des courbes totalement indépendantes de leur éventuelle expression Algébrique.

8.2.1 30 octobre : la rencontre avec la méthode de Roberval et son extension à la recherche du centre de courbure

Parmi les différences entre les arguments employés par Newton dans la note du 30 octobre et ceux, largement analogues, de Roberval, celle qui à première vue peut sembler la plus profonde consiste dans l'absence chez Newton de toute mention des vitesses des mouvements considérés. Certes, dans les "Observations" les rapports entre un mouvement et sa vitesse (ponctuelle) sont loin d'être éclairés, mais il est un fait que Du Verdus emploie largement le terme "vitesse" au cours de son exposition. Newton se limite en revanche à parler des mouvements qui engendrent des courbes et de leurs "déterminations".

> In the description of any Mechanicall line what ever — il écrit au tout début de sa note[56] — there may be found two such motions which compound or make up the motion of the point describing it and by those two motions may the motion of the point bee found [...] whose determinacon is in a tangent [...] to the crooked line.

La "determinacon" (ou, comme Newton écrira plus loin[57], "determin$\overline{\text{acon}}$") est évidemment la détermination ponctuelle du mouvement, sa caractéristique propre au point considéré. Whiteside semble penser[58] qu'il ne s'agit que de sa "direction instantanée", mais il me semble que l'idée de Newton est plus riche. Outre la direction qu'un mouvement suit en un certain point, la détermination de ce mouvement semble en fait concerner la distance qu'il est censé couvrir (en suivant uniformément cette direction) dans un temps déterminé. En termes opérationnels la détermination d'un mouvement correspond donc, au de-là des apparences, à sa vitesse instantanée considérée dans ses composantes directionnelles et scalaires. Il faut néanmoins observer qu'elle apparaît à Newton comme une propriété déterminée du mouvement, une sorte de qualité intensive de ceci, qui varie dans les différents points de sa trajectoire, plutôt que comme une grandeur vectorielle dépendante des variables cinématique qui définiraient ce même mouvement. Cette conception de la vitesse est classique : elle remonte au moins à Oresme et aux mertoniens[59], mais on la retrouve encore chez Galileo[60] et elle ne semble pas étrangère aux vues de Roberval et même de celles de Descartes. Il me semble que la différence entre Newton et Roberval soit, en dernière instance, uniquement terminologique.

[56] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, [1], 369-370.

[57] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, [1], 372.

[58] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, note (3), 370, où Whiteside suggère que Newton emprunte sa terminologie à Descartes et à sa formulation de la "loi d'inertie" dans les *Principes* [cf. Descartes (1644), XXXVII-XL, 54-57].

[59] À propos de Oresme, cf. Clagett (1968). À propos des mertoniens cf., par exemples, Sylla (1971-1972) et (1973).

[60] Cf. sur cette question Giusti (1990), XXIX-XXX et (1993), 39-41, dont j'ai discuté les thèses en Panza (1997*c*).

Le premier des exemples choisis par Newton pour illustrer sa proposition générale est celui de la spirale d'Archimède. Il l'expose en quelques lignes[61], où il présente la même construction proposée par Roberval, en la justifiant par le biais de la proportion

$$m(\mathsf{M} \to \mathsf{R}) : m(\mathsf{M} \to \mathsf{S}) = \mathsf{OM} : arc(\mathsf{BM}) \tag{8.25}$$

où (fig. 4) $m(\mathsf{M} \to \mathsf{R})$ et $m(\mathsf{M} \to \mathsf{S})$ sont les (déterminations ponctuelles des) mouvements du point M, respectivement en direction de R et de S et $arc(\mathsf{BM})$ est l'arc de cercle de centre O et de rayon OM, compris entre B et M. Newton définit d'abord la droite MT, comme étant la diagonale du parallélogramme MNTQ, et il observe ensuite qu'elle est aussi la bissectrice de l'angle $\mathsf{S\hat{M}R}$, ce qui n'est pas sans rappeler l'exposition de Du Verdus[62].

Le deuxième exemple[63] est celui de la quadratrice, et il est encore plus court que le précédent. Newton s'appuie sur la proportion

$$m(\mathsf{M} \to \mathsf{R}) : m(\mathsf{M} \to \mathsf{S}) = \mathsf{AO} : arc(\mathsf{FMG}) \tag{8.26}$$

(fig. 7), pour conclure, de manière fautive, que si on prend, respectivement sur la parallèle MR à AO et sur la tangente MS au quart de cercle FMG, deux points V et W, tels que

$$\mathsf{MV} : \mathsf{MW} = \mathsf{AO} : arc(\mathsf{FMG}) \tag{8.27}$$

alors la diagonale MZ du parallélogramme MVZW construit sur les segments MV et MW, est la tangente cherchée.

* * *

[61] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, [1], 370.

[62] D'après Whiteside [cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, note (5), 371], Newton aurait pris connaissance de la spirale d'Archimède de sa lecture de l'*Opera Mathematica* de Viète. En effet dans la proposition IV du chapitre XIV des *Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber VII* [cf. Viète (OPvS), 347-435, en particulier 390-391], Viète démontre la proposition 18 du traité *Des Spirales* d'Archimède, d'après laquelle la tangente à une spirale d'Archimède au point D (fig. 4) — auquel elle parvient après que la droite génératrice OR à accompli un tour complet autour de O — coupe la perpendiculaire à OD, tirée du point O, à une distance de cette dernière qui est égale à la circonférence de rayon OD. Il est facile de voir que ce même résultat dérive du résultat plus général auquel Newton parvient à l'aide de la méthode de Roberval. La preuve de Viète est, comme celle d'Archimède, par l'absurde et ne contient aucun élément qui aurait pu suggérer à Newton sa construction. Bien que Viète ne la mentionne pas, la proposition 20 du traité *Des Spirales* donne aussi une construction de la tangente à une spirale d'Archimède en un point quelconque. Si on suppose que M est ce point, cette proposition revient à affirmer que si on tire de O une droite perpendiculaire à OM, alors cette droite coupe la tangente au point M en un point F, tel que

$$\mathsf{OF} = arc(\mathsf{ABM})$$

Or, les deux triangles OMF et MNT étant semblables, on a la proportion

$$\mathsf{OF} : \mathsf{OM} = \mathsf{MQ} : \mathsf{MN}$$

et donc, en accord avec la construction de Roberval et Newton,

$$\mathsf{OF} = \frac{2\pi}{r}x^2 = arc(\mathsf{ABM})$$

ce qui montre l'équivalence entre la construction d'Archimède et cette dernière. Aussi dans ce cas, la preuve d'Archimède (que d'ailleurs Newton ignorait probablement) est pourtant par l'absurde et ne donne non plus de suggestions utiles pour justifier *a priori* la construction de Roberval et Newton.

[63] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, [1], 371.

À la suite de ces exemples, et après avoir évoqué la possibilité de réaliser une construction analogue pour la cycloïde et l'ellipse[64], Newton aborde le problème du centre de courbure[65].

Bien qu'il l'applique à une cycloïde, la construction de Newton s'applique à n'importe quelle courbe. Supposons que IMJ (fig. 8) est une courbe quelconque et qu'on est parvenu, de quelque manière que ce soit, à tracer sa tangente MT et sa normale MG. Si on suppose qu'un axe quelconque AH est donné et que l'on associe à chaque position M' que le point M peut prendre sur cette courbe une position G' du pied G de la normale à la courbe en M pris sur cet axe, alors il en résulte que le mouvement de M qui engendre la courbe est associé à un mouvement rectiligne de G sur l'axe AH. Or, lu à rebours, l'argument de Roberval nous dit que la direction ponctuelle du mouvement du point M qui engendre la courbe est donnée par la tangente. La direction ponctuelle du mouvement de G sur l'axe AH ne pourra en revanche être donnée que par ce même axe. Ceci étant posé, supposons encore que la "détermination" (ou vitesse ponctuelle) du mouvement de M qui engendre la courbe est telle que si elle ne changeait pas au cours d'un certain temps, alors au bout de ce même temps le point M se trouverait dans une position T prise sur la tangente. Newton suppose savoir déterminer la position F sur l'axe AH que le point G prendrait, au bout de ce même temps, si la "détermination" (ou vitesse ponctuelle) de son mouvement sur cet axe ne changeait pas non plus[66]. On pourra alors tirer de F la perpendiculaire FL à MT et de G la parallèle GV à MT jusqu'à ce qu'elle rencontre FL. Le point C d'intersection entre la normale MG et la droite TV qui joint les points T et V sera alors le centre de courbure de la courbe IMJ au point M. Le problème de la détermination du centre de courbure se réduit donc au problème de la détermination du point F.

Pour vérifier l'exactitude de cette construction, il suffit d'observer que le point C ainsi construit est le centre instantané de rotation du point M[67]. Il est néanmoins possible que Newton soit arrivé à trouver sa construction sans s'appuyer *a priori* sur la notion de centre instantané de rotation, ou sur quelques notions analogues. Il lui aurait suffit de considérer un point M' si proche de M que la normale à la courbe IMJ prise dans ce point rencontre la normale MG dans ce centre de courbure C. En supposant en effet que cette normale ait été tracé, il aurait pu observer que si F est déterminé comme on l'a dit, alors le point V' d'intersection entre la normale à la courbe au point M' et la parallèle GV à MT est tel que

$$\mathsf{MM}' : \mathsf{GV}' = \mathsf{MT} : \mathsf{GV} \tag{8.28}$$

ce qui assure que la droite TV passe par le point C d'intersection entre les normales en M et en M', c'est-à-dire par le centre de courbure de la courbe au point M.

Après avoir appliqué sa construction à la cycloïde, Newton l'applique à la spirale d'Archimède. Cette application intervient au cours d'un argument plus complexe, qui se présente comme une tentative pour étudier une courbe mécanique, telle la spirale d'Archimède, par

[64] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, [1], 371-372.

[65] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, [1], 372. Comme on l'a déjà dit, la note de Newton nous est parvenue incomplète, ce qui fait que la conclusion de son argument est perdue. La reconstruction de cet argument proposée par Whiteside [cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, note (19), 373] me semble cependant parfaitement plausible, et je vais donc m'y référer.

[66] Newton est naturellement beaucoup moins explicite : "The motion of the point M & its determin$\overline{\text{acon}}$ being this found (& thereby the tangent MT) — il écrit [cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, [1], 372] —. get the motion of some other point in the perpendicular (as of G to L.) [. . .]."

[67] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, note (36), 375.

des moyens de nature Algébrique[68].

Les segments MQ et MN (fig. 4) étant, selon la construction de Roberval, dans le même rapport que le segment OM et la circonférence du cercle ABM, si on suppose que $\mathsf{MQ} = \mathsf{OM}$ et que l'on pose, comme tout-à-l'heure, $\mathsf{OM} = x$ et $\mathsf{OD} = r$, on en tire

$$\mathsf{MN} = \frac{2\pi x^2}{r} \tag{8.29}$$

et, grâce au théorème de Pythagore :

$$\mathsf{MT} = \frac{x}{r}\sqrt{r^2 + 4\pi^2 x^2} \tag{8.30}$$

Or, il est facile de voir que si on trace la droite ON et que l'on tire la perpendiculaire MG à la tangente MT jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite ON, on obtient un triangle OGM semblable au triangle TNM. Si on pose $\mathsf{OG} = y$, on aura ainsi

$$y = \frac{rx}{\sqrt{r^2 + 4\pi^2 x^2}} \tag{8.31}$$

c'est-à-dire :

$$y^2 r^2 + 4\pi^2 x^2 y^2 = r^2 x^2 \tag{8.32}$$

où x et y sont deux coordonnées rectilignes (instantanées), telles que leur origine G et l'angle $\mathsf{M\hat{O}G}$ qui forment entre elles dépendent de la tangente à la spirale au point M, de coordonnées polaires x, ϑ.

Il est facile de voir que d'une telle construction il suit que la sous-normale $sn._x$, relative à l'axe ON et au point M, coïncide avec l'abscisse x. Conformément à la (7.7) et à la (7.8), on aura ainsi l'égalité suivante :

$$x = sn._x = \frac{q}{p} y = \frac{x\left(r^2 - 4\pi^2 y^2\right)}{r^2 + 4\pi^2 x^2} \tag{8.33}$$

Et, comme p et q ne sont rien d'autres que les (déterminations ponctuelles des) mouvements de x et de y, c'est-à-dire les (déterminations ponctuelles des) mouvements du point M et du point G en provenance de O (c'est-à-dire, respectivement en direction de R et de N) on aura :

$$m(\mathsf{M} \leftarrow \mathsf{O}) : m(\mathsf{G} \leftarrow \mathsf{O}) = y\left(r^2 + 4\pi^2 x^2\right) : x\left(r^2 - 4\pi^2 y^2\right) \tag{8.34}$$

où $m(\mathsf{M} \leftarrow \mathsf{O})$ et $m(\mathsf{G} \leftarrow \mathsf{O})$ sont justement les (déterminations ponctuelles des) mouvements du point M et du point G en provenance de O). D'autre part, de la position $\mathsf{MP} = \mathsf{OM} = x$ il s'ensuit, selon l'égalité (8.30),

$$\mathsf{OM} : \mathsf{MT} = r : \sqrt{r^2 + 4\pi^2 x^2} \tag{8.35}$$

ou bien

$$m(\mathsf{M} \leftarrow \mathsf{O}) : m(\mathsf{M} \rightarrow \mathsf{T}) = r : \sqrt{r^2 + 4\pi^2 x^2} \tag{8.36}$$

[68]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, [2], 374-376.

En composant les proportions (8.34) et (8.36), on aura alors la nouvelle proportion

$$m(\mathsf{M} \to \mathsf{T}) : m(\mathsf{G} \leftarrow \mathsf{O}) = y\left(r^2 + 4\pi^2x^2\right)\sqrt{r^2 + 4\pi^2x^2} : rx\left(r^2 - 4\pi^2y^2\right) \tag{8.37}$$

et d'ici, selon l'égalité (8.31) :

$$m(\mathsf{M} \to \mathsf{T}) : m(\mathsf{G} \leftarrow \mathsf{O}) = \left(r^2 + 4\pi^2x^2\right) : \left(r^2 - 4\pi^2y^2\right) \tag{8.38}$$

Donc, si on prend sur la tangente MT un point quelconque Y et qu'on lui associe un point X sur l'axe ON, tel que

$$\mathsf{MY} : \mathsf{GX} = m(\mathsf{M} \to \mathsf{T}) : m(\mathsf{G} \leftarrow \mathsf{O}) = \left(r^2 + 4\pi^2x^2\right) : \left(r^2 - 4\pi^2y^2\right) \tag{8.39}$$

alors le point X, pris sur la parallèle ON à la tangente MT, aura avec le point Y, pris sur cette même tangente, la même relation que, dans la construction précédente du centre de courbure (fig. 8), le point V a avec le point T — car le point G (fig. 4), en se mouvant sur ON, parviendra au point X, en même temps que le point M, en se mouvant sur la tangente MT, parvient au point Y. Le point C d'intersection entre MG et YX sera ainsi le centre de courbure de la spirale au point M.

Or, comme

$$\mathsf{MC} : \mathsf{GC} = \mathsf{MY} : \mathsf{GX} \tag{8.40}$$

la différence $\mathsf{MC} - \mathsf{GC} = \mathsf{MG} = \sqrt{x^2 - y^2}$ sera telle que

$$\mathsf{MC} : \mathsf{MG} = \left(r^2 + 4\pi^2x^2\right) : 4\pi^2\left(x^2 + y^2\right) \tag{8.41}$$

et donc, selon l'égalité (8.31), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathsf{MC} &= \frac{\left(r^2 + 4\pi^2x^2\right)\sqrt{x^2 - y^2}}{4\pi^2\left(x^2 + y^2\right)} \\ &= \frac{\sqrt{\left(r^2 + 4\pi^2x^2\right)^3}}{2\pi r^2 + 8\pi^3x^2} \end{aligned} \tag{8.42}$$

ce qui donne le rayon de courbure de la spirale au point M de coordonnées polaires x, ϑ, en termes de la seule coordonnée x et de la constante r (caractéristique la spirale considérée), et au moyen d'une expression Algébrique.

Bien que ceci semble être le résultat recherché par Newton, ce dernier n'est pas encore satisfait par son argument, et, en clôturant sa note, il cherche une manière de le simplifier. En posant $m(\mathsf{M} \leftarrow \mathsf{O}) = p$, il obtient d'abord, des proportions (8.34) et (8.36) et de l'égalité (8.31), les égalités

$$\begin{aligned} m(\mathsf{G} \leftarrow \mathsf{O}) &= \frac{px\left(r^2 - 4\pi^2y^2\right)}{y\left(r^2 + 4\pi^2x^2\right)} \\ m(\mathsf{M} \to \mathsf{T}) &= \frac{p}{r}\sqrt{r^2 + 4\pi^2x^2} = \frac{px}{y} \end{aligned} \tag{8.43}$$

Si on suppose que le centre de courbure C a déjà été déterminé, on aura ainsi, conformément aux propriétés cinématique de ce centre,

$$\mathsf{MC} : \mathsf{GC} = m(\mathsf{M} \to \mathsf{T}) : m(\mathsf{G} \leftarrow \mathsf{O}) = \frac{px}{y} : \frac{px\left(r^2 - 4\pi^2y^2\right)}{y\left(r^2 + 4\pi^2x^2\right)} \tag{8.44}$$

et donc, en posant $\mathsf{MC} = z$ et, par conséquence, $\mathsf{GC} = z - \mathsf{MG} = z - \sqrt{x^2 - y^2}$:

$$4\pi^2 z \left(x^2 + y^2\right) = \left(r^2 + 4\pi^2 x^2\right) \sqrt{x^2 - y^2} \tag{8.45}$$

d'où l'égalité (8.42) est immédiate.

* * *

En conclusion de sa note, Newton aborde le problème de la recherche de la tangente de la courbe logarithmique[69]. Il s'arrête pourtant rapidement, après avoir écrit quelques formules, et avoir tracé une figure sur laquelle il reviendra ensuite dans sa note du 8 novembre.

* * *

Avant d'en venir à cette note, il me semble nécessaire d'ajouter quelques remarques à la présentation précédente du contenu de la note du 30 octobre.

La considération, parmi les courbes mécaniques, de la spirale d'Archimède, de la quadratrice et de la cycloïde correspond à une logique facile à comprendre : ces trois courbes peuvent être toutes trois définies comme des trajectoires d'un mouvement composé de deux mouvements uniformes — l'un rectiligne et l'autre circulaire — dont les vitesses ponctuelles ont entre elles un rapport qu'il est facile de déterminer. Les modalités de composition de ces mouvements sont pourtant différentes dans les trois cas. Dans un premier temps, Newton n'a probablement pas vu cette différence, et il a cru possible de traiter analoguement ces trois courbes, en composant les vitesses ponctuelles de ces mouvements selon le principe du parallélogramme.

Ceci n'est pourtant qu'un aspect de la note de Newton, qui témoigne de la rencontre de ce dernier avec la méthode de Roberval et de l'assimilation, encore incertaine, de cette méthode. Malgré ces incertitudes, Newton ne se limite pas, une fois de plus, à appliquer ce qu'il vient d'apprendre à la solution de quelques problèmes particuliers. Il comprend d'abord que la méthode de Roberval peut servir là où, en absence d'une expression possible de la courbe à étudier par une équation Algébrique, il n'est pas possible d'appliquer l'algorithme exprimé par l'égalité (7.7), c'est-à-dire dans la recherche de la tangente des courbes mécaniques. Il se rend compte ensuite qu'il est possible d'employer les outils essentiels de la méthode de Roberval — c'est-à-dire la considération des mouvements générateurs de différentes grandeurs géométriques associées à une courbe donnée — pour parvenir à résoudre le problème du centre de courbure, en s'approchant de la notion de centre instantané de rotation. Il saisit enfin la possibilité d'appliquer cette même méthode pour déterminer la tangente des courbes géométriques — et parvenant ainsi à dévoiler un substrat mathématique commun aux courbes géométriques et mécaniques —, il voit, plus en général, la possibilité d'employer la considération des mouvements générateurs à côté des algorithmes Algébriques, et même de l'employer pour étendre le domaine d'application de ces algorithmes au delà du domaine des courbe géométriques.

Certes, son traitement de la spirale d'Archimède est, en tant que tel génial ; il est fondé, en dernière instance, sur une distinction entre aspects locaux et aspects globaux d'un problème géométrique, et il apparaît de ce fait comme une étonnante anticipation des

[69]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, [3], 376.

procédés de la géométrie différentielle. Mais ce qui est encore plus remarquable, du point de vue du développement futur de la théorie des fluxions, est l'usage, que Newton fait au cours de son argument, de la notion de mouvement d'un point le long d'une direction donnée. Comme il est clair, on est désormais loin des fragiles notions cinématique qui avaient accompagné, ne serait-ce que quelques jours plus tôt, l'introduction de l'algorithme des mouvements. Newton a désormais compris qu'il est possible de traiter les mouvements des points comme des entités indépendantes et, en quelque sorte, primaires, totalement libérées, en tant que telles, de toute dimension algorithmique, et prêtes à être employées pour justifier des algorithmes et leur donner une signification géométrique générale. Non seulement, Newton parvient ainsi à voir de manière désormais explicite le rôle du triangle caractéristique, qui réapparaît sous la forme du triangle construit sur les segments représentant les vitesses ponctuelles du point qui engendre une courbe, le long des directions de deux coordonnées. Mais il montre aussi, par sa considération du mouvement du point M le long de la direction de la tangente, avoir saisi la possibilité de faire de ce triangle un représentant local de la courbe. C'est ainsi, la connexion décisive entre comportement local d'une courbe et linéarisation, qui se montre clairement à l'horizon de Newton. Et c'est justement en s'appuyant, au moins implicitement, sur la notion de linéarisation que Newton parvient *de facto* à éliminer de ses méthodes toute référence explicite à des incréments infiniment petits, ou à tout autre grandeur infinitésimale. S'il est difficile de croire que ces grandeurs ont aussi disparues de l'heuristique de Newton, il est vrai que les constructions de celui-ci ne se fondent plus, comme c'était en revanche le cas dans les notes du 20 et 21 mais 1665[70], sur la prise en compte de grandeurs de cette nature. À la base de ces constructions on retrouve plutôt l'idée qu'une propriété locale d'un mouvement — que nous reconnaissons aujourd'hui comme étant sa vitesse ponctuelle — peut être représentée géométriquement par des systèmes de segments parfaitement finis, qui sont entre eux dans un certain rapport. La théorie des fluxions s'annonce ainsi, dès son origine, comme une théorie locale de la variation continue, plutôt que comme une théorie de l'infiniment petit.

8.2.2 8 novembre : la mise en forme des résultats du 30 octobre et la construction de la tangente à la courbe logarithmique

Si la note du 30 octobre avait été écrite sur trois feuillets séparés (dont un est perdu[71]), celle du 8 novembre mérite l' "officialité" du *Wast Book*[72]. L'intention de Newton était évidemment de donner une forme propre et relativement définitive aux résultats, encore fragmentaires, qu'il avait atteint une semaine auparavant. En obtémperance à cette intention, cette dernière note s'ouvre avec l'énoncé du principe du parallélogramme, en tant que règle générale de composition des mouvements, et continue avec une description générale de la méthode de Roberval, qui n'est d'ailleurs, à quelques petits changements près, que celle qui apparaissait déjà dans la note du 30 octobre et que j'ai cité au début de section (8.2.1)[73]. À cela font suite trois exemples — ceux de la spirale d'Archimède, de la cycloïde, et de la quadratrice — et un scolie, où Newton observe que la même méthode peut être appliquée

[70] Cf. les sections 5.5.1 et 5.5.2.
[71] Cf. la note (54), ci-dessus.
[72] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 2, note (1), 377.
[73] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 2, 377. Whiteside [cf. *ibid.*, note (2)] suggère que Newton a tiré le principe du parallélogramme des *Principes* de Descartes [cf. Descartes (1644), XXXII, 50].

aux courbes géométriques, et considère l'exemple de l'ellipse. La note se termine enfin avec la construction de la tangente de la courbe logarithmique et une fausse construction du centre de courbure de la cycloïde.

Quatre exemples d'application de la méthode de Roberval

Parmi les quatre exemples auxquels Newton confie sa nouvelle exposition de la méthode de Roberval, seul celui de la spirale d'Archimède avait été traité correctement et de manière assez complète dans la note du 30 octobre. Il n'est donc pas étonnant que seulement dans ce cas, Newton se limite à répéter la construction exposée dans cette dernière note, bien qu'il ne fasse cette fois aucune mention de la construction découlant de son centre de courbure.

Pour ce qui est de la cycloïde Newton considère d'emblée le cas général dans lequel la base AC (fig. 5) n'est pas nécessairement égale à la circonférence du cercle générateur. Ceci est évidemment possible lorsque la translation de ce cercle n'est pas due — comme en revanche l'avait supposé Roberval, et on le suppose encore habituellement — à sa rotation sans frottement sur une telle base. Pour rendre compte de ce cas général, Newton construit la cycloïde en suivant la suggestion de Descartes[74], qui imagine que le point M qui la engendre est interne ou externe au cercle qui avance sur AC, en tournant sans frottement sur une telle base. Il suppose en particulier que ce point est interne à un tel cercle (fig. 9). Pour trouver la tangente, il se sert de la proportion

$$\mathsf{MN} : \mathsf{MQ} = m(\mathsf{M} \rightarrow \mathsf{S}) : m(\mathsf{M} \rightarrow \mathsf{R}) = \mathsf{OM} : \mathsf{OI} \tag{8.46}$$

et, en prenant $\mathsf{MN} = \mathsf{OM}$, en déduit que la tangente MT est la diagonale du parallélogramme construit sur les segments $\mathsf{MN} = \mathsf{OM}$ et $\mathsf{MQ} = \mathsf{OI}$. Pour rendre évidente l'équivalence entre cette construction et celle de Roberval, il suffit d'observer que la base s sur laquelle le cercle externe accomplit un tour complet en absence de frottement est égale à la circonférence d'un tel cercle, ce qui donne l'égalité $\mathsf{OI} = \frac{s}{2\pi}$, d'où, en posant, comme tout-à-l'heure, $\mathsf{OM} = r$ et en s'appuyant sur la proportion (8.46), on tire l'égalité :

$$\frac{\mathsf{MN}}{\mathsf{MQ}} = \frac{2\pi}{s} r \tag{8.47}$$

qui correspond à l'égalité (8.17). De cette construction, il découle sur le champs, comme Newton ne manque pas de le noter, que la perpendiculaire en M à la tangente MT passe par le point I. Celle-ci est exactement la propriété de la tangente à la cycloïde sur laquelle Descartes avait fondé sa construction de cette tangente[75]. La remarque de Newton indique que celui-ci connaissait cette construction, dont il ne manque pas de tirer une confirmation *a posteriori* de son résultat.

[74]Cf. Descartes (AT), II, 307-313 : lettre à Mersenne du 23 Août 1638. Les arguments que Descartes avance dans cette lettre à propos de la cycloïde sont repris par van Schooten dans son commentaire de la *Géométrie*, où une bonne partie de cette lettre est même citée littéralement [cf. van Schoten (1649), 264-270 ; la citation de la lettre de Descartes figure aux pages 267-270 et elle est même plus large — cf. ci-dessous, p. 433 — que ce que l'indique la formule "Verbo Autoris" que van Schooten ajoute en marge de son commentaire à p. 268]. Celle-ci fut, sans doute, la source de Newton [cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, note (11), 371].

[75]Cf. Descartes (AT), II, 308 ; et van Schoten (1649), 267.

Le troisième exemple proposé par Newton est celui de la quadratrice. Newton répète d'abord la fausse construction de la note du 30 octobre, en observant de surcroît (fig. 7) que[76]

$$\mathsf{AO} : arc(\mathsf{FMG}) = \mathsf{OD} : \mathsf{OM} \tag{8.48}$$

de sorte que

$$\mathsf{MQ} : \mathsf{MN} = m(\mathsf{M} \to \mathsf{R}) : m(\mathsf{M} \to \mathsf{S}) = \mathsf{OD} : \mathsf{OM} \tag{8.49}$$

En ayant posé $\mathsf{MQ} = \mathsf{OD}$, il en conclut que $\mathsf{MN} = \mathsf{OM}$ et que la tangente à la quadratrice au point M est la diagonale du parallélogramme construit sur les segments MQ et MN ainsi déterminés.

Whiteside[77] suggère que Newton ait pris connaissance de la quadratrice des *Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber VII* de Viète, en particulier de la prop. I du chapitre VIII[78]. Néanmoins, on ne trouve chez Viète, aucun résultat concernant la tangente à la quadratrice. Et on n'en trouve pas non plus dans les commentaires ajoutés par van Schooten à la deuxième édition latine de la *Géométrie*. Contrairement que pour les cas de la spirale d'Archimède[79] et de la cycloïde, Newton ne disposait donc pas, pour la quadratrice, de résultats unanimement acceptés concernant la tangente à cette courbe, et il est probable que — ne possédant que des informations assez générales à propos de la méthode de Roberval — il ne connut pas non plus la construction proposée par ce dernier.De ce fait, il ne pouvait pas comparer sa construction avec d'autres, dont il aurait pu supposer qu'elles étaient correctes. Il est probable que, plutôt que de reconnaître son erreur *a posteriori*, en raisonnant sur le résultat de sa construction, Newton ait nourri des doutes *a priori*, à propos de la validité de son argument. Toujours est il qu'après avoir exposé la construction précédente[80], il raie le passage correspondant et en ajoute un nouveau, précédé par l'annotation : "Instead of the third Example reade this"[81], où il expose une construction alternative.

Ce passage déboute avec la remarque suivante[82] :

> Sometimes the tangent may bee found by considering two absolute motions of the describing point [...].

Newton ne fait pourtant aucun effort ni pour expliquer en général quand ceci est nécessaire, ni pour éclairer, toujours en général, la nature des "mouvements absolus". Plus loin, au cours de la présentation de sa construction, il parle aussi, de "mouvement total [*whole motion*]" et de "mouvement absolu et total [*absolute et whole motion*]"[83], mais, dans ces cas aussi, il n'éclaire pas la signification de ces termes. De l'ensemble de l'argument, il

[76]Si, comme ci dessus, on pose $\mathsf{OX} = z$ et $\mathsf{A\hat{O}M} = \vartheta$ on aura $\mathsf{OM} = \frac{z}{\cos\vartheta}$ et donc, conformément à l'équation (8.18) et à l'égalité (8.19) :

$$\mathsf{OD} = \lim_{\vartheta \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{r}{\cos\vartheta}\left(1 - \frac{2}{\pi}\vartheta\right)\right] = 2\frac{r}{\pi}$$

comme le veut aussi, en accord avec la position $\mathsf{AO} = r$, la proportion (8.48).

[77]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 1, note (9), 371.

[78]Cf. Viète (OPvS), 365.

[79]Cf. la note (62), ci-dessus.

[80]Cf. la note (55), ci-dessus.

[81]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 2, 379-380 et note (15), 379.

[82]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 2, 379.

[83]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 2, 380.

semble pourtant qu'en utilisant ces termes Newton veuille indiquer que les composantes du mouvement du point M qui engendre la quadratrice, pris le long des directions des droites MR et MS ne s'identifient pas avec les mouvements respectifs de la droite XY et du rayon OX, pris séparément et évalués au point M. Il semblerait donc que Newton ait comprit ce qu'en termes modernes nous disons ainsi : les vitesses ponctuelles du mouvement qui engendre la quadratrice le long des directions des droites MR et MS ne s'identifient pas respectivement avec la vitesse ponctuelle de translation de la droite XY et la vitesse ponctuelle rectiligne de rotation du rayon OX prise au point M. Comme son exposition est néanmoins loin d'être explicite sur cet aspect crucial, il convient de la reconstruire en détail.

Dans le cas de la quadratrice (fig. 7), il dit, le "mouvement total" de M en direction de R est au "mouvement total" de E en direction de L (EL étant la perpendiculaire au rayon OE en E) comme AO est au quart de circonférence AEB, tandis que le "mouvement total" de E en direction de L est au "mouvement total" de M en direction de S, comme le quart de circonférence AEB est au quart de circonférence FMG, c'est-à-dire comme OE est à OM. Si on note par le symbole "$m_T(\mathsf{H} \to \mathsf{K})$" le mouvement total d'un point H en direction d'un point K, cela revient à poser les proportions :

$$\begin{gathered} m_T(\mathsf{M} \to \mathsf{R}) : m_T(\mathsf{E} \to \mathsf{L}) = \mathsf{AO} : arc(\mathsf{AEB}) \\ m_T(\mathsf{E} \to \mathsf{L}) : m_T(\mathsf{M} \to \mathsf{S}) = arc(\mathsf{AEB}) : arc(\mathsf{FNG}) = \mathsf{OE} : \mathsf{OM} \end{gathered} \tag{8.50}$$

Les "mouvements totaux" dont nous parle Newton ne peuvent donc être rien d'autre que les vitesses ponctuelles des mouvements de translation et de rotation respectivement de la droite XY et du rayon vecteur OE, prises séparément l'une de l'autre et évaluées aux points M et E. En composant ces deux proportions, et en se réclamant de la proportion (8.48), on obtient la proportion

$$m_T(\mathsf{M} \to \mathsf{R}) : m_T(\mathsf{M} \to \mathsf{S}) = \mathsf{AO} : arc(\mathsf{FNG}) = \mathsf{OD} : \mathsf{OM} \tag{8.51}$$

qui n'est donc rien d'autre qu'une réécriture, dans le nouveau langage des "mouvements totaux[84]", de la deuxième des proportions (8.49). Ceci étant posé, Newton prescrit de prendre, comme lors de sa première construction, les segments MQ et MN dans le même rapport que celui des segments OD et OM, mais il observe, cette fois[85], que :

> The point M will bee moved to the lines[s] QT et TN [cette dernière droite étant parallèle à OM] in [the] same time which cannot bee unlesse it move to T (their common intersection).

De là, il en conclut que le point M (en tant qu'il engendre la quadratrice) "se meut sur la ligne MT", qui est donc la tangente cherchée.

C'est évidemment une construction équivalente à celle de Roberval. Si le nouvel argument de Newton ne fait pas intervenir des mouvements auxiliaires, il s'appuie implicitement sur la construction sur laquelle porte la quatrième proposition des "Observations". Le point T n'est en fait que le point de rencontre des droites parallèles aux droites XY et OE, tirées

[84]En énonçant la proportion (8.51), Newton qualifie $m_T(\mathsf{M} \to \mathsf{R})$ de "mouvement absolu et total" de M en direction de R. Il semblerait donc qu'il n'ait pas tranché quant à l'usage des adjectifs "absolu" et "total", et qu'il les utilise sans distinction.

[85]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 2, 380.

des extrêmes Q et N des segments MQ et MN. En observant que le point M se meut "vers les lignes QT et TN dans le même temps", et qu il "ne peut [donc] que se mouvoir vers leur intersection T", Newton semble vouloir dire que ce point est contraint à translater sur les droites mobiles XY et OE pour rester à leur intersection, de sorte qu'il ne pourrait que se trouver — au même moment que ces droites se trouverait respectivement dans les positions des droites QT et NT — au point d'intersection de ces dernières. Newton ne fait ainsi, en dernière instance, que simplifier l'argument de Roberval, en laissant implicite la référence, inutile en termes opérationnels, aux mouvements auxiliaires.

L'exemple de la quadratrice est suivi, comme on l'a déjà dit, par un scolie, où, en se réclamant de l'exemple de l'ellipse, Newton affirme que "les tangentes aux courbes géométriques peuvent être trouvées [...] de la même manière"[86], et il prescrit, pour trouver la tangente de l'ellipse, de prendre (fig. 3) les segments MQ et MN égaux entre eux et de tracer la diagonale du parallélogramme construit sur ces segments. Lorsqu'il corrige sa première construction de la tangente à la quadratrice, il renfermera aussi ce scolie entre crochets, et il renvoie à la construction de cette même tangente exposée dans la note du 13 novembre[87]. Ici Newton prescrira de prendre, aux extrêmes Q et N des deux segments égaux MQ et MN, les perpendiculaires de ces mêmes segments, et de trouver leur point d'intersection et de tracer la droite qui le joint au point M, qui sera justement cette tangente. Il est aisé de voir que cette dernière construction est équivalente à celle exposée dans le scolie de la note du 8 novembre, mais qu'elle n'est pas identique à celle-ci. Si Newton a mis son scolie entre crochets et a renvoyé à cette construction c'est évidement qu'il a compris que la diagonale du parallélogramme construit sur les segments MQ et MN ne fournit la tangente à l'ellipse que parce que ces deux segments sont censés être égaux — bien qu'ils n'expriment, pris séparément, que les "mouvements totaux" des deux points qui engendrent les rayons vecteurs F_2M et F_1M. Il semble donc être implicitement parvenu à la même conclusion à laquelle parviendra Duhamel, presque deux siècles plus tard[88].

La tangente à la courbe logarithmique et le réciproque du théorème de van Heuraet

Avant de parvenir à la pleine compréhension de la situation mécanique sur laquelle porte la méthode de Roberval, Newton avait déjà tiré de cette méthode un enseignement fondamental : il avait saisi la possibilité d'étudier toute courbe, indépendamment de la construction dont elle relève, en la pensant comme la trajectoire d'un certain mouvement qu'il est toujours possible de décomposer convenablement en deux mouvements qui ont lieu dans deux directions fixes et peuvent être conçus comme les mouvements de génération de deux coordonnées cartésiennes, répondant à ces directions, auxquelles la courbe est référée (qu'elle soit ou pas exprimée, par rapport au système de coordonnées ainsi défini, par une certaine équation Algébrique). Il avait donc compris que ce n'est pas parce qu'une courbe est explicitement définie en se réclamant de deux mouvements — comme dans le cas de la spirale, de la cycloïde, de la quadratrice, ou même de l'ellipse, lorsqu'elle est définie selon la construction du jardinier — que sa tangente peut être trouvée par la méthode de Roberval. Quelle que soit la manière dans laquelle une courbe est définie, il est toujours possible de la

[86]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 2, 380.
[87]Cf. le chapitre 9, en particulier, p. 448.
[88]Cf. la section 8.1.1.

penser comme la trajectoire d'un mouvement, et chercher dans sa définition des indications pour décomposer ce mouvement. C'est du moins ce qui ressort du traitement de la courbe logarithmique[89].

Comme il devrait être clair, à la suite de ce qu'on a dit dans la section 8.1.1, on peut entendre une décomposition du mouvement qui engendre une courbe en deux sens distincts. D'abord, on pourrait penser que la courbe dont il est question est générée par un mouvement qu'on est censé décomposer en deux mouvements rectilignes, $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, dont celui-ci résulte grâce à une composition globale. Le premier de ces deux mouvements sera alors conçu comme référé à un repère Ψ et propre à engendrer, par rapport à ce repère, une coordonnée de la courbe. Ce repère sera ensuite pensé comme en mouvement rectiligne par rapport à un autre repère Φ, et ce sera ce deuxième mouvement qui engendre la deuxième coordonnée. Il suffira pour cela de supposer que les deux mouvements n'ont pas lieu dans la même direction. Mais on pourrait aussi penser que cette courbe est engendrée par un mouvement qui résulte de la composition en chaque point de deux vitesses ponctuelles, dont la direction reste partout constante. Ces vitesses pourraient alors être pensées comme les vitesses ponctuelles des mouvements rectilignes de deux droites qui translatent l'une sur l'autre, et le mouvement qui engendre la courbe sera alors conçu comme le mouvement du point d'intersection de ces droites. Or, il est facile de voir que ces deux descriptions ne sont au fond que des descriptions distinctes du même phénomène mécanique. Cela se comprend aisément si on raisonne comme il suit. En obéissant à la règle de composition globale des mouvements, on obtient, dans le premier de ces deux cas, la vitesse ponctuelle du mouvement composé en composant les vitesses ponctuelles des mouvements composants selon le principe du parallélogramme. En obéissant à la règle de composition en chaque point des vitesses ponctuelles de deux courbes mobiles rigides qui, en se mouvant, entraînent le mouvement de leur point d'intersection, on obtient, dans le deuxième de ces deux cas, la vitesse ponctuelle du mouvement composé en composant les vitesses ponctuelles des mouvements composants selon le principe du quadrilatère énoncé dans la quatrième proposition des "Observations". Mais comme la direction du mouvement de chacune de ces droites est donnée par l'autre droite, ce principe se réduira, lui-aussi, au principe du parallélogramme.

Si une courbe donnée est donc référée à un système de coordonnées cartésiennes, alors le principe du parallélogramme constitue une règle de composition des vitesses ponctuelles des mouvements qui engendrent ses deux coordonnées qui est de toute manière suffisante pour déterminer la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de la courbe et, donc, sa tangente. Et, comme ce raisonnement est parfaitement indépendant de la possibilité d'exprimer une telle courbe, par rapport à ce système de coordonnées, par une certaine équation, soit Algébrique soit de toute autre sorte, la conclusion précédente vaut pour toute sorte de courbes, aussi bien géométriques que mécaniques. C'est exactement ce que Newton semble avoir compris. Voici, en effet, ce qu'il écrit, à la suite du scolie consacré à exposer la construction de la tangente de l'ellipse :

> Although the nature of a mechanical line is not knowne from its description but from some other principle yet may a tangent be drawne to it by the same method[90].

Et voici l'exemple que Newton apporte de cette méthode, dont celui de Roberval n'est

[89]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 2, 380-381.
[90]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 2, 380.

désormais qu'un ancêtre.

Soit (fig. 10) IJ une hyperbole rectangle dont les asymptotes sont Dj et Di, et Ee et AH deux axes parallèles à Dj. On suppose que la courbe XY est définie, par rapport au système de coordonnées orthogonales d'axe AH et origine O, par la proportion :

$$\mathsf{OP} : \mathsf{PM} = \mathsf{VKRU} : \mathsf{URFL} \tag{8.52}$$

Il s'agit de trouver la tangente de cette courbe au point M. Newton suppose d'abord que le rectangle VKRU et le trapézoïde URFL croissent dans la proportion de KR et RF, c'est-à-dire qu'il pose la proportion

$$incr(\mathsf{VKRU}) : incr(\mathsf{URFL}) = \mathsf{KR} : \mathsf{RF} \tag{8.53}$$

où $incr(\mathsf{VKRU})$ et $incr(\mathsf{URFL})$ sont respectivement les "incréments [*increasing*]"[91] de VKRU et URFL. De la proportion (8.52), il tire en outre l'autre proportion

$$incr(\mathsf{VKRU}) : incr(\mathsf{URFL}) = incr(\mathsf{OP}) : incr(\mathsf{PM}) \tag{8.54}$$

Il suffit alors de supposer que les incréments des grandeurs géométriques sont entre eux comme les (déterminations ponctuelles des) mouvements qui les produisent pour obtenir la proportion :

$$m(\mathsf{M} \to \mathsf{S}) : m(\mathsf{M} \to \mathsf{R}) = \mathsf{KR} : \mathsf{RF} \tag{8.55}$$

la droite MS étant naturellement orthogonale à l'ordonnée PM et donc parallèle aux axes AH et Ee. Comme on peut supposer que le mouvement qui engendre la courbe XY est composé par les mouvements qui engendrent respectivement ses coordonnées cartésiennes, il s'ensuit que si on prend, respectivement le long des directions MS et MR, deux segments MN et MQ tels que

$$\mathsf{MN} : \mathsf{MQ} = \mathsf{KR} : \mathsf{RF} \tag{8.56}$$

alors la diagonale MT du parallélogramme construit sur ces segments est la tangente cherchée, et si W et G sont respectivement les pieds de cette tangente et de la normale correspondante sur l'axe AH, alors :

$$\mathsf{WP} : \mathsf{PM} = \mathsf{PM} : \mathsf{PG} = \mathsf{MN} : \mathsf{MQ} = \mathsf{KR} : \mathsf{RF} \tag{8.57}$$

De là, Newton en conclut que si on suppose que $\mathsf{VU} = \mathsf{DU} = \mathsf{UL}$, et que l'on prend sur l'axe AE un point Z, tel que $\mathsf{Zs} = \mathsf{DU} = \mathsf{AO} = \mathsf{UL}$, alors la tangente à la courbe XY au point M passe par le point Z.

Il est difficile de surestimer l'importance de ce court argument dans le développement des idées des Newton. Voici comment il peut être reformulé si on rend les sous-entendus explicites.

Soient $\mathsf{DR} = x$ et $\mathsf{RF} = z$ les coordonnées cartésiennes orthogonales d'un point F quelconque pris sur la courbe IJ référée à l'axe Dj et à l'origine D. Si on suppose que $\mathsf{DU} = \mathsf{AO} = a$ et $\mathsf{VU} = b$, et qu'on réfère la courbe XY à l'axe AH et à l'origine A, en posant $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{PM} = y$, alors on peut écrire la proportion (8.52) comme il suit :

$$(x - a) : y = \sum\nolimits_a^x [b] : \sum\nolimits_a^x [z] \tag{8.58}$$

[91] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 2, 380.

qui, en passant aux rectangle VKRU et du trapézoïde URFL aux aires respectives, correspond à l'équation

$$yb = s\left[\sum\nolimits_a^x [z]\right] \tag{8.59}$$

Cette équation ne fait qu'établir la relation entre les courbes IJ et XY. Si on veut raisonner en général, il n'est donc pas nécessaire de spécifier la nature de la première de ces courbes, et donc de la deuxième. Il suffit de supposer que ces courbes sont entre-elles dans une relation analogue à celle qui lie entre-elles les deux courbes sur lesquelles porte le théorème de van Heureat. Cette relation n'est pourtant pas exprimée, dans le cas présent, par une égalité qui constitue la conclusion d'un argument fondé sur la supposition d'une relation d'une autre nature entre ces deux courbes — une relation qui, dans le cas du théorème de van Heureat, est à son tour exprimée par une équation dans laquelle n'intervient aucunement la valeur d'une aire. Elle est directement exprimée par une équation qui est posée *a priori*, et est donc censée définir la deuxième de ces courbes par rapport à la première. L'aire de z — qui dans le théorème de van Heureat n'était qu'une inconnue, qu'on parvient enfin à déterminer, en montrant qu'elle est égale au produit de deux segments — joue dans le nouvel argument de Newton le rôle d'une variable qui intervient d'emblée dans la définition d'une courbe.

C'est par rapport à cette nouvelle manière de définir une courbe que Newton fait intervenir la considération des incréments et des mouvements générateurs. Liés à ces mouvements, ces incréments ne doivent pas être conçus comme des différences infiniment petites, des sortes de différentiels *ante litteram.* Si α est une grandeur géométrique qu'on suppose être engendrée par un certain mouvement, alors Newton semble plutôt penser que l'incrément de α, $incr(\alpha)$, est comme une portion de l'accroissement de α pendant un temps choisi comme paramètre, en particulier comme la portion de cet accroissement qui ne dépend que de la nature ponctuelle du mouvement qui engendre α au point auquel cet incrément est référé.

Je dis "ponctuelle" et non pas "instantanée", car il me semble que le temps intervient dans l'argument de Newton comme un paramètre commode qu'il est aisé d'éliminer ; si celui-ci s'en réclame ce n'est que pour faire jouer une analogie mécanique pour décrire une situation qui n'est au fond que purement géométrique. Il suffit de supposer connues les relations entre les différents mouvements, de choisir l'un de ces mouvements comme étant le principal (indépendant de tout autre), et de considérer les accroissements produits par ces mouvements comme correspondants tous à un certain accroissement produit par le mouvement principal. La considération du temps sert alors à exprimer la nature de cette correspondance par le biais d'un langage agile : on dira que tous ces accroissements sont produits "en même temps." Pourtant, ces accroissements, ou les incréments correspondants, ne sont pas déterminés comme étant ceux qui sont produits dans un certain temps, fixé *a priori.* Ils sont plutôt référés à des points et/ou représentés par des segments, qu'on construit ou on suppose constructibles à partir de grandeurs géométriques données ou supposées données. La métaphore mécanique, et donc la référence au temps, ne fait alors que guider et justifier de l'extérieur une construction géométrique.

Dans le cas particulier dont il est question, mais indépendamment de la nature de la courbe IJ — qu'on pourra pour l'instant continuer de supposer quelconque —, Newton semble raisonner comme il suit. Supposons que le rectangle VKRU et le trapézoïde URLF soient engendrés respectivement par la translation de deux segments colinéaires, kr et rf — dont le premier est constant et le deuxième est variable —, appartenant à la droite pk, dont la translation sur l'axe Ee produit les translations de ces segments. Prenons sur cet axe un point K quelconque, et considérons ce rectangle et ce trapézoïde dans l'état qu'ils atteignent lorsque cette droite parvient à la position PK. Il s'agit de déterminer, à partir de la connaissance supposée du rapport entre les segments kr et rf — ou KR et RF —, le rapport entre les incréments de VKRU et URLF. À ce stade, le raisonnement de Newton se réclame d'un lemme : ce rapport est le même que celui des deux segments générateurs pris au point K, c'est à dire qu'il est le rapport entre deux rectangles construits sur une base quelconque, mais commune, dont ces deux segments constituent les hauteurs respectives.

Aucun argument n'est donné pour supporter ou justifier ce lemme, qui semble ainsi fonctionner comme une sorte de postulat. Il est pourtant facile de comprendre que ce postulat — qui n'a, en soit, qu'un contenu purement géométrique — peut se justifier en se réclamant de la métaphore mécanique, sans qu'on soit d'ailleurs obligé de supposer que ces incréments sont des grandeurs infiniment petites. Il suffit d'imaginer une situation mécanique virtuelle, définie à partir de la situation réelle grâce à une hypothèse qu'on pourrait peut-être qualifier de “linéarisation mécanique” : si à partir du point K les deux segments mobiles kr et rf restaient l'un et l'autre constants, alors ils produiraient — en continuant, pour un temps donné, leur translation induite par la translation de la droite pk — deux rectangles de base commune et de hauteurs respectives KR et RF ; quelque soit cette base, le rapport de ces deux rectangles et donc des incréments VKRU et URLF est ainsi celui de ces derniers segments.

On parvient alors à la proportion (8.53), qu'on pourra écrira ainsi

$$incr\left(\sum\nolimits_a^x [b]\right) : incr\left(\sum\nolimits_a^x [z]\right) = b : z \tag{8.60}$$

ou, en passant aux aires :

$$incr\left(s\left[\sum\nolimits_a^x [b]\right]\right) : incr\left(s\left[\sum\nolimits_a^x [z]\right]\right) = b : z \tag{8.61}$$

Or, si on pense d'emblée les incréments de VKRU et URLF comme étant des rectangles construits sur une base commune quelconque, il est naturel d'en conclure que le rapport de ces incréments est aussi celui de deux segments qui sont entre eux comme VKRU et URLF. C'est le contenu d'un deuxième lemme qui, étant supposée la proportion (8.52), est exprimé par la proportion (8.54). En ayant écrit la proportion (8.52) sous la forme de la (8.58), cette proportion prend la forme suivante :

$$incr\left(\sum\nolimits_a^x [b]\right) : incr\left(\sum\nolimits_a^x [z]\right) = incr(x-a) : incr(y) \tag{8.62}$$

Il suffit alors de comparer les proportions (8.60) et (8.62), et d'observer que, a étant constant, l'incrément de $x - a$ ne peut qu'être égal à l'incrément de x, pour obtenir la nouvelle proportion :

$$incr(x) : incr(y) = b : z \tag{8.63}$$

En revenant des incréments aux mouvements qui les produisent, de cette proportion on obtient la proportion (8.55), qui si l'on adopte la notation que Newton avait employée quelques semaine auparavant[92], peut s'écrire ainsi

$$p : q = b : z \tag{8.64}$$

[92]Cf. le chapitre (7), ci-dessus.

C'est seulement à ce point que dans l'argument de Newton intervient, au sens propre, la méthode de Roberval, ou du moins l'adaptation de cette méthode au cas d'une courbe décrite par un mouvement résultant de la composition des deux mouvements qui engendrent les coordonnées cartésiennes de cette courbe. Or, dans le contexte de cet argument — qui, comme il est facile de le remarquer, est totalement étranger à tout formalisme Algébrique — le rôle de cette méthode est finalement celui de justifier en général l'égalité (7.8), quelle que soit la courbe d'abscisse x et d'ordonnée y. C'est en effet de cette dernière égalité que dépend en dernière instance le fait que la diagonale du parallélogramme construit sur deux segments MN et MQ, qui sont entre eux comme p et q — et donc comme b et z —, est la tangente cherchée.

Et c'est à cette nouvelle généralité, qu'il est possible d'assigner à l'égalité (7.8), qui tient la possibilité d'appliquer cette même égalité au cas dont il est question. Ce cas concerne en effet une courbe XY exprimée par l'équation (8.59), qui — la courbe IJ étant une hyperbole — ne peut être exprimée par aucune équation Algébrique dans le variables x et y. L'hypothèse d'après laquelle la courbe IJ est une hyperbole n'intervient pourtant qu'au tout dernier moment dans l'argument de Newton, et notamment lorsque ce dernier indique comment déterminer le point Z sur l'axe AE.

* * *

Cet argument est donc, pour l'essentiel, parfaitement général. Il peut de surcroît être ultérieurement généralisé, si au lieu de supposer que la courbe XY est définie par la proportion (8.58), et donc par l'équation (8.59), on suppose qu'elle est définie par une proportion comme la suivante

$$(x-a) : y = \sum\nolimits_a^x [v] : \sum\nolimits_a^x [z] \tag{8.65}$$

où $\sum_a^x [v]$ est le trapézoïde engendré par la translation d'une ordonnée v quelconque sur l'axe Ee, à partir de laquelle on pourra tirer l'équation suivante

$$y = (x-a)\frac{\sum_a^x [z]}{\sum_a^x [v]} \tag{8.66}$$

En répétant à la lettre le raisonnement précédent, on obtient en effet la proportion :

$$p : q = v : z \tag{8.67}$$

dont la (8.64) n'est qu'un cas particulier, et qu'on pourra enfin comparer à l'égalité (7.8) pour en déduire une construction de la tangente cherchée.

* * *

Ceci étant dit, revenons au cas particulier considéré par Newton. Si on suppose que la courbe IJ est une hyperbole d'équation

$$zx = H \tag{8.68}$$

(H étant une constante quelconque), alors de la proportion (8.64) et de l'égalité (7.8) il est aisé de tirer l'égalité

$$\frac{p}{q} = \frac{stg_{\cdot x}[y]}{y} = \frac{bx}{H} \tag{8.69}$$

Si on suppose d'autre part, comme le fait Newton, que $\mathsf{DU} = \mathsf{UL}$, il s'ensuit que

$$z_a = \mathsf{UL} = \frac{H}{a} = a \tag{8.70}$$

et donc $H = a^2$. Si, en suivant encore Newton, on suppose que $\mathsf{DU} = \mathsf{VU}$, il s'ensuit que $b = a$ et donc finalement

$$stg._x[y] = \frac{bx}{H}y = \frac{xy}{a} \tag{8.71}$$

Il suffit alors d'observer que les triangles WPM et ZMs sont semblables, pour obtenir l'égalité

$$\mathsf{Zs} = \frac{(\mathsf{PM})(\mathsf{sM})}{\mathsf{WP}} = \frac{yx}{stg._x[y]} = a = \mathsf{UL} \tag{8.72}$$

qui justifie la condition posée par Newton.

Bien que celui-ci ne le remarque pas explicitement, sa construction fournit la tangente de la courbe logarithmique que l'on exprime aujourd'hui, par rapport à l'axe AH et à l'origine A, par l'équation

$$y = a \log \frac{x}{a} \tag{8.73}$$

Il suffit alors de poser, comme il est parfaitement naturel de le faire (et comme Newton semble implicitement le supposer), $a = u$, pour en tirer, en toute généralité, la construction de la tangente à la courbe logarithmique d'équation $y = \log x$, construction qui résulte ainsi fondée sur l'égalité

$$\frac{q}{p} = \frac{u}{x} \tag{8.74}$$

référée à cette courbe.

* * *

L'égalité (7.8) ayant été démontrée en général — grâce à une adaptation convenable de la méthode de Roberval — rien n'empêche d'écrire la proportion (8.64) sous la forme de l'égalité

$$z = \frac{sn._x[y]}{y}b \tag{8.75}$$

Il suffit alors d'observer que l'ordonnée y de la courbe XY s'annule pour $x = a$, et que les points M et F peuvent être conçus non seulement comme des points mobiles qui engendrent respectivement les courbes XY et IJ, mais aussi comme étant des points quelconques pris sur ces courbes, correspondant à la même valeur de l'abscisse, pour en conclure que, pris dans toute sa généralité, l'argument de Newton fournit une preuve de la réciproque du théorème de van Heuraet dans sa version adaptée.

L'intérêt de cet argument ne relève pourtant pas du fait qu'il permet d'énoncer cette réciproque comme un théorème, car il aurait été aisé de parvenir à ce même résultat en raisonnant sur une preuve quelconque du théorème de van Heureat et sur les conditions de son inversion. C'est plutôt dans la nature même de cet argument que réside la nouveauté essentielle. Par le seul fait de nous présenter la proportion (8.64) comme une détermination de la sous-normale $sn._x[y]$ (ou de la sous-tangente correspondante) — et non pas de l'ordonnée z, qui est par contre censée être connue dès le départ — cet argument nous montre autre chose qu'un lien entre le problème des quadratures et le problème des normales. Tandis que le théorème de van Heuraet — que Newton avait démontré, en suivant la démarche originale du même van Heuraet, grâce à l'étude des composants élémentaires du trapézoïde $\sum_{\kappa}^{\xi}[z]$ — se présentait comme l'attestation de ce lien, et suggérait une méthode à rebours pour obtenir des quadratures, sa réciproque — démontrée comme on vient de le voir, grâce au recours aux propriétés des mouvements générateurs — se présente comme l'attestation d'une propriété caractéristique de la tangente à une courbe définie implicitement par le biais d'une équation de la forme de la (8.59), et conduit ainsi à une méthode qui permet de déterminer cette tangente, sans qu'il soit nécessaire de déterminer, d'une manière ou d'une autre, l'aire du trapézoïde $\sum_{a}^{x}[z]$.

Or, si le but explicite de Newton semble être de parvenir à la mise en place de cette méthode, l'essentiel n'est pas la méthode en tant que telle, mais le fait qu'en conduisant à déterminer la tangente à une courbe définie implicitement par le biais d'une équation de la forme de la (8.59) sans qu'il soit nécessaire de déterminer l'aire du trapézoïde $\sum_{a}^{x}[z]$, cette méthode montre implicitement qu'une équation de cette forme peut être conçue, en tant que telle, comme une expression légitime d'une courbe : une expression qui caractérise cette courbe d'une manière si précise qu'il est possible de s'y réclamer pour déterminer sa tangente pour n'importe lequel de ses points.

On peut certes imaginer autant des cas quel'on veut où l'ordonnée z de la courbe IJ est définie de telle manière que l'aire $s[\sum_{a}^{x}[z]]$ de cette même courbe peut être aisément exprimée par une expression Algébrique dans la variable x. Dans ces cas, il est possible de transformer l'équation (8.59) en une équation Algébrique en x et y et montrer que la méthode précédente conduit au même résultat, quant à la tangente de cette courbe, auquel on parviendrait en opérant directement sur cette équation selon l'algorithme connu. Pourtant, ce qui est essentiel ici est que cette méthode s'applique aussi dans d'autres cas, notamment lorsqu'on ne peut pas transformer l'équation (8.59) en une équation Algébrique. En disant que cette équation est, aussi bien dans ces cas que dans les premiers, une expression légitime d'une courbe par rapport à un certain système de coordonnées cartésiennes, on affirme alors implicitement que la distinction entre courbes géométriques et mécaniques n'est pas au fond une distinction essentielle. Mais il y a plus : face à la possibilité d'exprimer une courbe mécanique de cette manière, ce sont les notions mêmes de courbe géométrique et de courbe mécanique qui changent radicalement de statut. Une courbe mécanique n'apparaît plus nécessairement comme étant une courbe explicitement déterminée, répondant à un construction explicitement définie. Elle peut aussi se présenter comme une courbe qui satisfait une condition qu'il est possible d'exprimer en écrivant une équation d'une nouvelle sorte qu'on peut former *ad libitum*. Du coup, les courbes géométriques apparaissent comme des courbes particulières, parmi toutes celles que l'on sait désormais traiter. Le formalisme qui s'applique à l'étude de ces courbes prend l'allure d'un outil aussi performant que particulier dont on ne peut se servir que dans certains cas, et qui permet, dans ces seuls cas, d'exprimer et de déterminer aisément des propriétés et des relations géométriques sous-jacentes, qui, en tant que telles, restent indépendantes de cette forme commode d'expression.

Encore sur le centre de courbure

Avant de quitter la note du 8 novembre, il faut encore observer que Newton revient, en la clôturant, sur le problème du centre de courbure[93]. La démarche proposée par Newton est maintenant inversée par rapport à celle exposée dans la note du 30 octobre. Au lieu de construire le centre de courbure à partir de la tangente, il observe que la tangente à une courbe mécanique en un point quelconque de celle-ci peut être construite comme la perpendiculaire à la droite qui joint ce point au centre de courbure correspondante. Naturellement, quelle que soit la courbe considérée — qu'elle soit géométrique ou mécanique —, cette perpendiculaire est certainement tangente à cette courbe. Mais pour trouver la tangente à une courbe donnée en suivant cette démarche, il faut pouvoir déterminer au préalable le centre de courbure de cette courbe, ce qui signifie qu'il faut savoir le définir, sans supposer que la normale à laquelle il appartient est donnée. Pour ce faire, Newton s'appuie encore une fois sur la considération des mouvements générateurs. Sans mentionner explicitement le centre de courbure, il observe en effet que[94] :

> Tangentes to Mechanical lines may sometimes bee found by finding such a point which is ummoveable in respect of the line described and also doth not vary in distance from the describing point. for the Secant [c'est-à-dire la normale] must passe through that point.

Newton semble donc penser désormais explicitement le centre de courbure comme étant le centre instantané de rotation du mouvement qui décrit la courbe. Il ne fait donc qu'observer que la détermination de ce centre ne demande pas nécessairement la détermination préalable de la normale ou de la tangente. Il ne considère pourtant que le seul exemple, d'ailleurs assez simple, de la cycloïde, et de surcroît il se trompe en traitant cet exemple, car il identifie le centre instantanée de rotation du mouvement qui engendre la cycloïde avec le point I (fig. 9), où le cercle qui tourne sur l'axe AC touche cet axe. Whiteside[95] suggère que Newton s'appuie ici sur un argument de Descartes, que van Schooten reporte dans son commentaire à la *Géométrie*. Après avoir observé qu'une cycloïde AMB peut se penser comme étant la trajectoire du mouvement du point M qui résulte de la composition de la rotation (sans frottement) du cercle de centre O et rayon EI sur la base AC et de la translation du centre de ce cercle le long d'une direction parallèle à cette base, ce dernier en conclut ceci[96] :

> Quibus sic explicatis, ut ad propositum redeamus, atque rectam, quæ Trochoïdem in dato puncto tangat, ducamus : sciendus est, lineam rectam, transuentem per punctum dictum, & punctum in quo rota basin, dum punctum in Trochoïde datum describitur, contigat, secare semper tangentem quæsitam ad angulus rectus.

Cela est naturellement correct, mais n'implique pas que le point "in quo rota basim" soit le centre de courbure de la cycloïde. C'est néanmoins ce que l'argument avancé par van Schooten pour supporter cette conclusion semble suggérer. Cet argument est tiré, mot à

[93]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 2, 381-382.
[94]Cf.Newton (MP), I, **2**, 6, § 2, 381-382.
[95]Cf.Newton (MP), I, **2**, 6, § 2, note (25), 382.
[96]Cf. van Schoten (1649), 267.

mot, d'une lettre de Descartes que van Schooten cite explicitement quelques lignes plus loin[97]. Voici ce qu'écrit Descartes[98] et que van Schooten ne fait que traduire en latin :

> Si on fait rouler vn polygone rectiligne, quel qu'il soit, sur vne ligne droite, la courbe descrite par l'vn de ses poins, quel qu'il soit, sera composée de plusieurs parties de cercles, et les tangentes de tous les poins de chascune de ces parties de cercle couperont a angles droits les lignes tirees de ces poins vers celuy auquel le polygone aura touché la baze en decriuant cete partie. En suite de quoy, considerant la roulete circulaire comme vn polygone qui a vne infinité de costez, on voit clairement qu'lle doit auoir cete mesme proprieté, c'est a dire que les tangentes de chascun des poins qui sont en la courbe qu'elle decrit doiuent couper a angles droits les lignes tirées de ces poins vers ceux de la baze qui sont touchez par elle au mesme tems qu'lle les decrit.

En passant du polygone au cercle, le point dans lequel ce cercle touche l'axe sur lequel il roule n'est pourtant pas instantanément en repos, car il est soumis à la même translation que subit le centre de ce cercle.

Newton doit d'ailleurs avoir soupçonné que les choses ne sont pas aussi simples qu'il le dit. En évoquant très rapidement le cas de la spirale d'Archimède, il observe[99] que dans cette courbe l'origine O (fig 4) est en repos, bien qu'elle "doth continually vary its distance from the describing point M." C'est le même phénomène qui fait que le point I (fig. 9) n'est pas le centre instantané de rotation de la cycloïde. Si Newton se trompe dans ce cas c'est qu'à la différence de l'origine de la spirale, ce point appartient à la normale au point générateur, et ceci semble le confondre. L'idée d'identifier le centre de courbure d'une courbe avec le centre instantanée de rotation du mouvement qui la engendre est néanmoins profonde, et elle ne tardera pas à porter ses fruits[100].

[97] C'est la même lettre à Mersenne du 23 Août 1638, qu'on a cité dans la note (74), ci-dessus.
[98] Cf. Descartes (AT), II, 308-309.
[99] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 2, 382.
[100] Cf. la section 9.2.2.

Chapitre 9

Le retour à l'Algèbre : l'algorithme des mouvements justifié en tant qu'algorithme des vitesses composées (13 novembre 1665)

La première impression du *Commercium epistolicum*[1], était vieille de trois ans, et la deuxième venait de paraître[2], suivie par un compte rendu anonyme — qui avait été écrit en fait par Newton lui-même[3] —, lorsque, au plus fort de la polémique de priorité qui opposait Newton à Leibniz[4], le 25 novembre 1715, ce dernier adressa une lettre à l'abbé Conti, contenant un long post-scriptum, à l'intention de Newton[5]. Loin de profiter de l'entre-mise de l'ami commun pour essayer de plaquer la polémique, Leibniz cherchait plutôt à convaincre son rival à descendre ouvertement dans l'arène. Il en reçut en échange une lettre de ce dernier datée du 26 février 1716, elle aussi envoyé par l'intermédiaire de l'abbé Conti[6], à laquelle il répondit, encore une fois par l'intermédiaire de l'abbé Conti, le 29 mars [7], quelques six

[1]Cf. Collins (1712).

[2]La première impression du *Commercium* — une récolte de lettres qui, dans l'espérance des partisans de Newton, aurait du clore définitivement la dispute de priorité avec Leibniz [cf. la note (4), ci-dessous] — ne contait qu'un petit nombre d'exemplaires qui furent pour la plupart distribués gratuitement par la *Royal Society* aux principaux savants européens [cf. Westfall (1980), 774-775. La deuxième (à laquelle on ajouta une feuille d'*errata* [cf. Paris, *Bibl. Nat*, Rés, V. 875]) eu en revanche une diffusion plus large. Une deuxième édition fut ensuite publièe en 1722 avec des additions, dont le compte-rendu de Newton [cf. Collins (1722)]

[3]Cf. Newton (1715).

[4]Sur la dispute de priorité entre Leibniz et Newton, cf. Hall (1980).

[5]Cf. Newton (C), VI, 250-255. La lettre porte la date du 6 dcembre ; mais elle fut fut jointe à une lettre envoyée à Rémond le 25 novembre en priant de la faire suivre [cf. *ibid.*, 254, note (1) et 255, note (1).

[6]Cf. Newton (C), VI, 285-290.

[7]Cf. Newton (C), 304-314. La lettre porte la date du 9 avril et fut envoyée d'abord à Monmort [cf. *ibid.*, 313, note (1) end 314, note (3).

mois avant de mourir. Newton conserva précieusement ces lettres et, l'année suivante, ou peut-être[8] en 1718, il les fit imprimer et annexer aux copies encore invendues de l'*Historia Fluxionum* de J. Raphson, en y ajoutant, des "Observations upon the preceding Epistle"[9], elles aussi écrites probablement, à l'origine, à l'intention de l'abbé Conti[10].

En abandonnant l'anonymat, Newton déclare dans ces "Observations" avoir inventé "la méthode des séries et des fluxions" en 1665 et l'avoir améliorée en 1666. À l'appui de cette déclaration, il ajoute posséder plusieurs "notes mathématiques [*mathematical papers*]", remontant aux années 1664-1665 et témoignant de cette invention. La première qu'il mentionne est justement celle du 13 novembre 1665, où, il écrit[11], "the directed Method of Fluxions is set down". Il se réfère en suite à la note du 16 mai 1666, où, il écrit encore[12],

> a general Method of resolving Problems by motion, is set down in seven propositions, the last of which is the same with the problem contained in the aforesaid Paper of the 13th November 1665.

Enfin, il cite[13] un "petit traité écrit dans le mois de novembre de 1666", qui n'est en fait que le *Traité de l'octobre 1666.*

Newton était même parvenu, probablement quelques temps avant de rédiger ses "Observations", à recopier partiellement sa note du 13 novembre[14], en y ajoutant quelques brefs commentaires généalogiques[15]. Lors de ces commentaires, il cite, outre les notes du 16 mai 1666 et le traité de l'octobre de la même année, aussi la note du 20 mai 1665[16], dans laquelle, il dit : "the same method is set down in other words", et les fluxions sont représentées par des "lettres pointées [*pricked letters*]"[17].

En accord avec la reconstruction des origines de la théorie des fluxions établie par Newton lui-même, au cours de la dispute avec Leibniz, la note du 13 novembre 1665[18] occupe donc un place majeure. Elle constituerait d'un côté le maillon de conjonction entre les théorèmes à propos des tangentes et des centres de courbure auxquels Newton était parvenu le 20 et 21 mai 1665 et la théorie des fluxions, et contiendrait de l'autre — dans un langage dont la différence avec ce qui deviendra classique au sein de cette théorie ne mérite même pas d'être observée — l'énoncé du principe fondateur de celle-ci.

Tout en assignant à la note du 13 novembre le rôle qu'elle mérite dans la généalogie de la théorie des fluxions, cette reconstruction est néanmoins viciée par un continuisme de

---

[8] Cf. Hall (1992), 358.

[9] Cf. Raphson (1715). Le même materiel fut ensuite publié par P. de Maizeaux en 1720 [cf. Maizeaux (1720), I,1-111, les "Observations" de Newton sont aux pages 75-98 et sont sont suivies d'une date : 18/29 mai 1716] et, dans leur version originale, par Horseley, dans le vol. IV des *Opera* de Newton, sous le titre de "Additamenta Commercii Epistolici ex Historia Fluxionum Raphsini" [cf. Newton (H), IV, 593-617].

[10] Cf. Rigaud (1938), 23.

[11] Cf. Raphson (1715), 116 (naturellement une telle référence ne concerne que les copies de l'*Historia Fluxionom* auxquelles fut ajoutée la correspondance entre Newton et Leibniz de 1715-1716), et Newton (H), IV, 611.

[12] Cf. Raphson (1715), 116 (cf. la note (11), ci-dessus), et Newton (H), IV, 611.

[13] Cf. Raphson (1715), 116 (cf. la note (11), ci-dessus), et Newton (H), IV, 611.

[14] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 2, note (1), 382.

[15] Cette copie de la note du 13 novembre, complétée par les remarques ajoutées, fut publiée par Rigaud, dans une appendice à son *Historical Essay* sur les *Principia* [cf. Rigaud (1938), *appendice*, II 20-24 (la pagination des appendices est séparés de celle du texte de l'*Essay*)].

[16] Cf. la section (5.5.1).

[17] Cf. Rigaud (1938), *appendice*, II, 23.

[18] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, 382-389.

convenance qui, au cœur de la polémique sur la priorité, servait à Newton pour antédater le plus possible le moment auquel il était parvenu à acquérir les fondements de cette théorie.

Les notes du 20 et 21 mai 1665 marquent une étape décisive dans l'évolution des idées de Newton, car ce-dernier y parvient à comprendre que le rapport entre la sous-tangente et l'ordonnée d'une courbe quelconque, référée à n'importe quel système de coordonnées cartésiennes, peut être identifié avec le rapport des incréments infiniment petits des coordonnées de cette courbe. À partir de là, il définit un algorithme très puissant, propre à conduire d'une éventuelle équation Algébrique entière exprimant cette courbe par rapport à ce système de coordonnées, à l'expression de la sous-tangente, de la sous-normale, du rayon de courbure et des coordonnées du centre de courbure de cette courbe. Mais la structure de ce formalisme montre aussi que, à l'époque où il rédigea ces notes, Newton était bien loin d'assigner à ce rapport le rôle d'un invariant fondamental, autant géométrique qu'algorithmique[19]. La différence entre les théorèmes énoncés dans ces notes et le principe fondateur qu'il énonce dans la note du 13 novembre concerne donc bien plus qu'un simple changement de langage. Elle tient, plus en profondeur, à la présence, dans la note du 13 novembre, d'un objet mathématique qui était en revanche absent des notes du 20 et 21 mai.

Cet objet mathématique se présente, dans la note du 13 novembre, sous la forme du rapport des "vitesses [*velocities*]"[20] p et q des "corps mobiles" qui "décrivent" deux segments x et y liés entre eux par une certaine équation Algébrique entière. Mis à part un changement linguistique qu'il est en soit anodin — le passage du terme "mouvement" au terme "vitesse" — ce rapport pourrait être identifié avec celui que Newton avait introduit, dès le début de l'automne 1665, en le présentant justement comme le rapport entre les mouvements qui décrivent les coordonnées cartésiennes d'une courbe. Pourtant, après les notes du 30 octobre et du 8 novembre et la rencontre avec la méthode de Roberval, Newton ne pouvait pas penser aux "vitesses" p et q de la même façon qu'il pensait quelques semaines auparavant aux mouvements qui décrivent les coordonnées cartésiennes d'une courbe. C'est que le rapport de ces mouvements avait été introduit au début de l'automne en tant que corrélat d'un algorithme Algébrique, comme un moyen d'exprimer un invariant algorithmique qui ne pouvait se manifester que par rapport à une courbe exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes, par une équation Algébrique. Après ces dernières notes, le rapport entre les "vitesse" de génération de deux segments, ne pouvait qu'être pensé en termes bien plus généraux, comme la caractéristique propre d'un mouvement composé dont les composants se comportent l'un par rapport à l'autre tout comme il est possible de déduire de la relation qui lie ces segments entre eux. Rien n'obligeait donc à penser ce rapport, en tant que tel, comme la manifestation d'un invariant algorithmique, et encore moins à l'interpréter d'emblée comme le rapport des vitesses des mouvements générateurs de deux coordonnées cartésiennes d'une courbe. Bien que Newton ne considère, dans l'énoncé d'ouverture de sa note du 13 novembre — qu'il présentera, plus de cinquante ans plus tard, comme la première exposition de la "méthode de fluxion" — que des segments variables liés entre eux par une relation exprimée par une équation Algébrique entière, il est clair au vu du contenu de la note que la possibilité d'exprimer ainsi la relation entre ces segments n'est guère une condition nécessaire pour donner un sens mathématique au rapport des vitesses de ces segments. Et il est encore plus clair que, lorsque cette relation est ainsi exprimée, rien

[19]Cf. les sections 5.5.1 et 5.5.2, en particulier pp. 275-277 et 287-289.
[20]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [1], 382.

n'oblige à penser l'équation correspondante comme l'expression d'une courbe par rapport à un système de coordonnées cartésiennes. Ceci n'est qu'un cas particulier, parmi tous ceux auxquels s'applique "la méthode générale pour résoudre des problèmes par le biais du mouvement." Dans ce contexte, les problèmes de la détermination des tangentes, des normales et des centres de courbure des courbes exprimées, par rapport à un certain système de coordonnées cartésiennes, par des équations Algébriques entières — lesquelles avaient attiré l'attention de Newton depuis le début de ses recherches mathématiques — ne constituent que des aspects particuliers d'un problème bien plus général, auquel Newton dira plus tard qu'il est possible de réduire toute la géométrie : celui de la détermination de rapport entre les vitesses de certaines mouvements.

Quant aux différences — également profondes — entre la méthode présentée dans la note du 13 novembre 1665 et la théorie des fluxions, dans sa forme définitive, telle qu'elle sera exposée dans le *De methodis*, elles feront l'objet des considérations sur lesquelles je viendrai dans le chapitre 12, et qu'il serait déplacé d'anticiper ici.

9.1 L'algorithme des vitesses et sa démonstration

Considéré seul, l'énoncé d'ouverture de la note du 13 novembre n'est rien d'autre que l'énoncé d'un problème[21] :

> An Equation being given, expressing the Relation of two or more lines x, y, z, &c described in the same time by two or more moveing bodys A, B, C, &c to find the relation of their velocitys p, q, r, &c :

La solution de ce problème consiste naturellement dans la présentation d'un algorithme parfaitement équivalent à l'algorithme des mouvements exprimé par l'égalité (7.7). Newton ne fait que généraliser ce dernier au cas d'une équation entre un nombre quelconque de variables. Si l'équation entière

$$\sum_{i,j,\ldots,h=0}^{n} A_{i,j,\ldots,h} x^i y^j \ldots z^h = 0 \tag{9.1}$$

est donnée, il s'agit[22] de l'ordonner successivement par rapport aux variables x, y,. . .et z, et de multiplier tout terme ${}_{[x]}A_i x^i$, ${}_{[y]}A_j y^j$, . . ., ${}_{[z]}A_h z^h$ des différentes équations obtenues de cette manière respectivement par $i\frac{p}{x}$, $j\frac{q}{y}$, . . ., et $h\frac{r}{z}$. En additionnant ensuite terme à terme les équations ainsi trouvées on parvient à une nouvelle équation qui exprime la relation

[21] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [1], 382.
[22] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [1], 383.

cherchée[23] entre les vitesses p, q, ..., et r :

$$\left.\begin{array}{lr} \sum\limits_{i,j,\ldots,h=0}^{n} \left(A_{i,j,\ldots,h} y^j \ldots z^h\right) i x^{i-1} p & + \\ \sum\limits_{i,j,\ldots,h=0}^{n} \left(A_{i,j,\ldots,h} x^i \ldots z^h\right) j y^{j-1} q & + \\ \ldots & + \\ \sum\limits_{i,j,\ldots,h=0}^{n} \left(A_{i,j,\ldots,h} x^i y^j \ldots\right) h z^{h-1} r & \end{array}\right\} = 0 \tag{9.2}$$

[23]Poussé par une volonté de généralisation, Newton observe [cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [1], 382] que le même résultat peut aussi être obtenu en multipliant tout terme ${}_{[x]}A_i x^i$, ${}_{[y]}A_j y^j, \ldots$, ${}_{[z]}A_h z^h$ des différentes équations obtenues en ordonnant l'équation (9.1) par rapport aux variables x, y, ...et z, respectivement par $\frac{a+(\lambda+i)b}{x}p$, $\frac{a+(\mu+j)b}{y}q$, ... et $\frac{a+(\nu+h)b}{z}r$, où a et b sont "deux nombres quelconques, rationnels ou pas" et λ, μ, ..., et ν des nombres entiers, positifs ou négatifs quelconques. L'équivalence entre les deux algorithmes se démontre aisément, en suivant la suggestion fournit par Newton lui-même lors de la présentation de son troisième exemple [cf. la note (25), ci-dessous]. En partant de l'équation

$$\left.\begin{array}{lr} \sum\limits_{i=0}^{n} {}_{[x]}A_i \left[a+(\lambda+i)b\right] x^{i-1} p & + \\ \ldots & + \\ \sum\limits_{h=0}^{n} {}_{[z]}A_h \left[a+(\nu+h)b\right] z^{h-1} r & \end{array}\right\} = 0$$

on obtient, en exécutant les multiplications,

$$\left.\begin{array}{lr} \left\{\begin{array}{lr} \frac{ap}{x}\sum\limits_{i=0}^{n} {}_{[x]}A_i x^i & + \\ bp\lambda\left[\frac{1}{x}{}_{[x]}A_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} {}_{[x]}A_i x^{i-1}\right] & + \\ bp\sum\limits_{i=1}^{n} {}_{[x]}A_i i x^{i-1} & \end{array}\right\} & + \\ \ldots & + \\ \left\{\begin{array}{lr} \frac{ar}{z}\sum\limits_{h=0}^{n} {}_{[z]}A_h z^h & + \\ br\nu\left[\frac{1}{z}{}_{[z]}A_0 + \sum\limits_{h=1}^{n} {}_{[z]}A_h z^{h-1}\right] & + \\ br\sum\limits_{h=1}^{n} {}_{[z]}A_h h z^{h-1} & \end{array}\right\} & \end{array}\right\} = 0$$

et comme

$$\sum_{i=0}^{n} {}_{[x]}A_i x^i = \ldots = \sum_{h=0}^{n} {}_{[z]}A_h z^h = 0$$

et

$$\begin{array}{c} {}_{[x]}A_0 = -\sum\limits_{i=1}^{n} {}_{[x]}A_i x^i \\ \ldots \\ {}_{[z]}A_0 = -\sum\limits_{h=1}^{n} {}_{[z]}A_h z^h \end{array}$$

de là on obtient

$$p\sum_{i=1}^{n} {}_{[x]}A_i i x^{i-1} + \ldots + r\sum_{h=1}^{n} {}_{[z]}A_h h z^{h-1} = 0$$

qui n'est rien que l'équation (9.2). Cette même preuve montre que la généralisation de Newton n'est guère essentielle, et sert, tout au plus, à lier l'algorithme des vitesses au souvenir de la règle de Hudde.

En tant que tel, l'algorithme proposé par Newton n'est donc pas nouveau. Cependant, celui-ci est désormais capable de fournir deux preuves distinctes qui étaient en revanche absentes de la note du début de l'automne 1665 dans laquelle il avait introduit cet algorithme pour la première fois. D'abord, il sait démontrer que cet algorithme correspond bien au but pour lequel il est introduit, c'est-à-dire prouver que l'équation qui lie entre elles les vitesses p, q,...et r ne peut être que celle que cet algorithme permet de trouver. Ensuite, il sait démontrer, *a priori* de la considération de cet algorithme lui même et de toute solution préalable du problème des normales ou des tangentes, que la détermination de cette équation permet de résoudre ces problèmes pour toute courbe qui peut être pensée comme générée par un mouvement composé par deux ou plusieurs mouvements dont les relations sont exprimées par l'équation donnée. En particulier, il sait démontrer que ceci est le cas si cette équation exprime cette courbe relativement à n'importe quel système de coordonnées cartésiennes.

Si la deuxième de ces preuves tient à l'adaptation faite par Newton de la méthode des tangentes de Roberval, la première y est, en tant que telle, étrangère, car elle ne concerne ni des tangentes, ni des courbes, mais seulement des segments variables — liés entre eux par une certaine relation — et leurs mouvements générateurs. Je vais commencer par exposer et discuter cette première preuve[24], que Newton présente après avoir donné trois exemples d'application de son algorithme[25].

Pour des raisons de simplicité, Newton ne considère qu'une équation à deux seules variables, x et y, tout en observant que le même argument peut se répéter pour des équations à n'importe quel nombre de variables[26]. Sa preuve se fait en deux étapes : d'abord, il s'agit de prouver un lemme général portant sur les mouvements générateurs de deux segments quelconques, quelque que soit la nature de la relation qui lie entre eux ces segments ; ensuite, il ne s'agit que d'appliquer ce lemme au cas particulier où cette relation est exprimée par une équation Algébrique entière.

Supposons d'abord que les mouvements qui engendrent des segments x et y sont uniformes et que p et q sont les vitesses constantes de ces mouvements. Le rapport entre les portions de ces segments générées par ces mouvements dans un certain temps est alors constant et égal au rapport $\frac{p}{q}$ de ces vitesses, quel que soit ce temps. Ce n'est pas ainsi si ces mouvements ne sont pas uniformes. Il suffit pourtant de considérer des temps infiniment petits pour se retrouver dans une situation analogue : bien que le rapport entre les portions infiniment petites de ces segments générées par ces mouvements pendant ce temps n'est pas constant, il est néanmoins toujours égal au rapport $\frac{p}{q}$ entre les vitesses de ces mouvements pendant ce même temps :

> And though they [les corps mobiles qui décrivent les segments x et y] move not uniformly — écrit Newton[27] — yet are the infinitely little lines which each moment they describe as their velocities are which they have while they describe them.

Ainsi, si le premier mouvement engendre, avec la vitesse p, "the infinitely line o in one moment", alors le deuxième générera "in that moment", avec la vitesse q, le segment $\frac{q}{p}o$.

[24]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [1], 385.
[25]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [1], 383-384.
[26]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [1], 386.
[27]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [1], 385.

Les vitesses p et q ne semblent pas se comporter pour autant, selon Newton, comme des vitesses constantes que les mouvements en question maintiennent au cours d'un temps infiniment petit, un "instant [*moment*]", comme dit ce dernier. Au cours d'un instant, les segments variables restent en fait constants, et ne font que changer en passant de tout instant au successif. Ces vitesses fonctionnent ainsi, plutôt, comme des degrés d'intensité d'une qualité intensive qui caractérisent localement tout mouvement particulier, ou — comme l'avait dit Newton, dans les notes du 30 octobre et du 8 novembre — des déterminations locales de ce mouvement, qui décident, à chaque instant, quel va être l'incrément infiniment petit que le segment généré va subir en passant de cet instant au successif. Cet incrément semble ainsi s'ajouter à ce segment d'un seul coup, lors du passage de tout instant au successif.

> Soe [...] if the described lines be x et y — continue Newton[28] — they will bee $x + o$ et $y + \frac{oq}{p}$ in the next.

C'est le lemme qu'il s'agissait de prouver.

Ceci étant prouvé, supposons que les segments x et y sont entre eux dans une relation exprimée par une équation Algébrique entière quelconque[29],

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}x^{i-j}y^{j} = 0 \tag{9.3}$$

ou, pour être plus précis, supposons que cette équation exprime la relation que ces segments ont entre eux dans un certain instant. Si on opère dans cette équation les substitutions $x \to x+o$ et $y \to y+\frac{q}{p}o$ prescrites par le lemme, on obtiendra une nouvelle équation exprimant la relation que ces mêmes segments vont avoir dans l'instant successif. La comparaison des ces deux équations, suivie de l'omission des termes où apparaissent des puissances supérieures de o, permet alors de trouver une nouvelle équation de premier degré en p et q. Pour conclure la preuve, il suffit alors de vérifier que cette équation n'est rien que celle qu'on obtient, plus rapidement, en appliquant l'algorithme qu'il s'agit de justifier. De l'équation donnée on a en fait, en opérant les substitutions prescrites et en négligeant d'emblée les puissance supérieures de o :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}\left[x^{i-j}y^{j} + jx^{i-j}y^{j-1}\frac{oq}{p} + (i-j)\,x^{i-j-1}y^{j}o\right] = 0 \tag{9.4}$$

En comparant cette équation avec l'équation donnée, et en divisant pour o et en multipliant par p l'équation résultante on parvient à :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}\left[(i-j)\,x^{i-j-1}y^{j}p + jx^{i-j}y^{j-1}q\right] = 0 \tag{9.5}$$

qui est justement l'équation qu'on obtient en appliquant l'algorithme.

[28]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [1], 385.

[29]Newton considère en vérité un exemple particulier, l'équation $ax + x^2 - y^2 = 0$. Son argument est pourtant parfaitement général.

* * *

L'argument grâce auquel Newton passe du lemme au théorème — qui depuis est devenu classique — se fonde sur un artifice que ce dernier avait déjà employé auparavant en différentes occasions, et qu'il lui avait été suggéré par l'exposition faite par van Schooten de la méthode des *maxima* et *minima* de Fermat[30]. Cet artifice est employé ici dans un contexte nouveau, marqué par l'intervention des vitesses p et q et de leur interprétation comme des degrés d'intensité d'une qualité intensive qui caractérisent localement tout mouvement particulier et qui décident de ce fait des incréments subis par le segment généré par ce mouvement lors du passage d'un instant au successif. Il convient donc, avant de continuer dans l'exposition des arguments de Newton, de s'arrêter un moment pour réfléchir sur la nature de sa preuve et sur la fonction que les vitesses p et q remplissent au sein de celle-ci.

Si on ne reste qu'à sa structure interne, l'intervention des vitesses ne fait que permettre d'exprimer l'incrément infiniment petit de y par un monôme de premier degré dans l'incrément infiniment petit de x . C'est exactement la fonction que, dans la deuxième de ses preuves présentées dans la note du 20 mai 1665 pour l'algorithme de la sous-normale et de la sous-tangente, Newton avait assignée à l'égalité (5.144). Le coefficient de o dans le monôme qui, dans cette dernière égalité, exprime l'incrément infiniment petit de y était donné par le rapport $\frac{y}{stg._x}$. Pour pouvoir exprimer la relation linéaire qui lie entre eux les incréments infiniment petits de x et y, Newton avait donc eu besoin de penser d'emblée ces deux variables comme des coordonnées cartésiennes d'une courbe et de considérer la sous-tangente de cette courbe.

Or, la possibilité d'exprimer l'incrément infiniment petit de y par un produit de la forme Uo — dans lequel U est un facteur de proportionnalité où n'intervient aucun facteur infinitésimale — ne comporte pas seulement l'avantage de simplifier la procédure algorithmique dont relève la poursuite de la preuve. Elle permet aussi de libérer l'équation ou l'égalité que cette preuve permet enfin de déduire de la présence d'infiniment petits de toute sorte, en faisant de l'artifice de Fermat un outil local qui ne laisse aucune trace dans le théorème enfin démontré. Celle-ci est est une caractéristique constante des arguments de Newton où intervient cet artifice, avant et après l'introduction des mouvements générateurs et de leurs vitesses ; une caractéristique qui distingue ces arguments de ceux que Leibniz mettra plus tard à la base du calcul différentiel, où les grandeurs infiniment petites interviennent au contraire dans la formulation même des théorèmes dont relève ce calcul[31]. L'élimination des infiniment petits se fait néanmoins, au cours de ces arguments, au profit de l'assignation d'un rôle essentiel au facteur de proportionnalité U, ou, du moins, à un de ses composants : dans le cas de la preuve du 20 mai, le théorème final consiste par exemple dans une égalité finitaire qui exprime la sous-tangente $stg._x$; dans la preuve dont il est maintenant question, ce théorème fournit une expression pour le rapport $\frac{q}{p}$, c'est-à-dire pour le facteur U lui-même. Ainsi c'est la nature du facteur U qui décide de la nature du théorème qu'il s'agit de démontrer : en remplaçant le rapport $\frac{y}{stg._x}$ par le rapport $\frac{q}{p}$ Newton acquiert une généralité nouvelle pour ses résultats, sans pour autant y faire intervenir des grandeurs infiniment petites.

[30]Cf. la section 3.4.

[31]Ainsi l'insistance des interprètes à lire l'argument de Newton que je viens de reconstruire (dans les différents lieux où il apparaît dans l'œuvre de ce dernier) selon les égalités $p = \frac{dx}{dt}$, $q = \frac{dy}{dt}$, $o = dx$ et $\frac{q}{p}o = dy$ masque un caractère essentiel de cet argument.

On pourrait objecter que, en absence d'une définition explicite et préalable des vitesses p et q, la nature de ces grandeurs ne peut tenir qu'à la manière dans laquelle elles interviennent dans la preuve précédente, en particulier dans l'argument qui justifie le lemme. Or, la considération d'instants de temps et d'incréments infiniment petits qui s'ajoutent à la valeur d'un segment en passant d'un instant au successif semblent faire intrinsèquement partie de cet argument et participer de ce fait de la signification qu'il assigne implicitement aux vitesses p et q. Tout en restant, en tant que telles, des grandeurs finies, ces vitesses, pensées comme des degrés d'intensité d'une qualité intensive caractérisant localement tout mouvement particulier, semblent ainsi relever nécessairement d'une conception infinitésimaliste, ou même atomiste du mouvement, qui — en dépit de l'image qui nous est transmise par le verbe "décrire", que Newton utilise assez largement — ne semble pas se produire continûment mais avoir lieu par saccades, lors d'un passage d'un instant au successif. Il me semble pourtant que la manière dans laquelle Newton formule l'argument qui justifie son lemme n'est dictée que par des raisons de simplicité. Loin de cacher une manière précise de penser au mouvement qui engendre un segment, qui assigne au vitesses p et q une nature particulière, cet argument semble correspondre à la manière la plus simple et la plus rapide dont Newton pouvait disposer pour parvenir à justifier le passage de l'équation donnée à l'équation produite à partir de celle-ci grâce aux substitutions $x \to x + o$ et $y \to y + \frac{q}{p}o$, o étant une grandeur infiniment petite homogène à x et y. En d'autres situations, Newton présentera des arguments d'une autre nature pour justifier cette même procédure, ou des procédures équivalentes, en se réclamant par exemple d'une notion qu'on a souvent assimilée à de celle de limite.

Ce qui semble être essentiel pour Newton c'est le fait que les vitesses p et q se rapportent aux segments x et y ponctuellement, c'est-à-dire qu'à chaque valeur de ces segments correspond une valeur distincte de ces vitesses. Ainsi, si pour trouver le rapport de celles-ci, il faut comparer l'équation donnée entre x et y avec une nouvelle équation, il faut que la nature de cette nouvelle équation ne relève que de la relation que les segments x et y ont entre eux ponctuellement. Cette équation ne doit donc pas tenir aux mouvements effectifs qui engendrent ces segments, mais à des mouvements virtuels uniformes qui ne conservent que les qualités ponctuelles des mouvements effectifs. L'idée décisive de Newton, n'est alors que celle de considérer les segments x et y relativement l'un à l'autre, et non pas séparément. Dans ce cadre, dire de deux mouvements censés générer ces segments qu'ils sont uniformes revient à dire d'un d'eux qu'il sert de paramètre pour évaluer l'uniformité de l'autre, et de l'autre qu'il produit des augmentations du segment qu'il engendre proportionnelles aux augmentations du premier segment produites par le premier mouvement. Le contenu du lemme de Newton est alors tout entier contenu dans cette conception relationnelle, et il ne s'agit que de trouver un artifice qui sert à le rendre explicite par un langage simple et rapide.

Ce lemme justifie les substitutions $x \to x + o$ et $y \to \frac{q}{p}o$ dans l'équation donnée entre x et y. Pour ce qui est ensuite de l'omission des puissance supérieures de o, lors de la comparaison de l'équation donnée avec celle qui est produite grâce à ces substitutions, elle est justifiée par l'exigence du retour des mouvements virtuels aux mouvements effectifs[32]. Évidemment, Newton ne peut fournir aucun argument *a priori* pour assurer que cette

[32]C'est au fond ce qui notera Lazare Carnot plus d'un siècle plus tard, en s'inspirant de la critique faite par Berkeley aux arguments de Newton : cf. respectivement Carnot (DTIM), (1797) et (1813) et Berkeley (1734) ; sur la théorie de Carnot, cf., entre autres, Dhombres et Dhombres (1997), 177-191.

omission est nécessaire et suffisante pour revenir à ces mouvements. Pour cela, il ne peut que faire confiance à la correspondance du résultat obtenu grâce à son nouvel argument cinématique avec les résultats que lui même et d'autres avaient déjà obtenu d'une autre manière, ou tout au plus à l'image géométrique de la tangente qui se confond avec la courbe dans le voisinage immédiat du point de tangence. Si la référence à des grandeurs infiniment petites s'installe alors au cœur de la naissante théorie de Newton ce n'est pas pour donner sens aux notions des vitesses p et q, mais pour s'assurer *a posteriori*, et en même temps en général, de la validité des résultats obtenus en se réclamant de l'introduction de ces vitesses, qui, en tant que telles, me semblent rester parfaitement au deçà de toute conception infinitésimaliste.

Loin d'être définies — explicitement ou implicitement — grâce à la référence à des incréments infiniment petits des segments x et y, les vitesses p et q semblent ainsi intervenir dans la preuve de Newton comme des entités primordiales, en termes desquelles ces incréments sont ensuite définis. Cette définition relève de deux volets. D'un côté, on dit de ces incréments qu'ils sont infiniment petits, ce qui fait qu'il se soumettent au principe d'omission des puissances supérieures. De l'autre, on dit qu'ils sont proportionnels entre eux selon un facteur de proportionnalité donné par le rapport des vitesses, et qu'ils correspondent à la différence entre les valeurs que les segments x et y acquièrent en deux instant successifs. La première de ces clauses est opérationnellement explicite (pourvu, d'ailleurs, qu'on sache, en chaque occasion particulière, à partir de quelle puissance ces incréments peuvent être éliminés), mais elle ne dépend pas des vitesses p et q. Aussi la deuxième est opérationnellement explicite, car elle permet d'écrire explicitement les deux incréments infiniment petits de x et y l'un par rapport à l'autre. La troisième est en revanche opérationnellement opaque, mais elle gère néanmoins la structure de la preuve. Or, les vitesses p et q ne sont pas explicitement introduites dans cette preuve que parce que leur rapport fournit le facteur U de proportionnalité entre les incréments de x et de y. Il s'ensuit que même si on voulait soutenir que ces vitesses sont définies en termes de ces incréments comme deux grandeurs dont le rapport fournit ce facteur de proportionnalité, encore leur présence dans la preuve de Newton ne dépendrait pas uniquement de leur définition opérationnellement explicite, mais aussi de la relation, opérationnellement opaque, qui les lie aux instants de temps et à leur succession. *A fortiori*, si on reconnaît que ces grandeurs entrent dans cette preuve comme des entités primordiales, on doit en conclure également que leur présence dans cette preuve est opérationnellement opaque. Cette preuve ne dépend donc pas d'un système de définitions explicites et préalables des entités sur laquelle elle porte, mais est intrinsèquement fondée sur une notion — celle de vitesse en tant que degré d'intensité d'une qualité intensive et locale du mouvement générateur d'un segment — qui ne saurait être éclaircie autrement que par la référence à une image physique, et donc, en dernière instance, par une métaphore.

La situation est donc analogue à celle qui tient aux applications de la méthode de Roberval que Newton avait présentées dans ses notes du 30 octobre et 8 novembre : la procédure mathématique est dictée par une image mécanique préalable et finalement extérieure ; loin d'avoir mathématisé la science du mouvement, Newton ne fait ainsi que se servir ici d'une mathématique justifiée grâce à une image mécanique originelle. Pour l'essentiel, cette situation ne changera pas dans les présentations successives que Newton donnera de sa méthode et marquera donc en profondeur sa théorie des fluxions. Il convient donc de l'éclairer par comparaison.

Dans l'exposition moderne la plus habituelle et élémentaire du *calcul*, la dérivée est définie en termes de la fonction primitive par une égalité explicite faisant intervenir la limite du rapport incrémentale ; l'algorithme connu ne fournit qu'une solution rapide et automatique du problème consistant à passer d'une fonction donnée à la limite de son rapport incrémentale. Dans le calcul différentiel leibnitien, la différentielle dy est définie comme la différence $f(x+dx)-f(x)$, où dx obéit aux règles opérationnelles caractérisant une quantité infiniment petite ; l'algorithme différentiel ne fournit qu'une solution rapide et automatique du problème de la détermination de cette différence. Au contraire, la notion de vitesse d'un mouvement qui engendre un segment n'est définie chez Newton par aucune égalité explicite liant cette vitesse à la variable à laquelle elle est associée. Et, si on n'en reste qu'à la considération de deux segments distincts, liés entre eux par une relation quelconque — qui n'est pas représentée géométriquement par une courbe dont ces segments sont des coordonnées cartésiennes, ou par n'importe quel autre système d'objets géométriques explicitement donnés —, alors le lien entre cette vitesse et cette variable ne peut pas non plus être indiqué par une construction géométrique déterminée, propre à conduire d'un des segments représentant ces grandeurs à l'autre. Le seul lien opérationnellement explicite entre cette vitesse et cette variable est celui qui est fournit par l'algorithme des vitesses, lorsque ceci s'applique. Le rôle que dans la formulation moderne du *calcul* est joué par l'égalité définitionnelle

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{9.6}$$

et dans le calcul différentiel de Leibniz par l'autre égalité définitionnelle

$$dy = f(x + dx) - f(x) \tag{9.7}$$

n'est joué dans la théorie de Newton que par le lemme qui intervient dans la preuve précédente. Ce lemme assure que si p et q sont les vitesses respectives des mouvements qui engendrent x et de y et que o est l'incrément que x subit “dans un moment”, alors l'incrément que y subit “dans le même moment” est égal à $\frac{q}{p}o$. Et la preuve de ce lemme ne se fonde, à son tour, que sur une notion primordiale de vitesse, et non pas sur une définition opérationnelle explicite.

La théorie newtonienne est donc une théories des vitesses dans un sens essentiellement distinct du sens dans lequel le calcul différentiel leibnitien est une théorie des différences infiniment petites, ou le *calcul* moderne est une théorie de la limite du rapport incrémentale. La preuve précédente rend manifeste cette circonstance qui fera en même temps la faiblesse et la force de la théorie des fluxions : sa faiblesse, car cette théorie résultera ainsi fondée sur une métaphore extérieure et préalable à toute procédure mathématique[33] ; sa force car elle sera de ce fait ainsi ouverte à la possibilité d'exploiter, en différentes situations particulières, des artifices démonstratifs différents se référant d'une manière ou d'une autre à cette métaphore, et acquerra de ce fait une très grande généralité — se présentant, en tant que telle, comme indépendant de la nature spécifique de la relation qui lie entre eux les segments x et y —, et suggérera la possibilité d'une théorie purement formelle de l'algorithme qui, en certains cas, en résulte associé.

[33]La critique que les mathématiciens continentaux adresserons habituellement tout au long du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle à la théorie des fluxions, selon laquelle cette théorie serait fondée sur des notions extra-mathématiques, a ainsi, il me semble, une justification profonde, même si les historiens successifs ont eu tendance à la considérer comme un simple argument rhétorique.

9.2 Les applications géométriques de l'algorithme des vitesses : tangentes et centres de courbure

Après avoir présenté et justifié son algorithme, Newton montre comment on peut l'employer pour trouver les tangentes et les centres de courbure de certaines sortes de courbes. C'est la deuxième partie de la note du 13 novembre[34], que Newton introduit par la formule suivante[35] :

> By helpe of the preceding problème divers others may bee readyly resolved [...].

9.2.1 La recherche des tangentes

Le premier de ces "autres problèmes" est justement celui des tangentes. À ce propos, Newton opère une double distinction.

D'abord, il distingue la solution de ce problème pour des "courbes géométriques" de sa solution pour des "courbes mécaniques", et n'applique son algorithme qu'à la solution de ce problème pour la première sorte de courbes. Il ne dit pas explicitement que cet algorithme ne peut pas être utilisé pour résoudre ce même problème pour la deuxième sorte de courbes, en se limitant, à ce propos, à renvoyer génériquement à la note du 8 novembre[36].

Il est néanmoins clair qu'avec le terme "courbe géométrique", Newton n'entend pas simplement une courbe exprimée par une équation Algébrique entière, par rapport à un certain système de coordonnées cartésiennes. Il énonce en fait le problème des tangentes aux courbes géométriques comme il suit[37] :

> To draw tangents to crooked lines (however they be related to streight ones).

Une courbe géométrique est donc, en général, une courbe qui est "connectée à des segments", c'est à dire qu'elle peut être exprimée comme un lieu géométrique satisfaisant une condition relevant de la relation qu'ont entre eux deux segments, quelle que soit la relation géométrique entre ces deux segments, pourvu que cette relation ne tient pas compte de la considération d'autres courbes ou de un ou plusieurs angles — ce qui signifie, selon Newton, que cette relation est telle qu'il est possible de l'exprimer par une équation Algébrique. En d'autres termes : une courbe est géométrique si elle se laisse exprimer par une équation Algébrique, par rapport à n'importe quel système de coordonnées rectilignes, cartésiennes ou non. Il est difficile de comprendre si Newton avait saisi que cette condition est équivalente à celle qui ne fait intervenir que des coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire que le passage d'un système de coordonnées rectilignes à un autre ne modifie pas la nature Algébrique de l'équation. Toujours est il que parmi les deux exemples qu'il présente pour la solution du problème des tangentes pour des courbes géométriques[38], le premier

[34]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [2], 386-389 : 386-387, pour le problème des tangentes ; 387-389, pour celui des centres de courbure.

[35]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [2], 386.

[36]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [2], 387 : "Hitherto may be reduced the manner of drawing tangents to mechanicall lines. see Fol. 50". Il s'agit du feuil 50 (p. 50v) du *Waste Book*, où commence la note du 8 novembre.

[37]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [2], 386.

[38]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [2], respectivement 386-387 et 387.

concerne une courbe exprimée par une équation Algébrique par rapport à des coordonnées cartésiennes, le deuxième une courbe exprimée par une équation Algébrique par rapport à des coordonnées bipolaires. S'il est facile de reconnaître que cette deuxième courbe, n'étant rien qu'une ellipse, peut aussi être exprimée par une équation Algébrique par rapport à un système de coordonnées cartésiennes, il reste qu'en choisissant comme coordonnées les rayons vecteurs qui joignent respectivement chacun de ses points aux deux foyers, il exprime cette courbe par une équation Algébrique de premier degré et il ne fait aucune allusion à une transformation possible de cette équation.

Cela ne signifie pas que la tangente à la courbe considérée se trouve de la même manière, quelle que soit la nature du système de coordonnées à laquelle la courbe géométrique considérée est référée. Si une courbe est pensée comme la trajectoire d'un mouvement composé, alors sa référence à un système de coordonnées cartésiennes correspond à l'interprétation de ce mouvement comme résultant d'une composition globale des deux mouvements rectilignes, ou, si on préfère, comme le mouvement du point d'intersection de deux droites mobiles qui translatent l'une sur l'autre. En revanche, sa référence à un système de coordonnées bipolaires correspond à l'interprétation de ce mouvement comme résultant d'une composition, en chaque point, de deux vitesses, dont la direction varie continuellement. Si dans le premier cas, on pourra donc se référer, sans faute, à la règle du parallélogramme, dans le deuxième cas, on devra en revanche opérer par projection orthogonale. C'est la deuxième distinction faite, bien qu'implicitement, par Newton.

Cette distinction nous apprend qu'il est impossible de renfermer l'ensemble des applications possibles de l'algorithme précédent à la solution du problème des tangentes pour des courbes géométriques dans une seule formule indiquant d'une manière univoque comment la tangente d'une courbe géométrique donnée peut être déterminée à partir de la donnée de l'équation qui l'exprime par rapport à un certain système de coordonnées rectilignes. Les modalités de cette détermination dépendent de la nature du système en question. La règle générale énoncée par Newton pour la solution du problème des tangentes pour une courbe géométrique ne peut ainsi qu'être assez vague[39] :

> Find (by the preceding rule) in what proportion those two lines to which the crooked line is cheifly related doe increase or decrease; produce them in the proportion from the given point in the crooked line; at those ends draw lines in which those ends are inclined to move, through whose intersection the tangent shall passe.

Si la courbe dont il est question est référée à un système de coordonnées cartésiennes, alors les extrémités des segments MQ et MN (fig. 1) qu'il faut tirer du point M, de telle sorte que leur rapport soit égale au rapport $\frac{q}{p}$, sont “inclinées à se mouvoir” parallèlement aux directions des coordonnées. On obtient ainsi la règle du parallélogramme et, grâce à la similitude entre les triangles MNT et tPM et à l'équation (9.5), l'égalité générale

$$stg._x = \frac{p}{q}y = -\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{i} A_{i-j,j}jx^{i-j}y^j}{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{i} A_{i-j,j}\,(i-j)\,x^{i-j-1}y^j} \tag{9.8}$$

[39]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [2], 386.

pourvu que la courbe AMJ soit naturellement exprimée par l'équation (9.3). Naturellement, cette égalité ne permet de déterminer la tangente cherchée qu'à condition de connaître les deux coordonnées du point M. Sans insister sur ce point, Newton illustre sa méthode sur un exemple très simple, une équation de deuxième degré à variables séparées, pour laquelle le calcul de y en termes de x est banal.

Si la courbe dont il est question est en revanche référée à des coordonnées bipolaires, alors les extrémités des segments MQ et MN (fig. 2) qu'il faut tirer du point M, de telle sorte que leur rapport soit égale au rapport $\frac{q}{p}$, sont "inclinées à se mouvoir" perpendiculairement à ces mêmes segments, car, dit Newton, les deux coordonnées $y = \mathsf{O'M}$ et $x = \mathsf{OM}$ "se meuvent en cercle" autour des origines[40] $\mathsf{O'}$ et O. Le rapport $\frac{p}{q}$ qu'il est possible de tirer de l'équation qui lie entre elles ces coordonnées en accord avec l'algorithme précédent ne donnera donc pas en général l'inclinaison de la tangente. La détermination de celle-ci tiendra alors à une construction qu'il sera difficile de renfermer dans une égalité générale analogue à l'égalité (9.8). Newton se limite d'ailleurs, aussi dans ce cas, à illustrer sa méthode par une exemple simple, celui d'une ellipse définie, par rapport aux coordonnées bipolaires x et y, par l'équation $x+y = a$, ce qui donne évidemment $\frac{p}{q} = -\frac{1}{1}$. Pour avoir la tangente cherchée, il suffira alors de prendre deux segments égaux respectivement sur y et sur le prolongement de x (ou *viceversa*), de construire le quadrilatère MQTN rectangle en Q et N et d'en tirer la diagonale.

* * *

La double distinction opérée par Newton témoigne d'un attitude que ce dernier n'abandonnera jamais plus par la suite, même quand il parviendra à donner une forme beaucoup plus accomplie à sa méthode. Bien qu'en possession d'un algorithme général fournissant le rapport angulaire de la tangente d'une courbe exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes quelconques, par une équation Algébrique connue, celui-ci ne se contente pas d'énoncer cet algorithme, et il ne fait aucun effort pour étendre ceci au delà des frontières des équations Algébriques (comme il aurait en revanche pu faire assez aisément, par exemple relativement à la courbe logarithmique, en exploitant le résultat obtenu dans la note du 8 novembre[41]). Il semble plutôt soucieux de ne pas cacher, derrière l'automatisme de cet algorithme, la construction géométrique à laquelle cette algorithme correspond. Ainsi, en même temps qu'il pose les bases de sa théorie des fluxions, et qu'il distingue entre le niveau général et abstrait des rapports des vitesses, et les situations particulières dans lesquelles la détermination de ce rapport peut conduire à la solution du problème des tangentes, il s'efforce de ne pas perdre de vue la spécificité géométrique de ces situations et pose aussi les bases de cette forme ancestrale de géométrie différentielle qui sera plus tard à l'œuvre dans la *Geometria curvilinea*[42], et surtout dans les *Principia*[43]. L'opposition, qu'on a (trop) souvent remarqué entre le jeune Newton, attiré par la puissance des formalismes Algébriques, et le Newton plus mûre, partisan d'une géométrie pure, libérée de ces formalismes inutiles et fourvoyants, semble ainsi se résoudre dans une tension originaire, qui remonte aux premières

[40]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [2], 387.
[41]Cf. la section 8.2.2.
[42]Cf. Newton (MP), IV, **3**, 1, 420-618. Sur la *Geometria curvilinea* et sur ses rapports avec les mathématiques des *Principia*, cf. Galuzzi (1995).
[43]Cf. Newton (1687).

recherches mathématiques de celui-ci, entre la recherche d'un formalisme agile et puissant et la volonté de ne pas cacher, derrière la puissance de ce formalisme, les constructions géométriques que ceci ne fait au fond que décrire.

9.2.2 La recherche des centres de courbure

Le deuxième des problèmes considérés par Newton est celui des centres de courbure des courbes géométriques, ou, comme le dit lui même, de la "quantité de courbure [*quantity of crookednes*]"[44] de ces courbes. La limitation aux courbes géométriques ne concerne pourtant, encore une fois, que la possibilité d'employer l'algorithme précédente pour déterminer les rapports entre certaines vitesses. Le lien entre ces rapports et la construction du centre de courbure porte en revanche sur la relation entre la courbe donnée et un certain système de coordonnées à laquelle celle-ci est référée, de manière tout à fait indépendante de la nature de la relation entre ces coordonnées qui caractérise la courbe en question. L'argument qui conduit Newton à déterminer ce lien porte donc sur toute sorte de courbes, géométriques ou non.

Cet argument et la construction à laquelle il aboutit ne dérivent au fond que d'une généralisation de la construction que Newton avait déjà présentée dans sa note du 30 octobre, en se rapportant à l'exemple de la cycloïde[45]. Cette fois, Newton est pourtant plus explicite, car il reconnaît d'emblée que si une courbe est pensée comme la trajectoire d'un mouvement, alors son centre de courbure coïncide avec le centre instantané de rotation de ce mouvement, ou, comme il dit, avec le "point de moindre mouvement".

> Find the point of the perpendicular to the crooked line — écrit il[46] — which is in least motion let that bee the center of a circle which passing through the given point shall be of equal crookednesse with the line at the point.

Le problème originaire se réduit ainsi, en toute généralité, à un autre problème : il s'agit de déterminer ce point de "moindre mouvement". Pour ce faire, Newton propose d'opérer comme il suit[47] :

> From any two points in the perpendicular to the crooked line draw 2 parallel lines in such proportion as the perpendicular moves over them; through their ends draw another line which shall intersect the perpendicular in the point required.

Ce n'est, au fond, qu'une nouvelle réduction. Si on suppose de connaître la normale à la courbe donnée dans le point où l'on cherche le centre de courbure, la détermination de ce centre ne revient qu'à la détermination du rapport entre deux "mouvements" : les mouvements de cette normale le long de deux droites parallèles tracées de deux points quelconques de celle-ci. Newton ne détermine pourtant pas ce rapport en général. Il se limite à observer que si : AMJ (fig. 3) est la courbe donnée, dont MG et MT sont respectivement la normale et la tangente dans le point M; AH est un axe quelconque qui coupe cette courbe en A; MZ est un segment pris sur la droite MS parallèle à AH et passant par M, égal aux

[44] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [2], 387.
[45] Cf. la section (8.2.1), en particulier pp. 417-417.
[46] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [2], 387.
[47] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [2], 387-388.

segment tG pris sur cet axe entre le point t, où ce dernier coupe la tangente, et le point G où il coupe la normale ; et MP est la perpendiculaire à l'axe AH tirée du point M ; alors le centre de courbure cherché est le point C, d'intersection entre la normale MG et la droite ZF passante par le point Z et par un autre point F, pris sur l'axe AH de telle manière que le rapport $\frac{\mathsf{tP}}{\mathsf{GF}}$ soit égal au rapport entre les mouvements de P et de G en provenance de A[48]. Comme la construction du point Z est immédiate, pourvu que l'on suppose de connaître la normale et la tangente à la courbe dans le point M, il ne s'agit que de construire le point F, en conformité à la proportion :

$$m(\mathsf{P} \leftarrow \mathsf{A}) : m(\mathsf{G} \leftarrow \mathsf{A}) = \mathsf{tP} : \mathsf{GF} \tag{9.9}$$

C'est une troisième réduction du problème proposé.

Comme on le voit, la construction de Newton, ainsi que la triple réduction qui la justifie, sont totalement indépendantes de la nature de la courbe dont il est question et aussi du fait que la courbe AMJ soit référée au système de coordonnées cartésiennes. Il est clair pourtant qu'elles sont pensées de manière à s'adapter à une situation dans la quelle on suppose de connaître les segments AP et PM qui caractérisent le point M selon le système de coordonnées cartésiennes orthogonales de axe AH et origine A. Et en effet Newton pose d'emblée, les égalités[49] $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{PM} = y$, et illustre sa construction par l'exemple[50] d'une ellipse exprimée, relativement à ce système de coordonnées, par l'équation

$$ax^2 + by^2 - abx = 0 \tag{9.10}$$

Au cours du traitement de cet exemple, il introduit des arguments géométriques de nature générale qui s'appliquent à n'importe quelle courbe référée à ce même système de coordonnées géométrique ou non, et qui servent à traduire la construction précédente dans une formule générale donnant l'ordonnée PD du centre de courbure. Voici ces arguments, libérés de la référence extrinsèque à l'ellipse exprimée par l'équation (9.10).

Quel que soit le point F, on aura, selon le théorème de Thales, la proportion

$$\mathsf{MZ} : \mathsf{GF} = \mathsf{MC} : \mathsf{GC} \tag{9.11}$$

et donc, en soustrayant et en observant que $\mathsf{MC} - \mathsf{GC} = \mathsf{MG}$:

$$\mathsf{MZ} - \mathsf{GF} : \mathsf{MZ} = \mathsf{MG} : \mathsf{MC} \tag{9.12}$$

Mais du théorème de Thales, on aura aussi

$$\mathsf{MG} : \mathsf{MC} = \mathsf{MP} : \mathsf{MD} \tag{9.13}$$

et donc, en composant

$$\mathsf{MP} : \mathsf{MD} = \mathsf{MZ} - \mathsf{GF} : \mathsf{MZ} \tag{9.14}$$

c'est-à-dire :

$$(stg._x + sn._x - \mathsf{GF}) : y = (stg._x + sn._x) : \mathsf{MD} \tag{9.15}$$

[48]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [2], 388 : "As if $\mathsf{AP} = x$. $\mathsf{PM} = y$. $\mathsf{MG} \perp \mathsf{Mt}$ = the tangent of the crooked line. $\mathsf{tPG} = \mathsf{MZ} \,||\, \mathsf{APGF}$. & as the motion of P from A to the motion of G from A so tP to GF. Then, drawing ZFC through the points Z & F, MC is the radius of the circle as crooked as [the] line AMJ at M".

[49]Cf. la note (48), ci-dessus.

[50]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [2], 388-389.

Il ne reste donc qu'à déterminer le segment GF en accord avec la proportion (9.9). Avant de se réclamer pour ceci de l'équation (9.19), exprimant la courbe choisie comme exemple, Newton revient au langage des vitesses[51]. D'abord, il identifie le mouvement $m(\mathsf{P} \leftarrow \mathsf{A})$ avec la vitesse p du mouvement qui engendre l'abscisse $\mathsf{AP} = x$ du point M. Ensuite, il identifie le mouvement $m(\mathsf{F} \leftarrow \mathsf{A})$ avec la somme du mouvement $m(\mathsf{P} \leftarrow \mathsf{A})$ et du mouvement $m(\mathsf{G} \leftarrow \mathsf{P})$ de G en provenance de P, et ce dernier mouvement avec la vitesse r de la sous-normale[52] PG, qu'il suppose être égale à z, ce qui donne l'égalité $m(\mathsf{F} \leftarrow \mathsf{A}) = p + r$. Comparée avec l'égalité connue $\mathsf{tP} = stg._x = \frac{p}{q}y$, la proportion (9.9) donnera ainsi l'égalité

$$\mathsf{GF} = y\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{q}\right) \tag{9.16}$$

et donc, selon la proportion (9.15) :

$$\left[stg._x + sn._x - y\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{q}\right)\right] : y = (stg._x + sn._x) : \mathsf{MD} \tag{9.17}$$

Pour simplifier son calcul, Newton représente — comme la position $\mathsf{MZ} = \mathsf{tG}$ le suggère — la vitesse p du mouvement qui engendre la variable principale x par la sous-tangente tP, ce qui produit les égalités $stg._x = \frac{p}{q}y = p$ et $q = y$. Celles-ci transforment la proportion (9.17) dans la nouvelle proportion[53]

$$(sn._x - r) : y = (p + sn._x) : \mathsf{MD} \tag{9.18}$$

C'est seulement à ce point qu'il est nécessaire de se réclamer de l'équation de la courbe et de l'algorithme précédent pour déterminer la vitesse r en termes de la vitesse p. En supposant donnée l'équation (9.10), Newton calcule d'abord la sous-normale PF et la sous-tangente TP :

$$\begin{aligned} sn._x &= \frac{q}{p}y = \frac{a}{2} - \frac{ax}{b} \\ stg._x &= p = \frac{y^2}{sn._x} = \frac{2by^2}{ab - 2ax} \end{aligned} \tag{9.19}$$

En comparant la première de ces égalités avec la position $sn._x = z$ il tire ensuite la nouvelle équation

$$2bz - ab + 2ax = 0 \tag{9.20}$$

d'où, en appliquent l'algorithme précédent, il est facile de tirer l'égalité

$$\frac{r}{p} = -\frac{a}{b} \tag{9.21}$$

qui, comparée à la deuxième des égalités (9.19), donne :

$$r = \frac{2y^2}{2x - b} \tag{9.22}$$

[51] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, notes (26) et (27), 388.

[52] En restant fidèle à ses conventions, Newton écrit, en effet "v" au lieu de "z", tout en supposant que r est la vitesse de v.

[53] Il est clair que si de cette proportion on tirait des formules dans lesquelles apparaît la vitesse q, il faudrait y opérer la substitution $q = y$. Ce ce que Newton notera dans le *Traité d'octobre 1666* : cf. ci-dessous, p. 539.

Il suffit alors de remplacer dans la proportion (9.18) $sn.{}_x$, p et r par leurs expressions données par les égalités (9.19) et par l'égalité (9.22), et de comparer cette proportion avec l'équation (9.10), pour tirer enfin

$$\mathsf{MD} = \frac{\frac{2by^2}{ab-2ax} + \frac{ab-2ax}{2b}}{\frac{ab-2ax}{2b} - \frac{2y^2}{2x-b}} y = \frac{4by^3 - 4ay^3 + a^2by}{a^2b} \tag{9.23}$$

et donc

$$\mathsf{PD} = \mathsf{MD} - y = \frac{4y^3}{a^2} - \frac{4y^3}{ab} \tag{9.24}$$

* * *

Dans l'exposition de Newton, la comparaison de la la proportion (9.18) avec l'équation (9.10) n'a pas seulement la fonction d'illustrer une procédure générale avec un exemple particulier ; elle sert aussi à établir un lien opérationnel explicite entre la vitesse r et les autres grandeurs auxquelles cette procédure se rapporte.

Comme on l'a déjà observé ci-dessus, lorsqu'on ne reste qu'à la considération de deux segments distincts liés entre eux par une relation quelconque, la vitesse de génération d'un de ces segments n'est opérationnellement liée à ce même segment que par le biais de l'algorithme exprimée par l'équation (9.2). Si on suppose que la vitesse dont il est question concerne le mouvement de génération d'un segment qui participe d'une système géométrique déterminé, alors le lien entre cette vitesse et ce segment peut aussi être représenté par une construction géométrique. Si on suppose que deux segments $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{PM} = y$ sont les coordonnées cartésiennes d'une courbe AMJ qu'on suppose donnée avec sa tangente dans le point M répondant à ces coordonnées, alors le lien entre y et q est indiqué par la construction qui conduit du segment PM au segment NT, le segment MN étant considéré comme un paramètre arbitraire qui intervient dans cette construction. Si on suppose en revanche que le segment z est la sous-tangente PG de cette même courbe, dont on suppose de connaître le centre de courbure C, alors le lien entre z et r est indiqué par la construction qui conduit du segment PG au segment GF, le segment MN étant considéré, aussi dans ce cas, comme un paramètre arbitraire qui intervient dans cette construction. Il est pourtant clair de ces exemples que les constructions géométriques qui indiquent ces liens présupposent non seulement que la courbe AMJ qui indique le lien entre x et y soit donnée, mais aussi que l'on connaisse au préalable les grandeurs géométriques qu'on est en revanche censé déterminer par la biais la détermination des vitesses q et r. Dans le contexte problématique fourni par la recherche de ces grandeurs, la prise en compte d'un système géométrique déterminé qui fixe les relations entre les segments x, y et z ne permet donc pas d'indiquer un lien opérationnel entre ces segments et les vitesses respectives par le biais d'une construction géométrique possible. La seule opportunité pour transformer le lien métaphorique entre un segment et la vitesse du mouvement qui le engendre dans un lien opérationnel explicite tient donc, aussi dans ce cas, à la prise en compte d'un système éventuel d'équations Algébriques qui lient entre eux les segments x, y et z et de l'algorithme exprimé par l'équation (9.2). Les équations (9.10) et (9.10) fournissent ce système dans le cas considéré. Ainsi, lorsqu'on veut raisonner en général, en absence d'un couple d'équations déterminées qui remplissent la même fonction, on ne peut que considérer des équations génériques, ou, pour être plus précis, des schémas d'équations auxquelles on assigne cette même fonction.

On comprend alors que, en termes strictement opérationnels, l'introduction des vitesses p, q et r, à côté des coordonnées x et y, de la sous-tangente et de la sous-normale relatives au point M, ne modifie pas essentiellement la situation par rapport à la note du 21 mai 1665[54]. La considération de ces vitesses, et surtout la disponibilité à penser la sous-normale comme un segment variable qui est à son tour généré par un mouvement doté d'une certaine vitesse, permettent d'écrire une formule plus compacte se réclamant implicitement à l'algorithme exprimé par l'équation (9.2), qui manifeste le rôle de nouveaux invariants autant géométriques qu'algorithmiques. Encore une fois, la formule qui exprime en général la relation entre le centre de courbure et les coordonnées du point M — qui consiste maintenant dans la proportion (9.18) — ne renvoie pourtant — au de là du lien métaphorique qui lie les segments x, y et $z = sn._x$ aux vitesses p, q et z — qu'à une procédure algorithmique consistant dans une suite de transformations de l'équation donnée. Ce n'est donc pas étonnant que après avoir présenté son exemple, Newton clôt sa note en renvoyant à la note du 21 mai[55] :

> Hence may bee pronounced those theorems in Fol 49.

Pour éclairer la situation il suffit de raisonner sur la manière dans laquelle on peut passer de la proportion (9.18) à une égalité analogue à celle qu'on connaît aujourd'hui[56].

En remplaçant dans cette proportion sn_x par son expression $\frac{q}{p}y$ en termes des vitesses p et q, et en posant $\mathsf{MD} = \mathsf{MP} + \mathsf{PD} = y + (-y_C)$, on obtient d'abord

$$y - y_C = \frac{y\left(p^2 + qy\right)}{qy - pr} \tag{9.25}$$

À partir de cette égalité, il faudra ensuite calculer la vitesse r de $sn._x = \frac{q}{p}y$. Grâce à la règle de différentiation du produit, on a :

$$pr = vel\,(q)\,y + q^2 \tag{9.26}$$

où $vel(q)$ est la vitesse du mouvement qui engendre le segment q . De là, en se rappelant que le schéma de Newton prévoit l'égalité $y = q$, il sera alors aisé d'obtenir enfin

$$y - y_C = -\frac{p^2 + q^2}{vel\,(q)} = -\frac{1 + \frac{q^2}{p^2}}{\frac{vel(q)}{p^2}} \tag{9.27}$$

qui, dans le langage des vitesses que Newton a enfin choisi, correspond à l'égalité (5.152).

Or, la seule manière pour obtenir une égalité analogue à l'égalité (9.26) conformément aux méthodes de Newton serait de poser $sn._x = z$, de passer de l'égalité $sn._x = \frac{q}{p}y$ à l'équation $zp - qy = 0$, de supposer p constante et d'appliquer à cette équation, pensée comme une équation dans le trois variables z, q et y, l'algorithme exprimé par l'équation

[54] Cf. la section 5.5.2.

[55] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, 389. La référence de Newton est évidemment au feuille 49 du *Waste Book*, qui contient justement la note du 21 mai 1665.

[56] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6 § 3, note (31), 388-389.

(9.2). Mais — bien qu'en se posant, quelques semaines auparavant, le problème du retour de l'équation des mouvements à l'équation des variables[57], Newton ait montré être disposé à considérer formellement q comme une variable analogue aux variables x et y, et que ses constructions de la tangente et du centre de courbure montrent qu'il n'a aucune difficulté à représenter la vitesse q par un segment variable — il ne semble pas encore disposé à concevoir q comme un segment généré par un mouvement doté d'une certaine vitesse $vel\,(q)$. En lieu de procéder comme l'on vient de montrer pour parvenir à renfermer sa solution du problème du centre de courbure dans une formule compacte et générale comme la (9.27), il se réclame ainsi de l'équation de la courbe et de l'expression de $sn._x$ en termes de x qui en dérive, pour parvenir à écrire une équation en $z = sn._x$ et x, à laquelle appliquer l'algorithme exprimé par l'équation (9.2). La raison de ce comportement — si loin de l'esprit aussi bien du *calcul*, comme nous l'entendons aujourd'hui, que du calcul différentiel leibnitien — semble tenir au fait que la métaphore mécanique qui donne sens à la notion de vitesse du mouvement qui engendre un segment n'est pas réitérable directement : si on peut bien sur concevoir la vitesse du mouvement qui engendre le segment qui, dans un certain schéma géométrique, représente la vitesse q, on ne peut pas pas concevoir la vitesse du mouvement qui engendre la vitesse q. Pour trouver une manière d'exprimer le lien opérationnel entre r et les autres grandeurs sur lesquelles porte le problème du centre de courbure, il ne reste donc que de se confier à l'algorithme exprimé par l'équation (9.2) et, donc, à l'équation de la courbe, soit elle une équation particulière ou, plus proprement un schéma d'équations possibles.

On comprends alors que la vitesse r du mouvement qui engendre la sous-tangente, n'a rien de similaire à ce que nous pensons aujourd'hui comme une différentielle ou une dérivée deuxième. Elle est, exactement comme la vitesse des mouvements qui engendrent respectivement l'abscisse et l'ordonne, une vitesse de génération d'un segment. Et on peut se réclamer de l'algorithme donné pour déterminer l'expression Algébrique du rapport entre les vitesses de génération de ce segment et du segment x si et seulement si ce segment peut être exprimé, en termes de x, par une équation Algébrique. Il s'ensuit que la proportion (9.18) n'aurait pas pu être lue par Newton comme une expression, pour ainsi dire directe, de l'ordonnée du centre de courbure, et qu'elle ne pouvait que rester à ses yeux qu'une indication de la procédure à suivre pour passer de l'équation Algébrique d'une courbe donnée à l'expression de sa normale et de l'ordonnée du centre de courbure.

Cela ne doit pas cacher la nouveauté essentielle due à l'introduction des vitesses et à la considération de leur rapports. C'est en effet grâce à ceci que Newton peut désormais lire cette procédure comme l'expression algorithmique d'un lien plus général dont le lien géométrique entre les coordonnées d'une courbe et le centre de courbure de cette courbe n'est qu'un cas particulier, ce lien étant justement celui qui lie un segment à la vitesse de son mouvement générateur[58]. Tout simplement, ce lien n'a pas, en tant que tel, un contenu opérationnel précis, ne relevant, en dernière instance, que d'une métaphore mécanique propre à justifier l'établissement d'un algorithme.

[57] Cf. la section 7.3.2.

[58] C'est ce qui permet à Newton d'éviter de considérer les valeurs de l'ordonnée et de la sous-normale de la courbe relatives à deux points infiniment proches l'un de l'autre, comme il l'avait fait en revanche dans la note du 21 mai. En raisonnant sur les mouvements générateurs et sur leurs vitesses, il est désormais à même d'exprimer la condition générale caractérisant le centre de courbure par une proportion, comme la (9.18), où n'interviennent que des grandeurs référées au point M, relativement auquel l'on cherche le centre de courbure.

* * *

En ayant éclairé ce point essentiel, il ne reste qu'à comprendre comment la construction proposée par Newton, et en particulier la proportion (9.18), peuvent être justifiées[59].

En comparant la figure 3 avec la figure 8 du chapitre 8, on s'aperçoit aisément que la nouvelle construction proposée par Newton est équivalente à celle que ce dernier avait employé le 30 octobre pour trouver le centre de courbure de la cycloïde[60], si et seulement si les points indiqués par la lettre "F" dans ces deux figures coïncident. Les triangles TNZ et MPG étant en fait égaux dans la figure 3 et leur côtés étant parallèles, selon le schéma de Newton, la normale MG rencontre la droite ZF au même point où cette même normale rencontre la droite TV de la figure 8 du chapitre 8. La nouvelle construction de Newton est donc justifiée par les mêmes raisons qui justifient la construction du 30 octobre, pourvu que l'extrémité F du segment GF dans la figure 3 corresponde à la position à laquelle le point G, en se mouvant sur l'axe AH, parvient en même temps que le point M, en se mouvant sur la tangente tM, parvient à la position T. Or le mouvement du point M, de M à T sur la tangente tM, pris pour lui-même, correspond, lors qu'il est projeté orthogonalement[61] sur la droite MS, au mouvement du point M générant le segment MZ, à condition que TZ soit, comme dans la construction de Newton, perpendiculaire à MT. Donc le point auquel la normale MG parvient à couper l'axe AH au même temps que cette même normale parvient à couper la droite MS au point Z est justement celui auquel le point G, se mouvant sur l'axe AH, parvient en même temps que le point M, en se mouvant sur la tangente tM, parvient au point T. Cela justifie la deuxième réduction opérée par Newton.

Comme la première réduction ne tient qu'à la nature du centre de courbure, il ne reste alors qu'à justifier la troisième réduction. Pour cela il suffit pourtant d'observer que la vitesse du mouvement de translation de la normale MG le long de l'axe AH au point G n'est rien d'autre que de la vitesse du mouvement qui engendre la somme AF de l'abscisse AP $= x$ et de la sous-normale PG $= sn._x$, ainsi si on pose, comme dans le schéma de Newton, tP$=$ $stg._x = p$, on aura justement GF $= p + r$, comme le suppose ce dernier.

[59]Bien qu'éclairante pour nous, la reformulation des résultats de Newton dans le formalisme du calcul différentiel proposée par Whiteside [cf. Newton (MP), I, 2, 6, § 3, notes (28), (31) et (32), 388-389] ne peut servir pour justifier la démarche newtonienne, dans laquelle ces rapports différentielles ne peuvent, tout au plus, qu'être identifiés *a posteriori*.

[60]Cf. la section (8.2.1).

[61]Cf. la note 29, ci-dessous.

Chapitre 10

La première esquisse d'un traité sur la solution des problèmes géométriques à l'aide de la théorie des mouvements composés (14 et 16 mai 1666)

Quand, le 14 mai 1666, après une interruption de six mois, Newton s'occupa à nouveau de mathématiques, il le fit dans l'objectif de réunir l'ensemble des résultats qu'il avait atteint jusqu'alors dans un traité exposant les possibles applications géométriques de la théorie des mouvements composés. La note qu'il rédigea[1] ne consiste pourtant que dans l'énoncé de sept propositions qui sont présentées comme étant "très utiles"[2] pour résoudre les problèmes géométriques abordés dans la note du 8 novembre 1665 (essentiellement le problème des tangentes et des normales et celui des centres de courbure)[3]. La fonction que ces propositions auraient dû accomplir au sein d'un tel traité est d'exposer en général, et de la manière la plus précise et la plus explicite possible, cette même théorie, en faisant abstraction de tout formalisme particulier qui eût pu être employé pour exprimer la relation entre plusieurs mouvements.

La formulation de ces propositions ne satisfit pas Newton. Il ne s'était passé que deux jours lorsque, le 16 mai, Newton raya la totalité de sa note, et recommença à rédiger son traité dès le début. La nouvelle esquisse fait l'objet d'une nouvelle note[4], où l'énoncé de sept propositions est suivi de quelques applications concernant la recherche des tangentes d'une ellipse et d'une conchoïde et du point d'inflexion de cette dernière.

[1] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [1], 390-392.
[2] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [1], 390.
[3] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [1], note (2), 390.
[4] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 392-399 ; la même note est aussi partiellement reproduite en Newton (C), III, n° 348, 54-59.

Les cinq premières propositions des deux esquisses se correspondent une à une, bien que Newton apporte, dans la deuxième esquisse, quelques corrections locales. La sixième et la septième propositions de la première esquisse sont en revanche réunies, lors de la seconde esquisse, dans une seule proposition, la sixième, qui, de surcroît, en généralise le propos. La septième proposition de la seconde esquisse ne correspond donc à aucune proposition de la première esquisse ; elle porte sur un problème essentiellement distinct de celui qui est abordé par les propositions qui la précèdent, car elle ne fait qu'exposer l'algorithme des vitesses, qui avait fait l'objet de la note du 13 novembre.

Les différences entre les sept propositions énoncées dans la note du 14 mai et les six premières propositions énoncées dans la note du 16 mai ne sont pas profondes au point de justifier un traitement séparé de ces deux notes. On ne considérera donc ici que la deuxième, en indiquant, cas par cas, les différences principales entre les deux versions.

10.1 La géométrie de la composition des mouvements : les propositions 1-6 de la note du 16 mai

La première de ces différences apparaît d'entrée. Au lieu de qualifier ses propositions de "très utiles" pour la solution des problèmes des tangentes et des centres de courbure, Newton déclare, en ouverture de sa note du 16 mai, que les "six propositions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour résoudre les problèmes par le mouvement"[5]. À cette affirmation, très péremptoire — que Newton ne justifie d'ailleurs que par ses exemples — font suite non pas six, mais sept propositions. Whiteside[6] prend cette affirmation comme une coquille qui montrerait que Newton a ajouté la septième proposition de sa deuxième esquisse seulement "*afterthought*". Il est sans doute possible que Newton ait écrit sa déclaration d'ouverture alors qu'il ne pensait que rédiger six propositions et qu'il ne l'ait pas ensuite corrigée ; mais il me semble également possible qu'il n'ait voulu expressément que se référer aux six premières des sept propositions qui suivent sa déclaration. Cela indiquerait que celui-ci a voulu rendre explicite la distinction entre la théorie générale des mouvements composés — qu'on pourrait qualifier de "géométrie de la composition des mouvements" — et l'algorithme qui, dans certaines circonstances, peut être employé pour passer de l'expression des relations entre deux ou plusieurs mouvements à l'expression des relations entre les vitesses respectives de ces mouvements. Non seulement ce dernier algorithme ne s'applique en fait qu'à une partie des situations géométriques dont traite la première théorie, mais toutes les fois qu'il est possible de l'appliquer, son application est réglée et justifiée par cette même théorie.

À l'exception près des deux premières propositions de la note du 14 mai, les propositions énoncées par Newton ne sont guère accompagnées de preuves. Il semble clair néanmoins que celui-ci ne les entend pas comme des axiomes, pensant en revanche pouvoir les déduire d'une source logiquement antérieure, qu'il ne sait pourtant pas indiquer de manière précise. L'ordre dans lequel se suivent ces propositions semble en effet témoigner d'un parcours déductif que Newton a probablement vaguement imaginé sans le rendre vraiment explicite, et que l'on va chercher ici à reconstruire.

[5]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 392.
[6]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, note (19), 393.

10.1.1 Projection orthogonale et règle du parallélogramme (propositions 1 et 2)

Les deux premières propositions énoncées par Newton dans la note du 16 mai sont les suivantes[7] :

> *Prop* 1. If the body a being in the perimeter of the circle or sphære adce [fig. 1] moveth towards its center b, its velocity to each point d. c. e. of the circumference is as the cordes ad, ac, ae, drawne from the body to those points are.
>
> *Prop* $2^{\rm d}$. If the $\triangle$s acb, afb [fig. 2][8], are alike though in divers planes ; & 3 bodies move from the point a uniformely & in equal times, the first to c, the $2^{\rm d}$ to f, the $3^{\rm d}$ to b : then the $3^{\rm d's}$ motion compounded of the motion of the $1^{\rm st}$ & $2^{\rm d}$.

Dans l'énoncé de la proposition 1, tel qu'il apparaît dans la note du 14 mai, on lit "its motion or velocity" à la place de "its velocity". Le terme "velocity" se substitue de surcroît au terme "acceleration" que Newton avait d'abord écrit puis rayé[9].

Si l'élimination du terme "vitesse" dans la note du 16 mai semble répondre à un souci de clarification[10], la présence des trois termes "mouvement", "vitesse" et "accélération" dans la note du 14 mai semble indiquer que Newton fut convaincu que mouvements, vitesses et accélérations se projettent et se composent conformément aux mêmes lois. On sait que ceci est un principe fondamental de la mécanique classique, pourvu qu'on remplace les accélérations par les forces qui les entraînent. En 1666 Newton était pourtant bien loin des acquis justifiant ce principe.

Le point délicat concerne évidemment les accélérations. Newton semble en effet employer les termes "mouvement" et "vitesse" pour se référer à la même grandeur physique qu'il représente géométriquement par un segment censé être décrit au cours d'un certain temps par un point mobile. Mais, même si on assigne à ces termes les significations distinctes qu'ils vont acquérir plus tard dans le contexte de la mécanique classique, toujours est-il que la correspondance entre les lois de projection et de composition des mouvements et celles de projection et de composition des vitesse ne dépende que du fait que les vitesses se laissent géométriquement représenter tout naturellement de la même manière que les mouvements, c'est-à-dire par des segments qui sont censés être décrits au cours d'un certain temps par un point qui se meut selon un mouvement rectiligne uniforme. Pour comprendre que cette même représentation géométrique est également convenable pour les accélérations — ce qui a comme conséquence immédiate que ces mêmes lois de projection et de composition s'appliquent aussi à ces dernières — il faut passer par une étape intermédiaire qui est loin d'être triviale. Il faut d'abord concevoir l'accélération comme une grandeur et passer de celle-ci à la force qui l'engendre, ce qui est au fond l'un des actes fondateurs de la

[7] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 392 ; cf. aussi, pour la note du 14 mai, *ibid.*, [1], 390.

[8] Pour rendre plus clair l'argument de Newton, j'ai reporté la figure comme elle est dessinée dans la note du 14 mai et j'en ai changé les lettres.

[9] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, note (4), 390.

[10] Comme on pourra facilement inférer des citations qui vont suivre, ce souci semble disparaître dans la suite de la note, où Newton continue, comme dans l'automne 1665, à employer le terme "mouvement" pour se référer à la "détermination" ponctuelle d'un mouvement, c'est-à-dire, dans notre langage, à sa vitesse ponctuelle [cf., la section 8.2.1, en particulier pp. 415-415, et la note (24), ci-dessous].

mécanique classique. Ensuite, il faut revenir des forces à leurs effets, mais concevoir ceux-ci non plus comme de simples variations de vitesse, mais comme des mouvements rectilignes uniformes engendrés par des impulsions. Seulement à ce moment là, une force, et donc une accélération, pourra être représentée géométriquement par un segment qui est censé être décrit au cours d'un certain temps par un point mobile. Or, il est fort douteux que Newton ait eu une conception claire de la possibilité et de l'opportunité de ce détour déjà au printemps 1666. Il est plus probable qu'il ait d'abord employé le terme "accélération" tout simplement pour faire écho à ses sources, en particulier à Galileo, et qu'il l'ait ensuite rayé, pour éviter d'introduire des difficultés étrangères à la nature de son propos.

C'est ce que Whiteside[11] semble suggérer en faisant l'hypothèse que la première des deux propositions précédentes ait été "inspirée" à Newton par sa lecture des *Discorsi* de Galileo[12]. Bien que la géométrie sous-jacente à cette proposition rappelle de très près le théorème VI du traité *De motu naturaliter accelerato* qui est discuté dans dans la troisième journée des *Discorsi*[13], les phénomènes mécaniques qui sont étudiés dans les deux cas sont pourtant essentiellement distincts ; il semble artificiel de vouloir réduire celui qui est étudié par Galileo à celui qui est étudié par Newton, même à condition de prendre en compte un cercle infiniment petit, comme l'imagine Whiteside. La suggestion de ce dernier ne doit pour autant pas être écartée, car, malgré cette différence, il semble possible de retrouver une similarité structurelle entre les deux premières propositions des deux esquisses de Newton et un fragment du traité *De motu naturaliter accelerato*. Pour saisir cette similarité, il faut considérer ce traité de plus près.

Galileo et la théorie de la chute le long de plans inclinés

Le problème abordé par Galileo est celui de la comparaison des temps de chute d'un corps le long de plans inclinés différents. La proposition VI du traité *De motu naturaliter accelerato* affirme que si le diamètre ac d'un cercle donné adc (fig. 1) est perpendiculaire à l'horizon hk, alors les temps de chute le long de n'importe quel plan incliné dont la section est donnée par une corde de ce cercle passant par le point a, sont égaux entre eux. Si les cordes ad, ac et ae sont ainsi les sections de trois plans inclinées sur l'horizon hk, ce théorème nous assure que les temps de chute le long de ces plans sont égaux entre eux.

Galileo propose trois preuves pour cette proposition ; parmi elles, deux se servent comme d'un lemme de la proposition V du même traité, qui dépend à son tour de la proposition III[14].

Cette dernière proposition est cruciale dans la théorie galiléenne de la chute le long de plans inclinés, car elle affirme que le temps de chute le long d'un plan incliné quelconque est au temps de chute le long de la verticale qui donne l'élévation de ce plan sur une parallèle à l'horizon, comme la section du plan incliné est à cette verticale. En d'autres termes, si on considère (fig. 3) un triangle ACD rectangle en D, dont le côté $\mathsf{AD} = h$ est supposé être perpendiculaire à l'horizon (l'autre côté CD étant parallèle à celui-ci) de sorte que

[11] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, note (5), 390-391.

[12] Que Newton ait lu les *Discorsi* avant le 14 mai 1666 n'a rien d'invraisemblable, car le traité de Galileo [cf. Galilei (1638)] était paru en anglais, dans la traduction de Salusbury, en 1665 [cf. Galilei (DS)] et une copie de cette traduction était disponible à la bibliothèque du *Trinity College* [cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, note (5), 390].

[13] Cf. Galilei (EN), VIII, 221-223.

[14] Cf. Galilei (EN), VIII, respectivement 220-221 et 215-219.

l'hypothèse $\mathsf{AC} = x$ représente la section d'un plan incliné, et si on indique par le symbole "t_z", z étant un segment quelconque, le temps de chute le long d'un plan dont z est la section, alors :

$$t_x : t_h = x : h \tag{10.1}$$

En langage moderne ceci revient à exprimer le mouvement de chute le long d'un plan incliné (à partir d'une vitesse initiale nulle), par l'équation

$$s = (g \sin \alpha)\, t^2 = g \frac{h}{x} t^2 \tag{10.2}$$

où g est la constante de gravité et α l'inclinaison du plan, c'est-à-dire, dans notre cas, l'angle $\mathsf{A\hat{C}D}$ formé par l'hypoténuse AC et le côté CD (parallèle à l'horizon) du triangle donné. Pour démontrer ce théorème en termes modernes, il suffit ainsi de partir de l'équation

$$s = gt^2 \tag{10.3}$$

exprimant le mouvement de chute libre (à partir d'une vitesse initiale nulle), et d'appliquer les principes de projection et de composition des forces.

Il est pourtant clair que Galileo ne pouvait pas prouver son théorème de cette manière. Il le prouve sans faire intervenir aucun principe de composition, et en n'exploitant qu'un principe de projection purement géométrique. En bref, il observe que "le degré de vitesse du mobile, acquis du point [...] où commence le mouvement [de chute]" (le sommet A du triangle donné) est le même dans tout point de la perpendiculaire à l'horizon (par exemple le point D' du côté AD de ce triangle) que dans la projection orthogonale de ce point sur la section du plan incliné (le point C' de l'hypoténuse AC de ce triangle où la perpendiculaire à son côté AD tirée de D' rencontre cette hypoténuse). C'est ainsi, nous dit Galileo, parce que "les excès sur l'horizon" de ces deux points — les points D' et C' — sont égaux entre eux. Il s'ensuit, continue-t-il, qu' "aux deux espaces x et h est conféré [*conficiuntur*] le même degré de vitesse", de sorte que les temps de chute le long de ces espaces (segments) sont entre eux comme ces espaces (segments) mêmes[15].

Traduite en termes modernes, cette preuve se fonde sur l'égalité entre l'énergie potentielle acquise au point D' par le corps qui chute le long de la verticale AD et l'énergie potentielle acquise au point C' par le corps qui chute le long du plan incliné de section AC[16], égalité qui ne tient à son tour qu'au fait que l'énergie potentielle en question ne dépend que de la distance de l'horizon des points D' et C'. Cela ne la rend pourtant pas moins problématique. En effet, non seulement Galileo était bien loin de pouvoir formuler cette preuve de cette manière, mais il ne pouvait non plus se fonder sur rien d'analogue aux

[15]Cf. Galilei (EN), VIII, 216-217.

[16]Galileo suppose en d'autres termes que l'agrégat des composants verticaux des vitesses ponctuelles du corps qui chute le long du plan incliné de section AC, calculées dans tous les points qui séparent A de C', est égal à l'agrégat des vitesses du corps qui chute le long de la verticale AD, calculées dans tous les points qui séparent A de D'. Or, si on pose $\mathsf{AD}' = \chi$ et $\mathsf{AC}' = \xi$, on aura $\frac{\chi}{\sin \alpha}$ et, en accord à l'équation (10.2), cette égalité correspondra à la suivante

$$\int_0^{\frac{\chi}{\sin \alpha}} 2 \sin \alpha \sqrt{g \sin \alpha} \sqrt{s} ds = \int_0^{\chi} 2\sqrt{g}\sqrt{s} ds$$

qui est évidemment correcte

équations des mouvements de chute. Là où nous écrivons ces équation, il n'aurait pu écrire que la proportion (10.1) qu'il s'agissait justement de démontrer. Non seulement la preuve qu'il fournit est obscure, en tant que telle, mais elle semble de plus courir le risque de la circularité.

Galileo doit d'ailleurs avoir entrevu les difficultés de sa preuve. Après la publication des *Discorsi*, il conçut en effet une assez longue addition en italien (qu'il dicta d'abord, sous forme de dialogue, et qui fut ensuite récrite en forme discursive par V. Viviani[17]), qu'il projeta d'insérer dans une réédition de son traité, avant l'énoncé de la proposition III du traité *De motu naturaliter accelerato*. Cet ajout aurait du prendre la forme d'une intervention de Salviati, où ce dernier "prépare" ses interlocuteurs à la preuve de cette proposition[18], en se posant le problème de trouver la position d'équilibre d'une ficelle passant par le sommet A du triangle ACD, aux deux extrémités de laquelle on aurait attaché deux poids qui tendent ainsi à chuter respectivement le long de la verticale AD et le long du plan incliné de section AC. À l'aide du principe de décomposition des forces, Galileo montre[19] que "le moment de la chute" du premier de ces corps est au "moment de la chute" du second comme $\mathsf{AD} = h$ est à $\mathsf{AC} = x$.

Cette addition tardive (qui n'apparaît pas dans la traduction anglaise des *Discorsi* que Newton a probablement lue[20]), n'enlève pas à la démarche de Galileo, aussi insatisfaisante qu'elle soit, le pouvoir de suggérer une argumentation possible, propre à prouver l'égalité des temps de chute le long des plans ad, ac et ae (fig. 1) sans se réclamer des principes de projection des vitesses et de composition des forces. En effet il est facile de tirer de la proposition III les proportions suivantes (fig. 3) :

$$\begin{aligned} t_{\mathsf{AE}} : t_{\mathsf{AB}} &= \mathsf{AE} : \mathsf{AB} \\ t_{\mathsf{AC}} : t_{\mathsf{AE}} &= \mathsf{AF} : \mathsf{AE} \end{aligned} \tag{10.4}$$

où AB est la section d'un nouveau plan incliné formant avec AC un angle quelconque, GB et LF sont perpendiculaires à AD, et AL est le moyen proportionnel entre AG et AD. De là, il s'ensuit que la proportion entre le temps de chute le long de AC et le temps de chute le long de AB est composée des proportions de AC à AB et de AG à AL, c'est-à-dire que si

$$\begin{aligned} \mathsf{AC} : \mathsf{AB} &= L : K \\ \mathsf{AG} : \mathsf{AL} &= K : M \end{aligned} \tag{10.5}$$

alors

$$t_{\mathsf{AC}} : t_{\mathsf{AB}} = L : M \tag{10.6}$$

Ceci est justement le contenu de la proposition V.

Or, si les sections AB et AC des deux plans inclinés sont délimitées par un cercle (fig. 4), et que AL est encore le moyen proportionnel entre les hauteurs AG et AD de ces plans inclinés, on aura la proportion :

$$\mathsf{AB} : \mathsf{AC} = \mathsf{AG} : \mathsf{AL} \tag{10.7}$$

[17]Cf. Galilei (EN), VIII, 23-24 ("Avvertimento" di A. Favaro).

[18]Cf. Galilei (EN), VIII, 214-219.

[19]Cf. Galilei (EN), VIII, 216.

[20]Cf. la note (12), ci-dessus. L'interpolation apparaît dans l'édition de Bologne [cf. Galilei (1655), 132[*c*]-134], dans la version de Viviani [cf. la note 17, ci-dessus].

et donc la proportion entre le temps de chute le long de AC et le temps de chute le long de AB sera composée des proportions de AC à AB et de AB à AC et sera ainsi une raison d'égalité. Le temps de chute le long de AB sera donc égal au temps de chute le long de AC, comme l'affirme la proposition VI.

Celle-ci est justement la première des trois preuves proposées par Galileo pour cette dernière proposition[21].

La troisième de ces preuves[22] semble faite en revanche pour suggérer la possibilité de lier la proposition VI à la géométrie du principe du parallélogramme. Il suffit en fait d'observer que AB (encore fig. 4) est moyen proportionnel entre AI et AG, pour tirer de la seconde des proportions (10.4) la nouvelle proportion

$$t_{\mathsf{AI}} : t_{\mathsf{AG}} = \mathsf{AB} : \mathsf{AG} \tag{10.8}$$

d'où, selon la proportion (10.1), il s'ensuit que :

$$t_{\mathsf{AI}} : t_{\mathsf{AG}} = t_{\mathsf{AB}} : t_{\mathsf{AG}} \tag{10.9}$$

Donc, quelle que soit la corde AB, pourvu que A soit son origine, on aura l'égalité

$$t_{\mathsf{AB}} = t_{\mathsf{AI}} \tag{10.10}$$

ce qui correspond justement au contenu de la proposition VI. Le même argument, observe Galileo, nous conduit de surcroît à prouver que

$$t_{\mathsf{MI}} = t_{\mathsf{AI}} \tag{10.11}$$

quelle que soit la corde MI d'origine I.

Or, en suivant la suggestion implicite de cette troisième preuve, considérons deux corps qui chutent le long de deux verticales qu'on prendra égales aux segments ac et af (fig. 2). Ils termineront respectivement leur chute au même moment que deux autres corps chutant le long de deux droites inclinées ad et ae, pourvu que les angles $\mathsf{a\hat{d}c}$ et $\mathsf{a\hat{e}f}$ soient droits. Ceci est tout simplement le contenu de la proposition VI de Galileo, ainsi qu'il apparaît dès que cette proposition est démontrée conformément à cette troisième preuve. La dernière remarque de Galileo nous autorise de surcroît à conclure que si les deux mouvements le long des verticales ac et af se font successivement, d'abord celui le long de la verticale ac puis celui le long d'une verticale cb égale à af, ou d'abord celui le long de la verticale af puis celui le long d'une verticale fb égale à ac, le second de ces mouvements se terminera au même moment que le mouvement d'un corps qui chute le long du plan incliné de section ab, car $\mathsf{ab} = \mathsf{ad} + \mathsf{ae}$. C'est un principe de composition de temps propre à des mouvements qui respectent les lois qui réglant la chute des corps ; en langage moderne c'est un principe de composition de temps propre à des mouvements uniformément accélérés.

[21] Cf. Galilei (EN), VIII, 221.

[22] Cf. Galilei (EN), VIII, 222-223. La deuxième preuve [cf. Galilei (EN), VIII, 221-222] est, comme le dit Galileo, “mécanique”, en faisant intervenir le rapport entre le moment d'un poids qui chute le long d'un plan incliné et le moment du même poids qui chute le long de la verticale. Si elle ne se réclame pas ouvertement de la proposition III, elle repose sur des principes qui pourraient être employés pour prouver cette proposition.

Newton applique la suggestion de Galileo

La démonstration que Newton propose, dans la note du 14 mai, pour la proposition 2 est la suivante[23] :

> *Demonstration.* For makeing $\mathsf{cd} \parallel \mathsf{fe}\perp\mathsf{ab}$ [fig. 2] the motion of the first body towards c is to its motion towards d as ac to ad (prop. 1) ; & the motion of the second body towards f is to its motion towards e, as af to ea (prop. 1). But $\mathsf{ad}+\mathsf{ae}=\mathsf{ab}$. Therefore &c.

C'est la même structure que l'argument que je viens d'esquisser, conduisant de la proposition VI de Galileo à un principe de composition de temps propre à des mouvements uniformément accélérés. Cet argument est référé, pourtant, dans le cas de Newton, non pas à des mouvements uniformément accélérés, mais à des mouvements uniformes. Ceci a évidemment des conséquences sur le contenu spécifique de l'argument de Newton. Bien que structuralement analogue à celui qui est suggéré par Galileo, il ne peut pas être identique à celui-ci ; il ne peut non plus conduire à prouver la même chose.

Certes, rien n'empêche de supposer que les mouvements uniformes considérés par Newton ont une vitesse constante égale à la vitesse moyenne de certains mouvements uniformément accélérés (c'est-à-dire, comme l'assure le théorème du *Merton College*, à la vitesse instantanée de ces mouvements évaluée lorsque la moitié du temps séparant leur début de leur fin s'est écoulée). Mais, comme Newton suppose que les mobiles, se mouvant le long des directions ac et af, parviennent aux points c et f en même temps, si on suppose de surcroît (comme on doit le faire dans le cas général) que les segments ac et af ne sont pas seulement différents entre eux, mais sont aussi quelconques — c'est-à-dire qu'ils ne sont pas liés entre eux par une relation particulière —, alors on doit supposer non seulement que ces mouvements ont des vitesses constantes différentes, mais aussi que ces vitesses ne sont pas nécessairement les vitesses moyennes des mouvements de chute qui se font le long de deux verticales égales en longueur aux segments ac et af. Bref, la supposition que les mouvements uniformes considérés par Newton aient une vitesse constante égale à la vitesse moyenne de certains mouvements uniformément accélérés ne nous aide pas à reconstruire le contexte de Galileo. Les deux mouvements le long des directions ac et af doivent donc être considérés comme des mouvements indépendants entre eux et donc traités séparément. Ceci est justement ce que fait Newton, en rapportant séparément ces mouvements à deux mouvements distincts qui se font selon la même direction, celle de la droite ab.

Or, si elle veut suivre la structure de l'argument suggéré par Galileo, la preuve de Newton doit s'appuyer sur un lemme qui y joue le même rôle que la proposition VI joue dans l'argument suggéré par Galileo. Ce lemme n'est rien d'autre que la proposition 1 de Newton. De ce qu'on vient de dire, s'ensuit alors que cette proposition doit être, par son contenu, essentiellement distincte de la proposition VI de Galileo[24].

[23] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [1], 390.

[24] En particulier, comme la proposition 2 ne porte que sur des mouvements rectilignes uniformes, sa preuve ne peut se fonder sur un lemme qui concerne des accélérations. Ceci explique l'élimination du terme "accélération" de l'énoncé de la proposition 1.Newton avait probablement employé ce terme au tout début, sans réfléchir sur la différence entre le contexte de sa preuve et celui des arguments de Galileo. En revanche, cette même preuve peut se fonder, comme on le verra tout à l'heure, sur un lemme qui ne concerne pas des mouvements, mais directement les vitesses ponctuelles de deux ou plusieurs mouvements quelconques, pourvu que ces mouvements aient une origine commune et engendrent respectivement des segments qui

Comme Newton ne considère que des mouvements uniformes, il est clair qu'en suivant la structure de l'argument proposé par Galileo, on parvient, plutôt qu'à un principe de composition de temps, à un principe de composition (globale) de mouvements. C'est exactement un tel principe qui est énoncé par la proposition 2. On comprend alors quelle suggestion Newton a tiré de sa lecture des *Discorsi* : celle de rédiger une preuve du principe de composition (globale) des mouvements rectilignes uniformes, à partir d'un lemme structuralement analogue à la proposition VI du traité *De motu naturaliter accelerato*, qui permette de rapporter deux mouvements indépendants le long de deux directions quelconques respectivement à deux autres mouvements qui se font le long de la même direction.

Cette reconstruction des intentions de Newton suggère d'interpréter sa proposition 1 — qui, en restant à la lettre de son énoncé, est fort obscure — comme il suit : si deux ou plusieurs mouvements engendrent respectivement deux ou plusieurs segments qui sont entre eux comme des cordes d'un même cercle ayant une origine commune, alors les vitesses ponctuelles de ces mouvements sont entre elles comme ces cordes sont entre elles. Naturellement, les vitesses ponctuelles dont il est question ici ne sont, comme d'habitude chez Newton, que les modules des vitesses ponctuelles dans notre sens, leur direction étant implicitement donnée par la direction des segments engendrées par les mouvements auxquels elles se référent. Il suffit alors de considérer trois mouvements qui engendrent respectivement trois segments ad, ae et ac (fig. 1) qui sont constamment entre eux comme trois cordes d'un même cercle ayant une origine commune (la troisième de ces cordes coïncidant avec le diamètre de ce cercles), puis de poser $\mathsf{ad} = y$, $\mathsf{ae} = z$, $\mathsf{ac} = x$, $\mathsf{d\hat{a}c} = \alpha$ et $\mathsf{c\hat{a}e} = \beta$, pour conclure, en accord avec cette proposition, que si

$$y = x \cos \alpha \qquad ; \qquad z = x \cos \beta \tag{10.12}$$

(où α et β sont évidemment des constantes), alors :

$$\frac{q}{p} = \frac{y}{x} \qquad ; \qquad \frac{p}{r} = \frac{x}{z} \qquad ; \qquad \frac{r}{q} = \frac{z}{y} \tag{10.13}$$

où p, q et r sont respectivement les (modules des) vitesses ponctuelles des mouvements qui engendrent les segments x, y et z.

Si on en reste là, la proposition 1 ne peut pourtant pas jouer le rôle que Newton semble lui assigner dans la preuve de la proposition 2. Bien que dans cette preuve Newton ne se réclame explicitement de la proposition 1 que pour s'assurer que "le mouvement vers c" est au "mouvement vers d" comme ac est à ad, et que le "mouvement vers f" est au "mouvement vers e" comme af est à ae, il est clair que son argument ne peut se limiter à prendre en compte les modules des vitesses concernées. Si on veut démontrer le principe du parallélogramme, il faut en effet non seulement déterminer le module de la vitesse (constante) du mouvement composé, mais aussi sa direction. Pour conclure sa preuve, Newton doit aussi supposer implicitement que les mouvements vers c et f sont représentés par les mouvements qui engendrent les segments ad et ae. Il semble raisonner comme suit.

peuvent être pris à chaque moment comme les cordes d'un même cercle (ce qui est toujours le cas, si on ne considère que deux mouvements, car, trois points étant donnés, il y a toujours un cercle qui passe par ces points). Ceci justifie l'élimination du terme "mouvement" dans l'énoncé de la proposition 1 lors de la rédaction de la note du 16 mai et rend clair que ce même terme ne doit être interprété dans l'énoncé de cette proposition, tel qu'il apparaît dans la note du 14 mai, que comme se référant à la détermination ponctuelle d'un mouvement, et non pas à un mouvement en tant que tel.

Comme ac est par hypothèse le diamètre d'un cercle dont les segments ad et ae sont des cordes, si on suppose que les angles α et β sont donnés, il suffit de fixer un des points d, c ou e, respectivement sur les droites données ad, ac ou ae pour déterminer les deux autres points. Il s'ensuit que si les segments x, y et z respectent les conditions (10.12), alors ils peuvent être pris pour représenter les vitesses ponctuelles d'un même mouvement, évaluées le long de leurs directions respectives, ces vitesses étant considérées les unes relativement aux autres. Or, les angles $\widehat{\mathsf{adc}}$ et $\widehat{\mathsf{aec}}$ sont droits, donc cela nous indique que si on veut représenter la vitesse d'un mouvement le long de la direction d'une droite b quelconque, pourvu qu'on représente cette vitesse, le long d'une autre droite a — qui coupe b dans un point A — par le segment AC, pris sur a, il suffit de projeter orthogonalement le point C sur la droite b, en construisant le point B, et de prendre le segment AB comme étant la représentation cherchée. On reviendra plus loin sur la signification géométrique et mécanique d'un tel principe de projection, qui aussi étrange qu'il puisse paraître à nos yeux, semble intervenir implicitement dans la preuve que Newton propose pour la proposition 2. Avant d'aborder ce point délicat, il convient de considérer comment un tel principe intervient dans cette preuve.

En accord avec ce principe, les segments ad et ae (fig. 2) représentent respectivement les vitesses, évaluées le long de la droite ab, des mouvements rectilignes ayant lieu le long des directions des segments ac et af. Comme ces mouvements sont supposés être uniformes, leurs vitesses constantes sont entre elles comme les espaces parcourus. Donc, les segments qui représentent ces vitesses, l'une relativement à l'autre, représentent aussi ces espaces l'un relativement à l'autre. Il s'ensuit que les segments ad et ae représentent aussi les espaces parcourus par les mouvements considérés ayant lieu le long des directions des segments ac et af, ces espaces étant évalués le long de la direction de la droite ab. Newton en conclut que le segment ab représente l'espace parcouru par le mouvement qui résulte d'une composition (globale) de ces deux mouvements.

Pour justifier cette conclusion, il ne suffit pourtant pas d'observer, comme le fait Newton, que $\mathsf{ab} = \mathsf{ad} + \mathsf{ae}$; il faut aussi supposer que si deux segments a et b, d'origine commune, représentent les espaces parcourus par deux mouvements rectilignes uniformes ayant respectivement lieu le long des directions de ces segments, alors la somme des deux segments représentant les espaces parcourus par ces mouvements évalués le long de la direction de la diagonale du parallélogramme construit sur les segments a et b représente l'espace parcouru par le mouvement qui résulte de la composition globale de ces deux mouvements.

Or, cette prémisse supplémentaire est loin d'être banale. Pour en comprendre la nature, imaginons que les segments ac et af (ou, si on préfère un langage plus moderne, les vecteurs correspondants) soient projetés orthogonalement sur une droite quelconque ab' passant par leur origine commune a (fig. 2bis), et que le point b' soit choisi sur cette droite de sorte que $\mathsf{e}'\mathsf{b}' = \mathsf{ad}'$. Le segment ab' est donc la somme des segments ad' et ae' qui, d'après la proposition 1, représentent les espaces parcourus par les mouvements uniformes qui engendrent les segments ac et af évalués le long de la direction de la droite ab'. La question est alors la suivante : pourquoi le segment ab (fig. 2), et non pas le segment ab' (fig. 2bis), représente-t-il l'espace parcouru par le mouvement qui résulte de composition (globale) des mouvements uniformes qui engendrent les segments ac et af ? La seule réponse possible est évidemment que la composition (globale) des deux mouvements uniformes, engendrant les segments ac et af, équivaut à la composition globale des mouvements uniformes engendrant respectivement les segments ac et cb, si et seulement si cb est égal et parallèle à af. Si on pense — comme on l'a suggéré lors de la section 8.1.1 — le mouvement résultant de la composition globale de deux mouvements $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ comme le mouvement, par rapport à un repère Φ, d'un point qui se meut selon le mouvement $\mathcal{M}_1$ par rapport à un repère Ψ, qui se meut à son tour selon le mouvement $\mathcal{M}_2$ par rapport au repère Φ, ceci est immédiat, car, en tant que mouvement rectiligne uniforme d'un repère, le mouvement engendrant le segment af est identique au mouvement engendrant le segment cb, c'est-à-dire qu'il est ce même mouvement. Pourtant, aussi banale qu'elle puisse paraître, cette supposition équivaut à la règle du parallélogramme qu'il s'agit de prouver. En effet, pour passer de cette supposition à cette règle, il n'y a nullement besoin d'invoquer le principe de projection que Newton semble tirer de la proposition 1 ; il suffit de tracer le segment cb et de vérifier que le point b est un sommet du parallélogramme construit sur ac et af.

La preuve proposée par Newton est donc irrémédiablement circulaire et le lemme fourni par la proposition 1 ne peut que cacher cette circularité.

On pourrait imaginer que celle-ci est la raison qui poussa Newton à abandonner sa preuve, lors de la rédaction de la note du 16 mai. Il suffit pourtant d'observer que dans le *Traité d'octobre 1666*, Newton représente son argument du 14 mai sans aucune variation essentielle[25], pour en conclure qu'il n'en est pas ainsi, ou du moins que celui-ci n'entend pas cette preuve de la même manière dans la note du 14 mai que dans ce dernier traité. D'un côté, on peut en effet supposer qu'il n'ait pas vu cette circularité et n'ait éliminé sa preuve de la note du 16 mai que pour une raison d'économie et élégance de la présentation. De l'autre, on peut supposer aussi qu'en réfléchissant sur cette preuve Newton, ait compris qu'elle est circulaire, mais qu'il ait décidé tout de même de la présenter à nouveau, non pas comme une preuve de la proposition 2, mais comme une preuve de l'accord entre la règle du parallélogramme et le principe de projection qu'il semble tirer de la proposition 1. De ce point de vue, cette preuve ne prouverait rien d'autre que l'implication suivante : si les mouvements uniformes engendrant les segments ac et af sont donnés, alors le segment ab qui résulte en appliquant à ces segments la règle du parallélogramme, est aussi la somme des deux segments qui représentent, conformément à ce principe de projection, les espaces parcourus par les mouvements donnés évalués le long de la direction de la droite ab. En montrant l'accord de ce principe avec la règle du parallélogramme, cette preuve fonctionnerait alors comme une sorte de confirmation *a posteriori* de celui-ci.

* * *

Cette interprétation possible de la preuve de la proposition 2, rend encore plus urgent le problème que j'ai laissé ouvert ci-dessus, concernant la signification géométrique et mécanique du principe de projection que Newton semble tirer de la proposition 1.

Pour aborder ce problème, commençons par considérer comment Newton pense pouvoir prouver cette proposition. Dans la note du 14 mai, celui-ci fait suivre l'énoncé de cette proposition par la remarque suivante :

> This may be Demonstrated by Theorem *R* pag. 57.

Newton se réfère naturellement au *Waste Book* et en particulier à la page 57^{r} de ce cahier, où commence la note du 13 novembre 1665. Ce qu'il marque par la lettre "*R*" dans cette page n'est d'autre rien que l'énoncé du problème par lequel s'ouvre cette note et qu'on

[25] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 415, et p. 501.

a cité au début de la section 9.1. Il se propose donc de démontrer la proposition 1 en se réclamant de l'algorithme donnant l'équation qui exprime la relation entre les vitesses de deux mouvements engendrant des segments dont la relation est exprimée par une équation Algébrique.

En appliquant cet algorithme, il est en effet fort facile de prouver que si trois mouvements engendrent respectivement trois segments x, y et z qui satisfont les conditions (10.12), alors les vitesses p, q et r de ces mouvements satisfont les égalités (10.13)[26]. Pour sa nature, cet algorithme ne concerne pourtant que les modules des vitesses considérées[27]. Appliqué à ce cas particulier, il ne sert qu'à prouver que si deux mouvements engendrent deux segments dont le rapport est constant, alors le rapport entre les modules des vitesses ponctuelles de ces mouvements est également constante, ce qui peut aussi se prouver sans se réclamer d'un tel algorithme. Il suffit pour cela d'observer que, quels que soient ces mouvements, ils sont par hypothèse uniformes l'un relativement à l'autre — c'est-à-dire que si l'un d'entre eux est pris comme uniforme, alors l'autre aussi doit être pris comme uniforme —, et de se réclamer du plus élémentaire des principes de la théorie des mouvements rectilignes uniformes, que Newton avait lui-même énoncé dans la note du 13 novembre 1665, au cours de la preuve de son algorithme[28] : les modules des vitesses de deux mouvements rectilignes uniformes sont entre eux comme les espaces parcourus par ces mouvements.

Ces deux preuves ne sont pourtant pas explicatives. En particulier, elles n'éclairent pas la nature du principe de projection que Newton semble tirer de sa proposition. La question posée par ce principe peut être formulée ainsi : que signifie, en général — c'est-à-dire en dehors de toute contrainte propre à une certaine situation géométrique particulière[29] — que la vitesse ponctuelle d'un certain mouvement, évaluée le long d'une direction donnée différente de celle de ce mouvement, soit représentée par un certain segment pris sur la droite qui fournit cette direction ?

Un mouvement n'a évidemment qu'une vitesse ponctuelle, exprimée par un vecteur qui a, à son tour, une direction et un module déterminés. Les vitesses ponctuelles évaluées le long d'autres directions ne sont donc guère des vitesses de ces mouvements[30]. Mais, en général, elles ne peuvent pas non plus être identifiées avec des vitesses ponctuelles qui seraient propres à ce mouvement, s'il avait lieu non pas selon sa propre direction, mais

[26] Dans le *Traité de l'octobre 1666* Newton donnera une preuve différente de la même proposition en se servant du même algorithme. J'y reviendrai dans la section 11.1.1, en particulier pp. 501-501.

[27] Cf. la note (13) du chapitre 7.

[28] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 3, [1], 385 et p. 440, ci-dessus.

[29] Il est clair qu'il est possible d'imaginer des systèmes géométriques construits de telle manière que le mouvement qui engendre un des éléments du système entraîne d'autres mouvements qui engendrent d'autres éléments. Ces différents mouvements peuvent ainsi être conçus comme des manifestations particulières d'un seul mouvement du système pris dans son ensemble. Dans ce cas, il est alors possible de concevoir une projection d'une vitesse ponctuelle, prise avec sa direction, au long d'une autre direction comme la vitesse ponctuelle d'un mouvement d'un certain point du système qui est engendré par le mouvement du système qui engendre aussi le mouvement dont la vitesse ponctuelle est donnée. L'angle de cette projection dépend alors de la nature particulière du système, c'est-à-dire qu'il n'est pas fixé en général. Un exemple est donné par la construction du centre de courbure proposée par Newton dans sa note du 13 novembre 1665 [cf. la section 9.2.2, en particulier pp. 455-455], où le choix de la projection orthogonale de la vitesse ponctuelle représentée par le segment MT sur la droite MS est dicté par le fait que la droite MG est la normale à la courbe AMJ au point M.

[30] En général [cf. la note (29), ci-dessus], en tant que projections d'une vitesse ponctuelle, elles ne sont pas des vitesses tout-court, car en opérant une projection, on perd des informations essentielles à propos de la vitesse ponctuelle donnée.

selon ces autres directions. Pour pouvoir dire qu'il en est ainsi, il faut en effet disposer d'un moyen pour identifier ou caractériser un mouvement indépendamment de sa propre direction. Ceci ne peut pourtant pas être fait en ne se réclamant que du module de la vitesse ponctuelle de ce mouvement, car le même raisonnement justifierait alors le principe de projection que Newton tire de la proposition 1 aussi bien que toute autre principe de projection qui nous amènerait à choisir un vecteur, dont le module est proportionnel au module du vecteur de la vitesse ponctuelle du mouvement donné, sur une droite quelconque donnant une direction choisie à l'avance. Pourquoi choisir alors, parmi l'infinité des vecteurs proportionnels possibles, celui qui résulte d'une projection orthogonale ?

Aucune des deux preuves précédentes ne permet de répondre à cette question. Si on les rapporte au principe de projection que Newton tire de la proposition 1, ces preuves ne se présentent donc, elles aussi, que comme des vérifications *a posteriori*, montrant tout simplement que le vecteur choisi par projection orthogonale respecte la condition de proportionnalité.

En réalité aucune réponse n'est possible pour une telle question si on la pose de façon générale, c'est-à-dire si on ne tient pas compte de certaines contraintes particulières imposant le choix d'une certaine projection[31]. La considération de ces contraintes comporte pourtant, à la rigueur, le passage d'une simple situation cinématique, décrite en général, à des situations dynamiques particulières, où certaines forces agissent pour imposer la direction le long de laquelle un corps se meut. Supposons une certaine impulsion qui agit sur un certain corps, par exemple l'impulsion correspondant à l'action ponctuelle de la gravité. Cette impulsion a évidemment une direction qui peut ne pas correspondre à celle de la vitesse ponctuelle de ce corps. Cette différence dépend de l'action d'autres forces, par exemple d'une force de résistance contraignant le corps à suivre une certaine direction. Ceci est le cas de la chute d'un corps le long d'un plan incliné. Or, comme cette force de résistance est entraînée par la présence du plan, et elle s'exerce de ce fait selon une direction orthogonale à celle de la section de ce plan, la projection orthogonale de la vitesse ponctuelle du corps qui serait produite par la seule action de la force de gravité, le long de la direction du plan incliné, est dans ce cas la vitesse ponctuelle du corps en question, vitesse qui est justement due à la présence simultanée de la force de gravité et de cette force de résistance. Le choix de l''angle droit en tant que angle de projection est alors dicté par une situation dynamique précise dont il n'est pas possible de faire abstraction. C'est exactement le modèle de dynamique Galileo dont Newton semble s'être inspiré.

Il n'y a pourtant aucune raison justifiant le transposition de ce modèle à une situation générale purement cinématique. C'est cette transposition injustifiée que semble opérer Newton en se réclamant de la proposition 1 dans la preuve de la proposition 2. Cette dernière preuve n'est donc pas seulement circulaire, elle est aussi un *non sequitur*, car elle s'appuie, pour cacher cette circularité, sur un lemme consistant dans un principe général de projection que Newton tire de la proposition 1, sans aucune justification.

En se réclamant de l'algorithme des vitesses pour des mouvements engendrant des segments dont la relation est exprimée par une équation Algébrique, pour prouver la proposition 1, Newton tombe de surcroît dans une circularité qui concerne la structure de son exposition. Tant que que la preuve de cet algorithme ne dépende pas, en tant de telle, de cette proposition et qu'elle porte sur des mouvement qui engendrent, par hypothèse, des

[31]Cf. la note (29), ci-dessus.

segments proportionnels (dont la relation se laisse donc exprimer aisément par une équation Algébrique), cette circularité ne concerne pas la structure logique de l'argument de Newton. Elle laisse pourtant un sentiment d'insatisfaction qui est d'autant plus gênant que le recours à cet algorithme dans la preuve de la proposition 1 n'est guère nécessaire.

10.1.2 Mouvements simples et mouvements composés (propositions 3-5)

Quel que soit le jugement sur la légitimité des arguments de Newton, les deux premières propositions des notes du 14 et du 16 mai témoignent d'un effort visant à justifier le principe du parallélogramme à partir de quelques principes plus élémentaires. Bien que fallacieux, les arguments que Newton déploie au cours de cet effort ne préjugent pas de la légitimité de sa théorie des mouvements composés, dans laquelle rien n'empêche de prendre ce principe comme un axiome qui pourrait tout simplement être énoncé à la place des propositions 1 et 2.

Ce principe étant acquis, la mise en place d'une théorie des mouvements composés qui puisse intégrer la méthode des tangentes de Roberval dépende de la possibilité de disposer de certains mouvements élémentaires, dont on suppose connaître au préalable la direction, et dont tout autre mouvement peut être considéré comme étant composé. On pourrait s'attendre à ce que Newton définisse d'abord ces mouvements, puis qu'il indique comment en déterminer la direction. Ce n'est pourtant pas ainsi qu'il procède. En donnant pour acquises les définitions des mouvements rectilignes et circulaires, aussi bien d'un point que d'un corps rigide, et en supposant savoir déterminer les directions de ces mouvements, il se limite à qualifier ces mouvement de “simples” et à déterminer les relations qui lient entre eux les modules des vitesses ponctuelles de tout point d'un corps rigide qui se meut soit selon un mouvement rectiligne, soit selon un mouvement circulaire. C'est l'objet des propositions 3 et 4 et du court scolie qui les suit[32] :

> *Prop.* 3. All the points of a body keeping parallel to it selfe are in equall motion.
>
> *Prop.* 4. If a body onely move circularly about some axis, the motion[s] of its points are as their distance from that axis.
>
> Call these 2 simple motions.

Le scolie n'est en réalité présent que dans la note du 16 mai. Son ajout ne fait pourtant que souligner, par l'usage d'un terme convenable, ce qui était déjà parfaitement clair dans la note du 14 mai : les mouvements rectilignes et circulaires jouent, dans la théorie de Newton, de même que dans la méthode de Roberval, le rôle des mouvements élémentaires. Dans cette dernière note, les énoncés des propositions 3 et 4, sont de surcroît différents que dans la note du 16 mai, et ne concernent en particulier que des courbes planes, plutôt que des corps quelconques[33]. Si on suppose n'appliquer la théorie des mouvements composés qu'à la solution de problèmes concernant des courbes planes, la généralisation que Newton introduit dans sa deuxième note n'est guère nécessaire. Son introduction nous laisse ainsi penser que celui-ci songeait à la possibilité d'appliquer ses méthodes à l'étude des courbes dans l'espace,

[32] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 392.
[33] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [1], 390-391.

d'autant plus que le passage des courbes planes à des corps quelconques ne comporte pas, au niveau de principes, des difficultés majeures. Voyons comment les propositions 3 et 4 semblent devoir être interprétées dans leur généralité.

Supposons d'abord qu'un corps rigide ABCD (fig. 5) translate le long de la direction d'une droite HK, c'est-à-dire que tous les points de ce corps se meuvent selon un mouvement rectiligne (en restant en repos les uns par rapport aux autres). La proposition 3 se limite à nous dire que le mouvement de tout point R de ce corps est "égal" au mouvement de tout autre point de ce corps, en particulier à celui d'un point T de ce corps appartenant à la droite HK. Si on ne considère que la courbe plane ABC, alors cette proposition nous dit que le mouvement de tout point S de cette courbe est "égal" au mouvement de tout autre point de cette courbe, en particulier à celui du point B où cette courbe rencontre la droite HK. La notion d'égalité entre deux mouvements n'est pas explicitée par Newton, mais il va sans dire que cela signifie que les points R et S engendrent par leur mouvement deux segments égaux et parallèles à ceux qui sont engendrés par les points T et B. En d'autres termes, en parlant d'égalité entre deux mouvements, Newton ne semble se référer qu'à l'égalité entre les modules des vitesses ponctuelles de ces mouvements, en donnant pour acquis que ces vitesses ont une certaine direction qui est facile à déterminer, et qui est justement celle de la droite HK. Le principe énoncé par la proposition 3 est alors en dernière instance celui qui permet de conclure que le mouvement résultant de la composition globale de deux mouvements rectilignes uniformes est le mouvement rectiligne (uniforme) qui engendre la diagonale du parallélogramme construit sur les segments engendrés par ces deux mouvements. Le fait que Newton sente le besoin de l'énoncer comme contenu d'une proposition indépendante après l'avoir implicitement employé lors de sa preuve de la proposition 2, ne fait que rendre cette preuve encore plus difficile à justifier.

Supposons ensuite qu'un corps rigide ABCD (fig. 6) tourne autour d'un axe fixe IJ, c'est-à-dire que tout point R de ce corps (restant en repos par rapport à tout autre point de ce corps) se meut selon un mouvement circulaire autour d'un point pris sur cet axe. Supposons en particulier qu'il engendre un cercle sur le plan orthogonal au plan déterminé par ce point et cet axe, dont le centre est le point O, où cet axe coupe le premier de ces deux plans. La proposition 4 nous dit que le mouvement (circulaire) de tout point R de ce corps est au mouvement (circulaire) de tout autre point T de ce même corps comme la distance du premier point de l'axe IJ est à la distance du deuxième de ce même axe. Si on suppose que le plan déterminé par le point R et l'axe IJ est le même que celui qui est déterminé par le point T et ce même axe, alors cela revient à dire que le mouvement (circulaire) de R est au mouvement (circulaire) de T comme OR est à OT. Si on ne considère que la courbe plane ABC, et qu'on suppose qu'elle tourne autour du point O (tous ses points restant en repos les uns par rapport aux autres), alors cette proposition nous dit que le mouvement (circulaire) de tout point B de cette courbe est au mouvement (circulaire) de tout son autre point S comme OB est à OS. Encore une fois, Newton ne définit pas explicitement la relation de proportionnalité entre mouvements circulaires dont il est ici question. Il semble pourtant clair qu'il se réfère à la relation habituelle de proportionnalité parmi des grandeurs scalaires. Le terme "mouvement" semble alors se référer aux modules des vitesses ponctuelles des mouvements circulaires des points considérés, étant donné par acquis que la direction de ces vitesses est celle de la tangente aux cercles engendrés par ces mouvements. Si on suppose représenter la vitesse ponctuelle du point B par un segment BB', perpendiculaire à OB, cette proposition nous dit que la vitesse ponctuelle du point S doit être représentée par le segment $\mathsf{SS'}$, perpendiculaire à OB, qui satisfait la condition

$$\mathsf{OB} : \mathsf{OS} = \mathsf{BB'} : \mathsf{SS'} \tag{10.14}$$

Cette interprétation des propositions 3 et 4 n'est pas seulement la plus naturelle, mais est aussi celle qui est suggérée par l'énoncé de la proposition 5[34] :

> *Prop.* 5. If the motion of a body is considered as mixed of simple motions; the motions of all its points are compouned of their simple motions, so as the motion towards b (in prop 2^{d}) is compounded of the motion towards c & f.

Comme la proposition 2 ne concerne que des mouvements rectilignes uniformes, il est clair qu'elle ne peut s'appliquer à la composition de moments circulaires avec d'autres mouvements (circulaires ou rectilignes) qu'à condition que ces mouvements soient ponctuellement réduits à des mouvements rectilignes uniformes. Le principe du parallélogramme que Newton a énoncé et a cherché à démontrer en tant que principe de composition globale de deux mouvements rectilignes uniformes est donc appliqué ici comme un principe de composition des vitesses ponctuelles de n'importe quels mouvements élémentaires, et ce grâce à la représentation géométrique d'une vitesse ponctuelle par un segment censé être engendré dans un temps donné par un mouvement rectiligne uniforme dont la vitesse constante est égale à cette vitesse ponctuelle. Ceci n'est certainement pas nouveau, mais rend néanmoins clair que les propositions 3 et 4 ne peuvent qu'être référées aux modules de certaines vitesses ponctuelles dont on suppose connaître au préalable la direction.

Si on interprète ainsi la proposition 4, il se pose le problème de sa preuve[35]. Pour conduire cette preuve, il faut se fonder sur des considérations de nature infinitésimaliste, et se réclamer du principe de composition donné par la règle du parallélogramme. Bien que Newton garde à ce propos le silence le plus strict (duquel il ne sortira pas non plus à l'occasion du *Traité de l'octobre 1666*), on peut remarquer qu'il a au moins énoncé explicitement un lemme qui était resté jusqu'ici implicite — et que le même Roberval n'avait pas explicité — et qu'il a inverti l'ordre de l'exposition par rapport à la présentation de ce dernier, en énonçant le principe du parallélogramme avant de considérer les propriétés des mouvements circulaires.

Dans la note du 14 mai, Newton réfère la proposition 5 aux seuls mouvements (rectilignes ou circulaires) d'une courbe plane, et il est de surcroît plus explicite à propos de la procédure de composition. Voici cette proposition telle qu'elle est énoncée dans cette note[36] :

> *Prop.* 5^{t}. If the motion of a line in plano bee mixed of parallel and circular motion, the motion of all its points are compouned (see prop 2) of that motion which they would have, had the line onely its parallel motion & of that which they would have, had the line onely its circular motion .

Lorsqu'elle est généralisée comme dans la note du 16 mai, cette proposition semble énoncer le règle suivante : supposons que le mouvement d'un certain corps soit composé par deux ou plusieurs mouvements simples, et que grâce aux propositions 3 et 4 nous sachions déterminer les vitesses ponctuelles que tout point de ce corps aurait si ce même corps ne

[34]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 392.

[35]Ce problème ne se poserait pas, en revanche si on remplaçait les modules des vitesses ponctuelles des points R et T, ou B et S par des arcs de cercle engendrés par ces points dans un temps donné, car la preuve serait alors triviale, ne se fondant que sur la rigidité supposée du corps ABCD.

[36]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [1], 391

se mouvait que d'un de ces mouvements ; alors pour connaître la vitesse ponctuelle totale de ce point, il suffirait de composer ces vitesses ponctuelles conformément au principe de composition donné par la proposition 2 (c'est-à-dire le principe du parallélogramme).

Comme je l'ai dit ci-dessus, l'application de cette règle pour composer des vitesses ponctuelles plutôt que des mouvements rectilignes uniformes ne comporte pas de difficultés, une fois qu'on a accepté de représenter une vitesse ponctuelle par un segment censé être engendré, dans un temps donné, par un mouvement rectiligne uniforme dont la vitesse constante est égale à cette vitesse ponctuelle. La difficulté de cette interprétation de la proposition 5 concerne plutôt la manière dont on doit entendre la supposition sur laquelle porte cette proposition : que signifie que le mouvement d'un certain corps soit composé par deux ou plusieurs mouvement simples et que les propositions 3 et 4 nous permettent de déterminer les vitesses ponctuelles que tout point de ce corps aurait, si ce même corps ne se mouvait que d'un de ces mouvements ?

Les propositions 3 et 4 ne font qu'énoncer des principes qui permettent de déterminer les vitesses ponctuelles que tout point d'un corps rigide se mouvant selon un mouvement rectiligne ou circulaire acquiert grâce au mouvement de ce corps pris dans son ensemble, à condition que l'on connaisse les vitesses ponctuelles d'un autre point de ce corps. Donc, cette condition ne pourrait être respectée que si le premier de ces points était fixe relativement au corps auquel il appartient, et que le mouvement composé de ce corps était défini de manière à ce qu'on pût immédiatement déterminer les vitesses ponctuelles des deux mouvements le composant, relativement à l'un de ces points. Mais s'il en était ainsi, la proposition 5 serait correcte si et seulement si l'expression "all its points" n'était référée qu'à des points du corps mobile pris comme fixes par rapport au corps auquel ils appartiennent, et que la composition des mouvements qui donne lieu au mouvement de ce corps était telle que la vitesse ponctuelle de tout point fixe de ce corps pouvait être correctement déterminée conformément au principe du parallélogramme, et ce à partir de la donnée des vitesses ponctuelles des mouvements composants relativement à ce même point.

Or, avant d'énoncer la proposition 3, Newton observe, dans la note du 16 mai, que[37] "by a body is meant its center of gravity." Évidemment, il ne peut pas entendre par là que les corps dont il est question dans les propositions 3 et 4 sont pointiformes, autrement cela n'aurait aucun sens de parler de tous les points de ces corps. Il ne reste qu'à supposer que le but de ce court scolie est d'éclairer que le mouvement d'un corps doive être conçu comme le mouvement du centre de gravité de ce corps. On peut alors reformuler la condition précédente comme il suit : si on acceptait l'interprétation précédente de la proposition 5, alors cette proposition serait correcte si et seulement si l'expression "all its points" n'était référée qu'à des points du corps mobile pris comme fixes par rapport au corps auquel ils appartiennent et que la composition des mouvements qui donne lieu au mouvement du centre de gravité de ce corps était telle que la vitesse ponctuelle de ce centre pouvait être correctement déterminée conformément au principe du parallélogramme, à partir de la donnée des vitesses ponctuelles des ses mouvements composants. En ne considérant que la direction de cette double implication qui nous intéresse ici, la proposition 5 nous dirait ainsi que si le mouvement du centre de gravité d'un corps rigide (et donc de ce corps dans son ensemble) est composé de deux mouvements simples de manière à ce que sa vitesse

[37]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 392. On retrouve une remarque analogue à la fin de la note du 14 mai [cf. *ibid.*, [1], 392] : "by the place of a body is meant its center of gravity."

ponctuelle résulte des vitesses ponctuelles des mouvements composants référées à ce même centre de gravité, conformément au principe du parallélogramme, alors la vitesse ponctuelle de tout point de ce corps qui reste fixe par rapport à ce même corps résulte, elle aussi, des vitesses ponctuelles des mouvements composants référées à ce point, conformément au principe du parallélogramme.

Ce principe se réduirait alors à un principe de transfert d'une procédure de composition acceptée, d'un point d'un corps rigide à un autre, ces deux points étant fixes l'un par rapport à l'autre. On pourrait se demander quelle utilité elle pourrait avoir au sein d'une théorie des mouvements composés apte à intégrer les méthodes mises au point par Newton dans l'automne 1665, à la suite de sa rencontre avec la méthode de Roberval. Dans la plupart de cas, ces méthodes[38] concernent en fait soit des mouvements de points (pris indépendamment d'un corps rigide auquel ils pourraient appartenir), soit des mouvements de points d'intersections de certaines courbes censés appartenir à ces courbes mais étant mobiles sur elles. De plus, seulement dans certains cas parmi la totalité de cas considérés par ces méthodes comme exemples de composition de mouvements, la vitesse ponctuelle du mouvement composé d'un certain point résulte de l'application du principe du parallélogramme aux segments représentant les vitesses ponctuelles des mouvements composants. Le principe précédent pourrait alors tout au plus être appliqué pour déterminer la vitesse ponctuelle d'un certain point d'un corps donné considéré comme fixe par rapport à ce corps lorsque le mouvement de ce corps dans son ensemble est défini comme un mouvement composé d'un autre de ses points qui est censé respecter le principe du parallélogramme (c'est-à-dire que la vitesse ponctuelle de ce dernier point résulte des vitesses ponctuelles des mouvements composants en appliquant ce principe).

On pourrait penser que, malgré sa cohérence avec l'interprétation qu'on semble devoir donner des propositions 3 et 4, cette interprétation de la proposition 5 en limite trop le domaine d'application. On verra pourtant qu'un peu plus loin, dans la note du 16 mai, au cours de la recherche du point d'inflexion de la conchoïde de Nicomède, Newton emploie cette proposition exactement pour justifier un transfert de ce type[39]. De surcroît, on peut supposer qu'en cherchant à édifier une théorie générale Newton ait songé à la possibilité d'appliquer cette théorie à des situations plus complexe que celles qu'il avait considérées et qu'il ira considérer par la suite. La manière de laquelle ces situations plus complexes pourraient se présenter devient claire dès que l'on considère le scolie qui suit cette proposition, autant dans la note du 14 que dans celle du 16 mai. Voici donc ce scolie, dans la formulation de la note du 16 mai[40] :

> Note that all motion is reductible to one of these 3 cases : & in the 3$^{\text{d}}$ case any line may bee taken for the axis (or if a line or superficies move in plano any point of the plaine may bee taken for the center) of motion.

Ce scolie rend patent que l'intérêt de Newton portait, plutôt que sur le problème de la composition des mouvements, sur celui de leur décomposition. Plutôt que de supposer que deux ou plusieurs mouvements soient donnés et de chercher à les composer de manière à donner lieu à un mouvement dont on sache déterminer la vitesse ponctuelle, Newton semble

[38]Cf. les chapitres 8 et 9.
[39]Cf. ci dessus, p. 490, en particulier note (85).
[40]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 393. Dans la note du 14 mai, Newton réfère le scolie au seul mouvement des courbes planes : cf. *ibid.*, [1], 391.

supposer qu'un seul mouvement est donné — en tant que mouvement d'un point qui décrit une courbe dans l'espace, dont on se propose d'étudier les propriétés — et se pose le problème de parvenir à décomposer la vitesse ponctuelle (supposée inconnue) de ce mouvement, de manière à la réduire à des composants connus à partir desquels il serait ensuite possible de déterminer cette vitesse. On peut alors imaginer des situation où le mouvement donné est tel (ou est donné de manière telle) que la décomposition qui permet enfin d'en déterminer la vitesse ponctuelle prenne en compte le mouvement de certains corps rigides (par exemple des courbes dans le plan ou dans l'espace) qui ne sont pas, à leur tour, des mouvements simples. Pour conduire cette décomposition à son terme, il faut décomposer ultérieurement les mouvements de ces corps. Si le mouvement donné résulte de surcroît du mouvement d'un point de ces corps qui n'est pas celui par rapport auquel le mouvement de ces mêmes corps est déterminé, il faut savoir transférer ce mouvement composé d'un point de ce corps à un autre.

Supposons par exemple qu'un certain mouvement est conçu comme le mouvement du point d'intersection de deux courbes planes rigides dont une au moins se meut selon un mouvement qui n'est pas simple. Pour déterminer la vitesse ponctuelle de ce point d'intersection, il faut d'abord déterminer la vitesse ponctuelle de tout point de cette courbe qui reste fixe par rapport à elle. Naturellement, ceci ne suffit pas à résoudre le problème principal, mais c'est une étape indispensable dans la solution de celui-ci. Or, ce que nous dit le scolie précédent, appliqué à ce cas particulier, est que quel que soit le mouvement de cette courbe, il peut toujours être décomposé en deux mouvements simples, et que si l'un de ces mouvements doit être circulaire, alors n'importe quel point du plan dans lequel il a lieu peut être pris comme son centre (pourvu qu'ensuite la composition se fasse en fonction de ce choix). Implicitement, Newton semble pourtant entendre que cette décomposition peut toujours se faire de manière à ce que la vitesse ponctuelle du mouvement donné puisse être déterminée en employant seulement le principe du parallélogramme, pourvu que ce principe soit convenablement employé. En d'autres termes, la proposition 5 et le scolie qui la suit serviraient tout simplement à affirmer qu'en disposant du principe de parallélogramme et en connaissant les propriétés des mouvements simples, on peut étudier n'importe quel mouvement de n'importe quel corps rigide.

Mais que signifie que le principe du parallélogramme doive être convenablement employé ? Dit en bref, cela signifie que tous les mouvements qui affectent le point dont il faut déterminer la vitesse ponctuelle doivent être pris en compte. Newton n'éclaire pas ce point explicitement. Il suffit pourtant de réfléchir sur le contenu de la proposition 6 pour comprendre ce que cela signifie. C'est donc à cette proposition qu'il faut venir maintenant.

10.1.3 Le mouvement des points d'intersection de deux courbes (proposition 6)

Comme on l'a dit, la proposition 6 de la note du 16 mai remplace, tout en les généralisant, les propositions 6 et 7 de la note du 14 mai. Dans ces dernières[41], Newton n'aborde que le problème de la détermination de la vitesse ponctuelle du point d'intersection d'une droite mobile avec une droite fixe (proposition 6) et de celui de deux droites mobiles (proposition

[41] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [1], 391-392.

7). Dans la proposition 6 de la note du 16 mai[42], il attaque par contre directement le problème plus général de la détermination de la vitesse ponctuelle du point d'intersection de deux courbes (rigides) mobiles quelconques. Il ne revient aux cas particuliers qui surgissent lorsque l'une de ces courbes est fixe ou se réduit à une droite, ou bien lorsque les deux se réduisent à une droite, que dans un court scolie[43]. Voici cette proposition :

> *Prop.* 6. If the lines ae [fig. 7], ah being moved doe continually intersect ; I describe the Trapezium abcd & its diagonall ac ; & say that, the proportion & position of these five lines ab, ad, ac[44], cb, cd, being determined by requisite data ; they shall designe the proportion & position of these 5 motions ; namely, of the point a fixed in the line ae & moveing towards b ; of the point a fixed in the line ah & moveing towards d ; of the intersection point a moveing in the plaine abcd towards c (for those 5 lines are ever in the same plaine, though ae & ah may onely touch that plaine in their intersection point) ; of the intersection point a moveing in the line ae, parallely to cb & according to the order of the letters c, b ; of the intersection point a moveing in the line ah, parallely to cd & according to the order of those letters.

Bien que les figures par lesquelles Newton illustre sa proposition[45] semblent concerner des courbes (rigides) planes et coplanaires, la construction que décrit cette proposition peut parfaitement avoir lieu dans l'espace, comme il ne manque pas d'observer. Pour plus de simplicité, on va supposer que les deux courbes ae et ah sont planes et coplanaires. Les segments ab et ad appartiennent alors au même plan que ces courbes et représentent respectivement les vitesses ponctuelles des courbes ae et ah, évaluées relativement à leur point d'intersection a, conçu comme étant fixe sur ces courbes. La proposition 6 nous dit alors que le segment ac qui joint le point a au point c représente la vitesse ponctuelle du point a, conçu comme point d'intersection de ces deux courbes, les droites af et ak étant respectivement les tangentes aux courbes ae et ah et le point c étant le point d'intersection entre les droites bc et dc parallèles à ces tangentes passant par les points b et d.

Si on suppose employer cette construction pour déterminer la vitesse ponctuelle du point d'intersection entre deux courbes (rigides) mobiles ae et ah, il faut aussi supposer connaître à l'avance les tangentes à ces courbes au point a, et les vitesses ponctuelles de ces mêmes courbes évaluées dans ce même point a, celui-ci étant conçu, autant dans un cas que dans l'autre, comme fixe sur ces courbes. On peut alors imaginer que pour déterminer ces tangentes il est nécessaire de se servir de la même méthode qui conduit ensuite à déterminer la tangente de la courbe engendrée par le point a conçu comme point d'intersection entre ces ceux courbes. On peut imaginer également que pour déterminer ces vitesses il est nécessaire de se servir de la proposition 5, en supposant par exemple qu'un certain point fixe de ces courbes, déterminé à l'avance, se meut d'un mouvement composé (qui pourrait d'ailleurs

[42] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 393.

[43] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 393. En réalité Newton ne considère explicitement que le cas où l'une des deux courbes est fixe, en supposant, soit que ces courbes se réduisent, toutes deux, à deux droites, soit qu'aucune d'elles n'est une droite. Un troisième cas — les deux courbes sont mobiles, une seule des deux se réduisant à une droite — n'est évoqué que par une figure.

[44] Je corrige ici un erreur évidente dans la transcription des *Mathematical Papers* ; pour une confirmation, cf. Newton (C), IIII, 55 (et planche II).

[45] Je ne reproduis ici que la dernière de ces figures [cf. fig. 7], illustrant la situation plus générale, où aucune des deux courbes ne se réduit à une droite et où elles sont l'une et l'autre mobiles.

être à son tour celui du point d'intersection de deux autres courbes mobiles).

La construction proposée par la proposition 6 semble alors se présenter comme un outil universel. Elle peut de plus être justifiée en ne se réclamant de rien d'autre que du principe du parallélogramme et de la supposition (qui reste implicite pour toutes les applications géométriques de la théorie de la composition des mouvements) que la tangente à une courbe dans un de ces points donne la direction de la vitesse ponctuelle du mouvement de ce point conçu comme mobile sur cette même courbe[46]. Bien que Newton ne fournisse aucune preuve de cette proposition, et qu'il ne fasse pas intervenir explicitement des mouvements auxiliaires, il est aisé de vérifier que la construction dont elle relève n'est qu'une généralisation naturelle de la construction que Roberval avait prescrit dans la proposition quatrième des "Observations"[47], et que Newton avait implicitement appliquée dans sa note du 8 novembre 1665 pour déterminer la tangente de la quadratrice[48]. Pour prouver une telle proposition, il suffit ainsi d'appliquer le principe du parallélogramme et la proposition 3 aux quatre mouvements qui affectent le point a en tant qu'il est conçu respectivement comme fixe sur les deux courbes ae et ah et comme glissant sur ces courbes.

Le dernier de ces quatre mouvements ne fait que maintenir le point a sur la courbe ae (qui se meut avec une vitesse ponctuelle représentée par le segment ab), lorsque ce point se meut avec la courbe ah (qui se meut avec une vitesse ponctuelle représentée par le segment ad) — c'est-à-dire, en termes dynamiques, que sa vitesse ponctuelle est engendrée par l'impulsion correspondant à une contrainte (ou force de résistance) qui force ce point à rester sur la première de ces courbes lorsqu'il est affecté par le mouvement de la deuxième. La vitesse ponctuelle de ce mouvement est donc représentée par le segment ak' qui se trouve en traçant à partir du point c, la parallèle ck' à ad, jusqu'à ce qu'elle rencontre la tangente ak. De la même manière, la vitesse ponctuelle du mouvement du point a en tant qu'il est conçu comme glissant sur la courbe ae est représentée par le segment af' qui se trouve en traçant à partir du point c la parallèle cf' à ab, jusqu'à ce qu'elle rencontre la tangente af. En composant, en accord au principe du parallélogramme, la vitesse ponctuelle du mouvement du point a en tant qu'il est conçu comme fixe sur la courbe ae, représentée par le segment ab, avec la vitesse de ce même point en tant qu'il est conçu comme glissant sur la courbe ae, représentée par le segment af', on obtient la vitesse ponctuelle du point a représentée par le segment ac. C'est la même vitesse ponctuelle qu'on obtient en composant, conformément à ce même principe, la vitesse ponctuelle du mouvement du point a en tant qu'il est conçu comme fixe sur la courbes ah, représentée par le segment ad, avec la vitesse de ce même point en tant qu'il est conçu comme glissant sur la courbe ah, représentée par le segment ak'. Or, comme en composant une vitesse avec elle-même selon le principe du parallélogramme, on obtient cette même vitesse, il s'ensuit que la vitesse résultante de la composition des quatre vitesses ponctuelles précédentes du point a est représentée par ce même segment ac, comme le veut la construction de Newton (qui, conformément à la proposition 3, représente plutôt les vitesses du point a, en tant qu'il est conçu comme glissant sur les courbes ae et ah respectivement, par les segments bc et dc).

* * *

[46]C'est ce que Newton observe dans un scolie qu'il insère dans la note du 16 mai tout de suite après la proposition 7 : cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 393.

[47]Cf. la section 8.1.2, en particulier pp. 8.1.2-8.1.2.

[48]Cf. la section 8.2.2, en particulier pp. 8.2.2-8.2.2.

Il ne reste alors qu'à montrer qu'à l'aide de cette seule construction générale, il est possible de justifier toutes les constructions particulières que Newton avait employées pour résoudre le problème des tangentes dans ses notes du 30 octobre, du 8 novembre et du 13 novembre 1665.

Pour les constructions qui relèvent du point d'intersection de deux droites mobiles dont les vitesses ponctuelles donnent les vitesses ponctuelles des mouvements composants (par exemple celle que Newton applique à la détermination de la tangente de la quadratrice dans sa note du 8 novembre), ceci est immédiat, car, comme on l'a noté ci-dessus, cette construction n'est qu'un cas particulier de celle décrite par la proposition 6.

Il en est de même pour les constructions qui relèvent de la composition de deux mouvements rectilignes qui engendrent deux coordonnées cartésiennes, car le mouvement du point déterminé par ces coordonnées peut être pensé comme le mouvement du point d'intersection de deux droites qui translatent l'une le long de la direction de l'autre. Si on remplace donc les courbes ae et ah par deux droites ae et ah formant entre elles un angle quelconque (fig. 8) et qu'on suppose que la vitesse ponctuelle de la première de ces droites est représentée par un segment quelconque ab pris sur la deuxième, et que la vitesse ponctuelle de la deuxième est représentée par un segment quelconque ad pris sur la première, la construction décrite dans la proposition 6 se réduit à celle qui est prescrite par le principe du parallélogramme. Celle-ci est justement la construction que Newton avait appliquée, dans ces notes de l'automne 1665, à des cas de cette sorte.

Ce dernier cas n'est qu'un cas particulier de composition globale de deux mouvements dont le second est rectiligne : c'est le cas où aussi le premier de ces deux mouvements est rectiligne. La situation ne change pas si on passe à n'importe quelle composition de ce type, car le mouvement rectiligne d'un plan sur lequel se produit un mouvement peut toujours être pensé comme le mouvement d'une droite qui appartient à ce plan, prise de manière à ce qu'elle soit orthogonale à la direction du mouvement de ce même plan[49]. Le mouvement résultant d'une telle composition aura alors constamment la même direction ponctuelle que le mouvement du point d'intersection entre deux droites ae et ah (fig. 9), dont la première se meut avec une vitesse représentée par un segment ab quelconque, formant avec cette droite un angle quelconque, et la deuxième se meut avec une vitesse ponctuelle qui est représenté par un segment ad perpendiculaire à cette dernière droite. En appliquant à ces deux droites la construction décrite par la proposition 6, on trouve le segment ac qui représente de ce fait la vitesse ponctuelle du point a conçu comme point d'intersection de ces droites. Et il est facile de vérifier que ce segment est colinéaire au segment ac' qu'on obtient en appliquant le principe du parallélogramme aux segments ab et ad[50]. Si on suppose que le segment ab est perpendiculaire à la droite ae, on retrouve la construction de la tangente à la cycloïde que Newton détermine justement en appliquant le principe du parallélogramme.

[49] Ainsi, dans le cas illustré par la figure 8, on peut supposer que le mouvement de la droite ah est entraîné par le mouvement d'un plan qui est pensé comme le mouvement d'une droite ap (fig. 8bis) perpendiculaire à la droite ae dont la vitesse ponctuelle est représentée par le segment ad' tel que $\mathsf{dd}' = \mathsf{b}'\mathsf{b}$. Et il est clair qu'en appliquant aux droites ae et ap la même construction qu'on a appliquée aux droites ae et ah, on obtient le même segment ac qui représente, dans les deux cas, la vitesse ponctuelle du point d'intersection des deux droites.

[50] La différence cc' entre le segments ac et ac' est évidemment due au fait que dans le cas de la composition globale de deux segments dont le second est rectiligne, le mouvement composé n'est pas le mouvement du point d'intersection des droites ae et ah, tout ayant la même direction que celui-ci (car le second des deux mouvements composant est rectiligne et possède donc une direction fixe).

Considérons maintenant le cas d'une composition globale de deux mouvements dont le second n'est pas rectiligne. Comme la vitesse ponctuelle du mouvement d'un point sur une courbe peut toujours être pensée comme la vitesse ponctuelle du mouvement du point d'intersection entre la normale et la tangente à cette courbe, le mouvement résultant d'une telle composition pourra être pensé ponctuellement comme le mouvement du point d'intersection entre deux droites ae et ah (fig. 10) dont la première se meut avec une vitesse représentée par un segment ab quelconque, formant avec cette droite un angle quelconque, et la seconde, perpendiculaire à la première, se meut avec une vitesse ponctuelle qui est représentée par un segment ad pris sur la première droite. En appliquant à ces deux droites la construction décrite par la proposition 6, on trouve le segment ac qui représente de ce fait la vitesse ponctuelle du point a conçu comme point d'intersection de ces droites. Or, ce segment coïncide avec la diagonale du parallélogramme construit sur les segments ab et ad si et seulement si le segment ab est perpendiculaire à la droite ae (comme dans le cas de la composition de mouvements dont résulte le mouvement qui engendre une spirale). Il s'ensuite qu'en appliquant à ce dernier mouvement la construction décrite par la proposition 6, on retrouve, aussi dans ce cas, la construction employée par Newton pour obtenir cette tangente.

Il ne reste que le cas du mouvement résultant de la composition de deux mouvements rectilignes qui engendrent deux coordonnées bipolaires. Ce mouvement n'est que le mouvement du point d'intersection de deux droites ae et ah (fig. 11) qui tournent autour de deux points fixes, disons e et h. À la différence que dans les cas précédents, les modules des vitesses ponctuelles des ces droites sont pourtant inconnus, dans ce cas ; nous ne connaissons que les directions de ces vitesses — qui sont évidemment les perpendiculaires à ces mêmes droites issues du point a — ainsi que les vitesses des mouvements qui engendrent les segments ea et ha, qui joignent ce dernier point aux centres de rotation e et h. Supposons pourtant que les vitesses des mouvements circulaires des droites ae et ah soient connues et qu'elles soient représentées respectivement par les segments ab et ad, qui, d'après ce qu'on vient de dire, sont perpendiculaires à ces droites. En appliquant la construction décrite par la proposition 6, on en tire que la vitesse ponctuelle du point a conçu comme point d'intersection des droites ae et ah serait alors représentée par le segment ac, qui joint ce point au point c d'intersection entre les parallèles bc et dc aux droites ae et ah issues respectivement des points b et d. Mais la proposition 6 nous dit aussi que les segments bc et dc qu'on construit en même temps que le point c représentent les vitesses ponctuelles des mouvements du point a conçu respectivement comme glissant le long des droites ae et ah. Cela signifie que les segments ap et aq qu'on trouve sur ces dernières droites, en tirant de c les parallèles cp et cq aux segments ab et ad — qui sont évidemment aussi les perpendiculaires aux segments bc et de, et donc aux droites ae et ah — représentent respectivement les vitesses des mouvements qui engendrent les segments ea et ha, qui sont connues. Il s'ensuit que le point c, et donc le segment ac, qui représente la vitesse du point a conçu comme point d'intersection des droites ae et ah, peuvent être aisément déterminés à partir de la donnée des segments connus ap et aq, et ce en traçant des extrémités p et q de ces segments les perpendiculaires aux droites ae et ah, l'une jusqu'à ce qu'elle rencontre l'autre. Ceci est exactement ce qu'observera Newton dans le *Traité de l'octobre 1666*[51], à l'occasion de sa construction de la tangente de l'ellipse. Cette construction du segment ac est également celle dont, plus de cent-soixante-douze ans

[51] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, 417-418.

plus tard, partira Duhamel pour chercher les conditions de validité de la méthode de Roberval appliquée à des cas comme celui-ci[52], et que Newton avait appliquée dans sa note du 13 novembre 1665 au cas particulier de l'ellipse[53]. On a déjà vu que dans le cas où les segments ap et aq sont égaux, le segment ac est colinéaire à la diagonale du parallélogramme construit sur ces mêmes segments. On retrouve donc en même temps la construction de la tangente de l'ellipse exposée dans la note du 8 novembre de la même année[54].

10.2 L'algorithme des vitesses des mouvements engendrant des segments dont la relation est exprimée par une équation Algébrique (proposition 7)

La construction décrite par la proposition 6 permet ainsi de déterminer la tangente de n'importe quelle courbe qu'on puisse penser comme engendrée par un mouvement composé, cette composition se faisant conformément aux différentes modalités qu'on a distinguées dans le chapitre 8, à condition, bien sûr, de connaître les vitesses ponctuelles des mouvements composants. Lorsque cette courbe est référée à un système de coordonnées linéaires, cartésiennes ou bipolaires, il est toujours possible de la penser comme engendrée par un mouvement composé, soit du point d'intersection de deux droites glissant l'une sur l'autre, soit du point d'intersection de deux droites tournant autour de deux points fixes. Si cette courbe est de surcroît exprimée, par rapport à ces systèmes de coordonnées, par une équation Algébrique entière, alors il est possible d'appliquer l'algorithme exprimé par l'équation (9.2) pour déterminer le rapport entre les modules des vitesses ponctuelles des mouvements qui engendrent les coordonnées de cette courbe. Comme les directions de ces vitesses sont données à l'avance, pourvu qu'on sache exprimer ce rapport en terme d'une seule coordonnée, cela est suffisant pour rendre possible l'application des constructions qui, conformément à la proposition 6, relèvent de ces deux cas particuliers de composition des mouvements, et pour obtenir de ce fait la tangente à cette courbe.

Il est alors tout à fait naturel qu'après avoir énoncé la proposition 6, Newton continue sa note du 16 mai en énonçant une septième proposition[55] qui introduit cet algorithme. Ce dernier se présente, dans le contexte de cette note, comme un outil puissant mais particulier, qu'il est possible d'employer dans certains cas, pour déterminer le rapport entre les modules des vitesses ponctuelles qui interviennent, sous différentes formes, dans la construction de la tangente d'une courbe engendrée par un mouvement composé. La possibilité de se servir de cet outil, dans les cas où cela est possible, ne fait que faciliter la construction géométrique, tout en rendant possible de l'exprimer par des égalités Algébriques, derrière lesquelles on ne saurait pas cacher la géométrie de la composition de mouvements. C'est cette géométrie qui fournit les objets de la recherche, que les expressions Algébriques qui interviennent dans ces égalités ne font, dans certains cas, qu'exprimer ; et c'est de cette géométrie que relève la généralité de l'approche de Newton.

La manière de laquelle Newton présente son algorithme ne demande aucun commentaire

[52] Cf. la section 8.1.1, en particulier p. 405.
[53] Cf. ci-dessus, p. 448.
[54] Cf. ci-dessus, p. 425.
[55] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 393-394.

particulier. En évitant toute complication inutile, il ne retient qu'une version simplifiée de la seconde des deux formulations équivalentes qu'il avait présentée dans la note du 13 novembre 1665[56] : il prescrit d'ordonner l'équation donnée, d'abord par rapport à x et puis par rapport à y, et de multiplier chaque terme des équations obtenue de cette manière respectivement par $\frac{(\lambda+i)p}{x}$ et $\frac{(\mu+j)q}{y}$ (où λ et μ sont des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs, et i et j sont respectivement les exposants de x et y donnant le degré du terme considéré), et de sommer entre eux les polynômes obtenus de cette manière.

10.3 Les applications géométriques de la théorie de la composition des mouvements : tangentes et points d'inflexion

La nature d'outil particulier que Newton semble assigner à l'algorithme donnant l'équation des vitesses ponctuelles des mouvements engendrant des segments dont la relation est exprimée par une équation Algébrique entière est confirmée par l'usage qu'il en fait dans la deuxième partie de la note du 16 mai[57]. Un tel algorithme n'intervient en effet dans les applications géométriques de la théorie de la composition des mouvements que localement, comme un outil servant à la détermination des modules des quelques vitesses ponctuelles dont on suppose connaître la direction.

10.3.1 La tangente de l'ellipse et de la conchoïde

La première de ces applications n'est certes pas nouvelle, car elle concerne la tangente à une ellipse[58]. Newton justifie cependant sa construction d'une manière nouvelle, en se réclamant de la proposition 1. En supposant que l'ellipse est engendrée selon la méthode du jardiner, de sorte que le point M (fig. 12) "a le même mouvement vers F_1 et Q", et que MT est la tangente cherchée, il conclut que si MT "les angles $\mathsf{Q\hat{M}T}$ et $\mathsf{T\hat{M}F}_1$ doive être égaux, en accord avec la proposition 1."

Roberval[59] avait justifié la même construction en se réclamant du principe du parallélogramme, tandis que le même Newton avait justifié deux constructions équivalentes en se réclamant de ce même principe — dans la note du 8 novembre 1665[60] —, et d'un principe plus particulier, affirmant que les rayons vecteurs qui déterminent deux coordonnées bipolaires, en tournant autour de centre fixes, sont "inclinés à se mouvoir" selon des directions qui leur sont orthogonales — dans la note du 13 novembre 1665[61]. À cette dernière occasion, il avait tiré d'un tel principe que la tangente à l'ellipse se trouve en joignant le point M au point d'intersection des deux perpendiculaires aux droites $\mathsf{F}_1\mathsf{M}$ et $\mathsf{F}_2\mathsf{M}$ issues de deux points pris sur ces droites à deux distances égales de M (dont une prise du côté d'un foyer et l'autre du côté opposé). La référence à la proposition 1 semble faire penser que Newton veuille ici se réclamer de ce dernier argument. Il est pourtant difficile de comprendre

[56] Cf. la section (9.1), en particulier la note (23).
[57] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 394-399.
[58] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 394.
[59] Cf. la section 8.1.2, en particulier p. 408.
[60] Cf. la note (54), ci-dessus.
[61] Cf. la note (53), ci-dessus.

comment la proposition 1, prise en tant que telle, puisse justifier une telle construction. Soit Newton se réclame de la proposition 1 tout simplement pour indiquer que l'égalité des angles $\mathsf{Q\hat{M}T}$ et $\mathsf{F_1\hat{M}T}$ est une conséquence de cette construction (sans prétendre que cette proposition en fournit une justification), soit il raisonne comme suit. Quel que soit le point X pris sur la perpendiculaire QT à la droite $\mathsf{F_2M}$, le segment MX représente la vitesse ponctuelle du point M conçu comme glissant sur la droite $\mathsf{F_2M}$, évaluée selon la direction de ce même segment. De même, quel que soit le point Y pris sur la perpendiculaire $\mathsf{F_1T}$ à la droite $\mathsf{F_1M}$, le segment MY représente la vitesse ponctuelle du point M conçu comme glissant sur la droite $\mathsf{F_1M}$, évaluée selon la direction de ce même segment. . Le segment MT représente donc en même temps ces deux vitesses, évaluées le long de la même direction, et il doit de ce fait représenter la composition de ces deux vitesses considérées selon leur direction propre.

Or, cet argument ne se réclame pas de la proposition 1, mais du principe de projection que Newton semble tirer (sans aucune justification apparente) de cette proposition. Comme on le verra ci-dessous, Newton se réclamera d'un argument similaire pour justifier sa construction de la tangente à la conchoïde de Nicomède. Il sera pourtant, à cette occasion, un peu plus explicite. Je reviendrai donc sur la question en discutant cette dernière construction, qu'il s'agit maintenant d'exposer.

* * *

L'exemple de la conchoïde de Nicomède avait été évoqué par Descartes dans la *Géométrie*[62], comme l'exemple d'une courbe dont la tangente résulte d'une construction fort simple, bien que sa détermination par le biais de la méthode générale des normales et des tangentes demande des calculs assez pénibles[63]. Newton ne fait aucune référence ni à la méthode des tangentes de Descartes, ni à tout autre méthode se réclamant de l'équation Algébrique exprimant cette courbe par rapport à un système de coordonnées cartésiennes. Il semble vouloir montrer la puissance géométrique de sa théorie de la composition des mouvements, indépendamment de tout emploi que cette théorie peut faire du formalisme Algébrique.

Le même exemple avait été traité par Roberval à l'aide de sa propre méthode[64]. Après avoir défini la conchoïde de Nicomède comme la trace du mouvement composé par un mouvement de rotation d'un rayon vecteur OM (fig. 13) autour d'un centre fixe O, et d'un autre mouvement de translation d'un point M le long de ce même rayon vecteur, Roberval remarque que bien que les directions ponctuelles de ces mouvements soient connues, il est difficile de déterminer le rapport des modules de leurs vitesses ponctuelles, sans s'appuyer sur une connaissance préalable de la tangente, en ne considérant ces mouvements que relativement au point M. Il propose ainsi d'étudier ces mouvements par rapport au point L d'intersection entre le rayon vecteur OM et la base HA. Sans faire intervenir explicitement aucun mouvement auxiliaire, et sans se réclamer par conséquence de la proposition quatrième des "Observations"[65], il suppose que le point L est soumis, comme le point M, à

[62]Cf. Descartes (1637), 351-352.
[63]Cf. Descartes (GvS, II), I, 250-252.
[64]Cf. Roberval (1693), *Prop. cinquième*, 4$^{\text{ème}}$ ex., 83-86.
[65]Cf. la section 8.1.2, en particulier pp. 411-412.

deux mouvements : l'un circulaire induit par la rotation du rayon vecteur, et l'autre rectiligne ayant lieu le long de la direction de ce vecteur. Il en conclut que si la vitesse ponctuelle du premier de ces mouvements est représentée par un certain segment LF perpendiculaire au rayon vecteur, alors la vitesse ponctuelle du second est représentée par le segment FG, parallèle à ce même rayon, qui joint le point F à la droite HA, à laquelle le point L est censé appartenir. Comme le point L reste par hypothèse à une distance constante du point M, il s'ensuit que si la vitesse ponctuelle du mouvement circulaire de ce dernier point est représentée par le segment MN, perpendiculaire au rayon OM et joignant ce point au rayon OF, alors la vitesse ponctuelle du mouvement de ce même point le long du rayon OM est représentée par la parallèle NT = FG à ce dernier rayon issue du point N, et MT est ainsi la tangente cherchée.

Roberval ne justifie pas cette dernière inférence, mais il est clair qu'il se réclame du principe du parallélogramme. Le segment MT est en effet la diagonale du parallélogramme construit sur les segments MN et NT. Or, ce principe ne conduit ici à la conclusion correcte que parce que ces segments sont constamment orthogonaux entre eux. La situation est donc parfaitement analogue à celle dont relève la construction de la tangente à une spirale. Si une telle construction est correcte, elle ne l'est pas grâce à une application correcte du principe du parallélogramme.

En suivant un parcours complètement différent, Newton pense le point M comme étant déterminé par deux coordonnées linéaires, dont une en donne la distance au centre de rotation O, et l'autre en donne la distance à la droite fixe HA. Comme la perpendiculaire au segment qui fournit la deuxième de ces coordonnées est par hypothèse parallèle à cette dernière droite, il suffit de déterminer le rapport entre les modules des vitesses ponctuelles des mouvements de génération de ces coordonnées pour pouvoir opérer ensuite comme dans le cas de l'ellipse. La tangente sera alors la droite qui joint le point M au point d'intersection des perpendiculaires à deux segments d'origine M qui représentent ces vitesses, issues des deux autres extrémités de ces segments.

En supposant que la seconde de ces vitesses est représentée par le segment MP qui donne la distance de M à la droite HA, la question se réduit à déterminer un segment, pris sur le prolongement de OM, qui soit à MP comme le module de la première vitesse est au module de la seconde. Newton considère alors un point V sur le rayon OM, tel que OV = ML. Si OK est une droite parallèle à HA issue du point O, et VU est le segment issu du point V perpendiculairement à OK, alors on a MP = VU. De cela, Newton tire que le segment VU représente la vitesse ponctuelle du point V en direction de U. La raison en est simple : MP est la distance de M à la droite HA à laquelle appartient le point L dont la distance de M est constante ; de même, VU est la distance de V à la droite HA, parallèle à HA, à laquelle appartient le point O dont la distance de V est constante. En se réclament encore de la proposition 1, Newton continue en observant que de là s'ensuit que la perpendiculaire VZ au rayon OM, tirée de V jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite OK, représente la vitesse ponctuelle du mouvement de rotation de ce même point V autour du centre O. Je reviendrais tout à l'heure sur cette référence à la proposition 1. En continuant à suivre l'argument de Newton, il n'y a qu'à observer qu'conformément à la proposition 4 il s'ensuit que la parallèle LW à VZ tirée du point L jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite OK représente la vitesse du mouvement de rotation du point L autour de O. À ce point, Newton peut considérer, comme Roberval, la composition de mouvements qui donne lieu au mouvement du point L. Conçu comme point d'intersection entre les deux droites OM et HA (dont la première tourne autour du centre O et la seconde est fixe), ce point est soumis à trois mouvements : celui qui est entraîné par la rotation de la droite OM à laquelle il appartient ; celui qui le fait glisser sur cette même droite pour qu'il reste à l'intersection de cette droite avec la droite fixe HA ; et enfin celui qui le fait glisser sur la droite HA pour qu'il reste à l'intersection de cette droite avec la droite OM qui (la droite HA étant fixe) est aussi le mouvement de ce point conçu comme point d'intersection de ces deux droites. Newton est évidemment intéressé par la détermination de la vitesse ponctuelle du deuxième de ces trois mouvements. Or, de la proposition 6 s'ensuit que cette vitesse est représentée par le segment OL parallèle et égal au segment WY tiré de W à l'encontre de la droite fixe HA parallèlement à la droite OM. Comme la distance entre les points M et L est constante, de là il est enfin aisé de conclure que la vitesse ponctuelle du mouvement qui engendre la coordonnée OM est représentée par un segment MQ égal à OL tiré de M le long de la direction de OM.

Il est à ce point facile de conclure que la tangente à la conchoïde au point M est la droite Mt qui joint ce même point M au point d'intersection des deux perpendiculaires aux segments MP et MQ issues respectivement des points P et Q. Il est aussi aisé de vérifier que la tangente ainsi déterminée coïncide avec celle déterminée par la construction de Roberval.

Pour justifier la première de ces conclusions nous pouvons nous réclamer de la construction à laquelle se réduit la construction décrite par la proposition 6, lorsque cette construction est appliquée à la composition des mouvements de génération de deux coordonnées bipolaires auxquelles une certaine courbe est référée[66]. Dans ce cas la coordonnée MP peut en effet être localement assimilée à un rayon tournante à cause de sa perpendicularité à la droite HA. Newton se réclame en revanche, encore une fois, de la proposition 1.

Cette proposition intervient donc à deux reprises pour justifier la construction de Newton : d'abord pour assurer que si VU représente la vitesse ponctuelle du mouvement du point V en direction de U, alors la vitesse ponctuelle de rotation de ce point autour de O est représentée par le segment VZ ; ensuite, pour justifier l'identification de la tangente à la conchoïde avec la diagonale du quadrilatère construit en tirant de P et Q les perpendiculaires aux segments MP et MQ.

Considérons d'abord la première intervention. En tant que point qui appartient par hypothèse à la droite tournante OM dont la distance au point M est constante, le point V est soumis à deux mouvements qui ont lieu en deux directions orthogonales, l'un dû à la rotation du rayon vecteur OM autour du centre O, et l'autre dû à la contrainte qui force ce point à glisser sur ce rayon vecteur pour garder une distance constante du point M. Se mouvant de cette manière, sa distance à la droite OK change en conséquence. La vitesse ponctuelle de ce point en direction de U n'est rien d'autre que le vitesse ponctuelle du mouvement imaginaire qui engendre le segment donnant cette distance. La vitesse ponctuelle de ce point le long de la direction orthogonale au rayon OM est en revanche la vitesse ponctuelle de rotation du rayon vecteur OM référée à ce point. Comme on n'a à faire ici qu'à des vitesses ponctuelles, l'angle $\mathsf{U\hat{Z}V}$ peut être pris comme constant, donc on aura la relation $\mathsf{VU} = \mathsf{VZ}\sin\alpha$, où $\sin\alpha$ est un facteur constant. Pour en conclure, conformément à la proposition 1, que le module de la première de ces vitesses est au module de la seconde comme VU est à VZ, il faut supposer que si la vitesse ponctuelle de V en direction de U est prise comme la vitesse ponctuelle d'un mouvement qui engendre le segment VU, alors la vitesse ponctuelle de ce point le long de la direction orthogonale du rayon OM doit être prise comme la vitesse

[66]Cf. ci-dessus, p. 479.

ponctuelle d'un mouvement qui engendre le segment VZ. Mais rien ne nous autorise *a priori* à supposer ceci. L'argument de Newton est donc encore une fois circulaire, et la référence à la proposition 1 sert, une fois de plus, à cacher cette circularité. Le succès auquel celui-ci parvient ne dépend alors que du fait que sa construction est équivalente à celle de Roberval, et peut de ce fait être déduite de celle-ci[67].

La chose est différente pour la seconde référence à cette proposition, car elle peut aisément être substituée, comme on l'a vu ci-dessus en discutant la construction de la tangente à l'ellipse, par un argument fondé sur la proposition 6[68] (qui, si on suppose comme un axiome le principe du parallélogramme, est indépendante de la proposition 1). Il reste pourtant que Newton insère cette fois sa référence à la proposition 1 dans un cadre nouveau. Voici ce qu'il écrit[69] :

> Now since a twofold velocity of the point M is known namely MP towards P & LO towards Q, make $\mathsf{tQ} \perp \mathsf{QM} = \mathsf{LO}$; & the motion of the point M shall bee in the line tM the diameter of the circle passing through the points PMQt (prop 1) & therefore tang$^{\text{nt}}$ to the Concha.

Prendre le point t comme le pied du diamètre passant par M du cercle déterminé par la condition de passage par les points M, P et Q, comme Newton le suggère, ne revient qu'à prendre le point t comme intersection des perpendiculaires aux segments MQ et MP issues des points Q et T. Se réclamer de la proposition 1 pour en conclure que la droite Mt est la tangente cherchée, revient donc à supposer que cette proposition assure qu'une vitesse ponctuelle qui se laisse représenter par le diamètre d'un certain cercle est la résultante de la composition de deux autres vitesses ponctuelles se laissant respectivement représenter par deux cordes quelconques de ce cercle qui ont leur origine commune dans l'origine de ce diamètre. Et il est clair que rien dans la proposition 1 peut nous assurer de ceci en général. Si ceci est correct, dans le cas particulier dont il est question, ce n'est qu'en raison de la nature particulière des coordonnées choisies par Newton, et donc des vitesses ponctuelles des mouvements qui les engendrent.

10.3.2 Le point d'inflexion de la conchoïde

Le deuxième problème choisi par Newton pour illustrer la puissance de sa théorie de la composition des mouvements concerne encore une fois la conchoïde de Nicomède et tient à la recherche de son point d'inflexion. À en juger des notes qui nous sont parvenues, c'est la première fois que Newton aborde la question du point d'inflexion d'une courbe. S'il le fait en considérant l'exemple de la conchoïde, c'est certainement que ce problème se pose dans ce cas de manière plus simple que pour d'autres courbes, car l'existence et l'unicité d'un tel point pour chacune des deux branches d'une conchoïde est manifeste ; il ne s'agit donc que de caractériser ce point *a posteriori.* Cette simplicité en avait poussé bien d'autres à s'occuper de ce problème. C'était le cas, en particulier, de Huygens, van Schooten, van Heureat et

[67] Si Newton ne connaissait probablement pas la construction de Roberval, il connaissait sans aucun doute celle de Descartes [cf. la note (62), ci-dessus] et celle que Van Schooten avait proposé de substituer à celle-ci dans son commentaire à la *Géométrie* [cf. Descartes (GvS, II), II, 258]. Il est donc probable qu'il ait raisonné à rebours en partant de ces constructions pour en déduire la sienne.

[68] Il est remarquable que la référence à la proposition 1 se substitue dans ce cas à une référence précédemment indiquée et puis rayée à la proposition 6 [cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, note (25), 394].

[69] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 394.

Fermat. Ce problème était de ce fait devenu un exemple classique pour comparer les qualités des différentes approches de l'étude des courbes géométriques. Ce fut donc probablement la perspective de cette comparaison, plus que l'intérêt du problème en tant que tel, qui poussa Newton à s'en occuper. Avant de discuter la solution proposée par ce dernier, il convient donc d'exposer les solutions de ses illustres prédécesseurs.

Les solutions de Huygens, van Schooten, van Heureat et Fermat

Considérons d'abord la solution obtenue par Huygens dans un manuscrit daté du 25 septembre 1653[70]. Ce dernier part de l'hypothèse que chacune des deux branches d'une conchoïde de Nicomède présente un et un seul point d'inflexion. Il suppose que ce point soit donné. Soit alors CB (fig. 14) une branche de conchoïde de Nicomède, de centre O et base HA, et soit I son point d'inflexion. Soient de plus IJ et ID respectivement la tangente et la normale à cette conchoïde au point I, les points J et D étant pris sur l'axe OA qui sépare les deux branches de celle-ci. De tous les points de cet axe où celui-ci coupe une tangente à la conchoïde, le point J est alors le plus éloigné de A, point où cet axe coupe la base HA. Pour déterminer la position de I, il ne s'agit donc que de déterminer la distance entre le point A et le point où l'axe OA coupe la tangente à un point quelconque de la conchoïde et que de chercher la condition sous laquelle cette distance est un *maximum.* Pour faire ceci, Huygens réfère la conchoïde à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'axe HA et d'origine A. Si M est un point courant sur cette courbe, on pourra ainsi poser $\mathsf{AS} = \mathsf{PM} = y$ et $\mathsf{AP} = \mathsf{SM} = x$. Si on pose aussi $\mathsf{AB} = a$ et $\mathsf{OA} = b$, il ne sera pas difficile de vérifier que la condition $\mathsf{AM} = \mathsf{LM}$, qui caractérise la conchoïde, donne l'équation de quatrième degré :

$$x = \sqrt{\frac{a^2b^2 + 2a^2by - b^2y^2 - 2by^3 - y^4 + a^2y^2}{y^2}} \tag{10.15}$$

qui n'est d'ailleurs que l'équation de la conchoïde. De là, il est ensuite facile de conclure que si MT est la tangente à la conchoïde en M, alors,

$$\mathsf{AT} = \frac{2a^2by + a^2y^2 - by^3}{a^2b + y^3} \tag{10.16}$$

En suivant les prescriptions de la méthode des *maxima* et *minima* de Fermat, Huygens n'a donc qu'à égaliser cette expression de AT avec l'expression qu'on obtient de celle-ci en remplaçant y avec $y + e$, pour obtenir, après omission des puissances d'ordre supérieur de e et simplification, l'équation :

$$y^3 + 3by^2 - 2a^2b = 0 \tag{10.17}$$

qui caractérise justement l'ordonnée IE du point d'inflexion I. Pour construire ce point, il ne faut alors que construire une équation de troisième degré, ce que Huygens n'a aucune difficulté à faire[71].

Cette même construction, sans l'analyse qui la suggère, fut exposée par Huygens une année plus tard, dans son *De circuli magnitudine inventa*[72] et communiquée à van Schooten

[70]Cf. Huygens (OC), XII, 83-86.
[71]Cf. Huygens (OC), XII, 84-86.
[72]Cf. Huygens (1654), probl. VIII, 69-71, et (OC), XII, 183-215, probl. VIII, 211-215.

dans une lettre du 23 octobre 1655[73]. C'est justement au *De circuli magnitudine inventa* que ce dernier se réfère lorsque, dans la deuxième édition de son commentaire à la *Géométrie* annexée à la deuxième édition latine de celle-ci, en discutant de la solution donnée par Descartes du problème de la normale à la conchoïde, il aborde le problème de la recherche du point d'inflexion de cette même courbe[74]. Pour justifier la construction de Huygens, van Schooten se réclame pourtant d'un argument de dérivation cartésienne. En tirant du point B la parallèle Bj à la base AH à l'encontre de la tangente IJ relative au point d'inflexion, et en posant $\mathsf{BJ} = v$ et $\mathsf{Bj} = s$, il obtient[75], conformément aux positions précédentes, l'équation

$$x = \frac{as - sy + sv}{v} \tag{10.18}$$

qui, composée avec l'équation (10.15), donne une nouvelle équation en y, s et v. Pour déterminer l'ordonnée EI du point d'inflexion I, il suffit alors de chercher la condition sous laquelle cette dernière équation à une racine triple dans la variable y. C'est justement en imposant cette condition que van Schooten obtient l'équation (10.17).

Bien que la construction de cette dernière équation fournisse une construction correcte du point d'inflexion de la conchoïde, cette dernière peut aussi être obtenue par une autre voie, à travers la construction d'une équation de deuxième degré. L'argument qui conduit à cette équation, obtenue pour la première fois par van Heuraet, est exposé par van Schooten à la suite de l'argument précédent[76]. Si MG est la normale à la conchoïde au point courant M, le triangle MGT est rectangle. Donc, en introduisant la nouvelle variable $z = \mathsf{AT}$, on aura donc l'égalité

$$x^2 = (z - y)(\mathsf{AG} + y) \tag{10.19}$$

En exploitant cette égalité, van Heuraet obtient, après quelques calculs, l'équation

$$(z + b)y^3 - a^2y^2 - 2a^2by + a^2bz = 0 \tag{10.20}$$

Si M est choisi de sorte que T se trouve au delà de B, cette équation devra avoir deux racines réelles en y, car chaque point T pris sur l'axe OA entre B et J est le pied de deux tangentes, l'une relative à la portion concave et l'autre relative à la portion convexe de la conchoïde. Et si ces deux racines sont coïncidentes, alors T coïncide avec J. En posant cette condition, van Heureat parvient, après plusieurs calculs, à une équation de deuxième degré en y et z, qui suggère de construire le point d'inflexion par intersection de la conchoïde elle-même avec un cercle[77].

Parmi les trois solutions précédentes, celle de Huygens se caractérise par son recours à la méthode des *maxima* et *minima* de Fermat. L'idée de recourir à cette méthode pour déterminer le point d'inflexion de la conchoïde de Nicomède avait été d'ailleurs déjà exploitée par Fermat lui-même dans un manuscrit qui fut plus tard publié dans ses *Varia Opera Mathématica*[78]. Fermat applique pourtant cette méthode non pas à la distance AT, mais à

[73]Cf. Huygens (OC), I, N° 165, 245-246.

[74]Cf. Descartes (GvS, II), I, 249-264, en particulier 258.

[75]Cf. Descartes (GvS, II), I, 258-259.

[76]Cf. Descartes (GvS, II), I, 259-262.

[77]Sur les réactions de Huygens à la solution de van Heureat, cf. l' "avertissement" anonyme à l'édition du *De circuli Magnitudine*, dans les *Œuvres complètes* de Huygens : cf. Huygens (OC), XII, 93-112, en particulier, 110-112.

[78]Cf. Fermat (1679), 69-73, en particulier 70-71, et Fermat (OTH), I, 158-167, en particulier 166-167.

l'angle $\mathsf{M\hat{T}A}$. En effet, si le point M coïncide avec le point d'inflexion I, alors cet angle, et donc le rapport $\frac{\mathsf{MS}}{\mathsf{ST}}$, doivent être des *minima*. Il ne s'agit alors que d'exprimer ce dernier rapport en termes d'une coordonnée du point M et puis de procéder comme d'habitude.

Les deux solutions de Newton

Parmi les quatre solutions précédentes, les trois premières étaient sans doute connues par Newton[79]. Celui-ci montre pourtant, dans sa note du 16 mai 1666, vouloir parcourir des nouvelles routes, visant peut-être (outre à illustrer la puissance de sa théorie générale de la composition des mouvements) à rendre possible une généralisation plus aisée. Après avoir énoncé son problème — "To find the point I which distinguisheth twixt the concave & convex portions of the Concha"[80] —, il présente deux différentes solutions pour celui-ci, l'une n'employant que la théorie générale de la composition des mouvements, et l'autre se réclamant, comme celles de Huygens et Fermat, d'une condition de *maxima* et *minima*, condition qu'il réfère pourtant à la vitesse ponctuelle d'un certain mouvement.

La première solution La première parmi de ces solutions est encore une fois indépendante de l'algorithme énoncé par la proposition 7, autant dans sa formulation générale que dans son application particulière à la conchoïde. Exposée en général, l'idée directrice de cette solution est la suivante : si, quelle que soit la courbe donnée, on sait déterminer le pied de sa tangente dans chacun de ses points sur un axe fixe donné, alors il ne s'agit que de chercher la vitesse ponctuelle du mouvement de ce point le long de cet axe, puis de chercher les conditions sous lesquelles cette vitesse est nulle ; ces conditions sont des conditions nécessaires pour que la tangente en question touche la courbe en un point d'inflexion (où la tangente ne soit pas parallèle à l'axe choisi)[81].

Cette procédure — qu'il est aisé de justifier en concevant un point d'inflexion comme un point où la tangente à la courbe coïncide avec les tangentes à tous les points qui lui sont infiniment proches[82] — peut donner lieu à deux développements distincts, selon si la vitesse ponctuelle du mouvement du pied de la tangente le long de l'axe choisi (qui n'est au fond que le mouvement qui engendre la sous-tangente prise sur cette axe), est représentée par un segment dont on fournit une construction possible, ou si elle est exprimée par une expression Algébrique dans laquelle intervient une variable caractérisant le point de la courbe qui correspond à cette tangente. Dans le premier cas, il s'agit de supposer que le segment en question est nul et de tirer de cette hypothèse des conséquences géométriques qui, imposées à la construction de ce même segment, déterminent à rebours le point d'inflexion. Dans

[79]Dans une note du printemps 1665 [cf. Newton (MP), I, **3**, 6, § 2, 502-505], Newton avait appliqué à l'exemple de l'équation (10.17) — qu'il avait introduit en l'accompagnant d'une référence à la *Géométrie* — une technique de construction d'équations qu'il avait élaborée quelques jours auparavant, en arrivant à construire le point d'inflexion de la conchoïde par l'intersection de cette dernière avec un cercle [cf. *ibid.*, note (1), 502-503].

[80]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 395.

[81]Comme d'habitude à l'époque, Newton ne distingue pas, à vrai dire entre conditions nécessaires et conditions suffisantes, et il ne fait pas mention de possibles points d'inflexion où la tangente est parallèle à l'axe choisi. Dans le cas particulier de la conchoïde de Nicomède qui ne possède qu'un extrême bien déterminé et deux points d'inflexion symétriques dont l'existence est certaine (et dont la tangente n'est certainement pas parallèle à la base de cette courbe), l'omission de ces distinctions n'a d'ailleurs aucune conséquence gênante.

[82]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, note (31), 297.

le deuxième cas, il s'agit en revanche de résoudre l'équation qui résulte lorsqu'on égalise l'expression trouvée à zéro. En montrant encore une fois vouloir rester le plus possible en deçà du formalisme Algébrique, Newton choisit la première possibilité.

Voyons son argument[83], et cherchons à expliciter les raisons qui le justifient.

Comme il ne s'agit que de chercher le point d'inflexion d'une branche de conchoïde de Nicomède, il est commode de choisir la base HA (fig. 13 et 15) de cette courbe comme l'axe fixe sur lequel on prend le pied de la tangente. Si M est un point courant sur la conchoïde, il s'agira donc, tout d'abord, de déterminer la vitesse du mouvement du point t le long de la base HA.

Pour trouver la tangente Mt au point M, Newton avait conçu le mouvement de ce dernier point comme composé par les mouvements de génération des ses coordonnées MP et OM. Cette décomposition n'est portant pas commode lorsqu'il s'agit d'étudier le mouvement du point t le long de l'axe HA qui est entraîné par le mouvement de M le long de la conchoïde. Newton décompose donc le mouvement de M de manière différente ; en particulier, il le décompose en deux mouvements ayant lieu en deux directions orthogonales entre elles, la direction du rayon vecteur OM et celle de sa perpendiculaire. La tangente Mt étant connue, ceci est fort facile. En particulier, si on suppose que le vitesse ponctuelle du premier de ces mouvements est représentée par le segment MQ (fig. 15), il sera facile d'en tirer que la vitesse ponctuelle du second est représentée par le segment Mm égal et parallèle à Qt. Comme l'angle formé par les directions des ces deux mouvements est constamment droit, cela peut se justifier de deux manières, soit en se réclamant du principe du parallélogramme, soit en observant que la perpendiculaire à MO tirée du point Q rencontre la tangente Mt en t .

Le mouvement du point t le long de l'axe HA peut, de son côté, être pensé comme le mouvement du point d'intersection de la perpendiculaire Qt au rayon vecteur OM, qui se meut le long de la direction de ce même rayon, avec la droite fixe HA. Il suffira alors de transférer le mouvement du point M au point Q puis le mouvement du point Q au point t, conçu comme étant fixe sur la droite Qt et d'appliquer enfin la proposition 6, pour trouver le mouvement du point t pensé comme point d'intersection des droites Qt et HA.

Supposons d'abord que le point t ne se meuve que par effet du mouvement de rotation du rayon vecteur OQ, le point Q restant fixe sur celui-ci. Comme la distance MQ entre M et Q est égale à la distance OL entre O et L, pour transférer le mouvement de rotation du point M au point Q, il suffit de supposer que le rayon vecteur OQ tourne autour du point L avec une vitesse ponctuelle représentée par le segment Qt égal et parallèle à Mm. La vitesse ponctuelle du mouvement de la droite Qt entraîné par ce mouvement de rotation du rayon vecteur OM, évaluée dans le point t sera alors représentée (conformément à la proposition 4) par le segment th pris sur la perpendiculaire à Ot issue du point t, tel que l'angle $h\hat{O}t$ soit égal à l'angle $P\hat{L}M$[84], de manière que le triangle Oth soit semblable au triangle LMP.

Supposons ensuite que le point t ne se meuve que par effet du mouvement du point Q le long du rayon vecteur QM, c'est-à-dire du mouvement de translation de la droite Qt le long de ce même rayon vecteur. Or, la vitesse ponctuelle de ce dernier mouvement résulte de la composition de deux vitesses ponctuelles de direction égale, celle du mouvement du

[83]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 395-396.

[84]Si je comprends correctement la construction de Newton, l'angle $h\hat{O}t$ doit bien être égal à l'angle $P\hat{L}M$ et non pas à l'angle $t\hat{O}Q$, comme le suppose Whiteside [cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, notes (27), 295 et (30), 296].

point M le long du rayon OM et celle du mouvement par lequel le point Q s'éloigne du point M le long de ce même rayon. Mais comme MQ est constamment égal à LO, qui n'est à son tour que la différence entre MO et le segment constant ML, le point Q s'éloigne du point M avec la même vitesse que celle par laquelle le point M avance le long du rayon vecteur OM. conformément à la proposition 3, la vitesse ponctuelle du mouvement du point t entraîné par le mouvement du point Q le long du rayon vecteur QM sera alors représentée par le segment $\mathsf{tr} = 2(\mathsf{MQ})$, pris sur la parallèle à OQ issue du point t.

À ce point, pour obtenir le segment qui représente la vitesse ponctuelle du mouvement du point t le long de la base HA, il suffit de construire le parallélogramme trkh sur les segments th et tr et d'en tracer la diagonale tk — qui, nous dit Newton, en accord aux propositions 2 et 5[85], représente la vitesse ponctuelle du mouvement de la droite Qt évaluée au point t — et d'appliquer ensuite la construction décrite par la proposition 6 pour déterminer le mouvement du point d'intersection entre la droite fixe HA et la droite mobile Qt, dont la vitesse ponctuelle est justement représentée par le segment tk. On obtient alors le segment tp coupé sur HA par la parallèle kp à la droite tQ issue du point k.

De là s'ensuit que si, en se mouvant sur la conchoïde, le point courant M parvient à coïncider avec un point d'inflexion où la tangente n'est pas parallèle à la base HA, alors le segment tp devient nul, c'est-à-dire que le point p coïncide avec le point t. Or, la conchoïde de Nicomède n'a pas de points d'inflexion où la tangentes est parallèle à la base HA, et en raison de ses propriétés géométriques, ce segment ne devient nul que dans le cas où le point M parvient à coïncider avec un des deux points symétriques d'inflexion. Pour déterminer ces points, il suffit donc de supposer que le point p coïncide avec le point t. Dans ce cas, les points Q, t et k seraient alignés et les triangles OQt et tkh seraient alors semblables[86]. Si[87] on pose, comme ci-dessus, $\mathsf{PM} = y$, $\mathsf{AB} = \mathsf{LM} = a$ et $\mathsf{OA} = b$, on aura, en raison de la similarité des triangles LOA, LMP et tQL, les égalités

$$\begin{aligned}
\mathsf{PL} &= \sqrt{a^2 - y^2} \\
\mathsf{hk} &= \mathsf{tr} = 2(\mathsf{MQ}) = 2(\mathsf{OL}) = 2\frac{ab}{y} \\
\mathsf{LQ} &= a + \frac{ab}{y} \\
\mathsf{Qt} &= \frac{y\left(a + \frac{ab}{y}\right)}{\sqrt{a^2 - y^2}}
\end{aligned} \tag{10.21}$$

Mais si les triangles OQt et tkh sont semblables, alors on a la proportion

$$\mathsf{Ot} : \mathsf{th} = \mathsf{Qt} : \mathsf{hk} \tag{10.22}$$

[85] La référence à la proposition 5 sert ici à justifier l'usage du principe du parallélogramme, en se réclamant du fait que ce même principe peut être utilisé pour composer les vitesses du mouvement de la droite Qt évaluées au point Q dont les directions sont orthogonales entre elles. L'emploi de cette proposition confirme donc l'interprétation que j'en ai donnée ci-dessus [cf. p. 474].

[86] En effet dans ce cas l'angle $\mathsf{t\hat{k}h}$ serait droit, comme l'angle $\mathsf{t\hat{Q}O}$. Mais l'angle $\mathsf{h\hat{t}O}$ est droit par construction et l'angle $\mathsf{k\hat{t}Q}$, qui serait alors plat, est la somme des angles $\mathsf{k\hat{t}h}$, $\mathsf{h\hat{t}O}$ et $\mathsf{Q\hat{t}O}$. Il s'ensuivrait donc que l'angle $\mathsf{k\hat{h}t}$ serait égal à l'angle $\mathsf{h\hat{t}O}$ [cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, note (32), 297].

[87] Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 396.

et de là, en raison de la similarité des triangles LPM et Oth, on tire

$$\mathsf{Qt} : \mathsf{hk} = \mathsf{PL} : \mathsf{PM} \tag{10.23}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{y\left(a+\frac{ab}{y}\right)}{\sqrt{a^2-y^2}} : 2\frac{ab}{y} = \sqrt{a^2-y^2} : y \tag{10.24}$$

d'où il est facile de tirer l'équation (10.17).

* * *

Bien que l'idée directrice de l'argument de Newton s'applique à n'importe quelle courbe, il est aisé de voir que cet argument ne s'applique qu'à la conchoïde. Et il est également aisé de comprendre ce qui, dans la nature de la conchoïde, rend cet argument possible.

Supposons en fait que XY (fig. 16) est une courbe quelconque dont on suppose connaître la tangente Mt dans un point M quelconque, c'est-à-dire qu'on suppose connaître la position du point t sur un axe fixe, quel que soit cet axe (pourvu, évidemment, qu'il ne soit pas parallèle à cette tangente). Tirons alors une droite quelconque HA qui rencontre en t la tangente à la courbe XY au point M et traçons à partir de M la perpendiculaire MP à la droite HA. Fixons un point O en dehors de la courbe et tirons la droite OM ; à partir du point t tirons aussi la perpendiculaire tQ à cette dernière droite qu'elle rencontre en Q et construisons le parallélogramme tQMm sur les segments MQ et tQ, dont la tangente tM est la diagonale. Les segments MQ et Mm représentent alors respectivement les vitesses ponctuelles des mouvements de génération de la droite MO et de rotation de cette même droite autour du point O, dont la composition produit le mouvement de génération de la courbe XY. Pour continuer, il faut alors transférer ces mouvements du point M au point Q, puis penser le premier de ces mouvements comme le mouvement de la droite Qt orthogonale au rayon vecteur OQ qui translate le long de la direction de ce rayon, et enfin transférer les mouvements de la droite tQ ainsi déterminé du point Q au point t. Pour ce qui est du mouvement de rotation, cela n'est guère difficile. Il suffit de tirer de t la perpendiculaire th à la droite Ot qui joint les points O et t, et de O la droite Oh qui forme avec Ot un angle $\mathsf{t\hat{O}h}$ égal à l'angle $\mathsf{m\hat{O}M}$. Pourtant ce dernier angle n'est pas égal en général à l'angle $\mathsf{P\hat{L}M}$, que le rayon vecteur OM forme avec la droite fixe HA. La similitude entre les triangles hOt et PLM n'est donc pas garantie. Pour éviter cette difficulté, il faudrait pouvoir choisir la droite fixe HA et le point O de telle sorte que le segment MQ soit constamment égal au segment OL pris sur la droite OM entre le point O et le point L, où cette droite coupe la droite HA. Supposons que cela soit possible. Pour continuer, il faudrait aussi savoir déterminer la vitesse ponctuelle du mouvement par lequel le point Q s'éloigne du point M, tout en restant sur le rayon vecteur OM. Pour pouvoir supposer que cette vitesse soit égale à la vitesse ponctuelle du mouvement de génération du rayon OM il faut encore supposer que le segment ML soit constant, ce qui nous ramène au cas particulier de la conchoïde de Nicomède. Pour en rester au cas général, supposons alors que ces deux vitesses soient différentes entre elles, la première étant représentée par un segment quelconque Qq, et que les segments MQ et OL ne soient pas égaux entre eux. Naturellement on pourra continuer à suivre la construction proposée par Newton. Il suffit de tirer du point t un segment tr égal et parallèle à Mq, et de construire le parallélogramme trkh sur les segments ht et tr pour trouver la point k, d'où il faudrait enfin tirer la parallèle à tQ à l'encontre de la droite HA, trouvant ainsi le segment tp qui représente la vitesse du mouvement de t sur cette dernière droite.

De la supposition que le point p coïncide avec le point t il suit, comme dans l'argument de Newton, que les points Q, t et k sont alignés et que les triangles OQt et tkh sont semblables. Si A est le pied de la perpendiculaire à la droite HA issue du point O, alors les triangles LOA, LMP et tQL seront de surcroît semblables par construction. De plus, comme Mt est tangente à la courbe XY, les deux segments MQ et MP — qui sont tels que les perpendiculaires aux droites auxquelles ils appartiennent issues des points Q et P se rencontrent sur cette tangente — seront entre eux comme les vitesses ponctuelles des mouvements de génération du segment OM et du segment MP lui-même. Si on pose $\mathsf{PM} = y$, $\mathsf{OM} = v$, $\mathsf{LM} = u$ et $\mathsf{OA} = b$ on aura donc les égalités

$$\mathsf{PL} = \sqrt{u^2 - y^2} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{Qt} = \frac{y\left(u + y\frac{s}{q}\right)}{\sqrt{u^2 - y^2}} \tag{10.25}$$

où s est la vitesse du mouvement de génération du segment v. Si on suppose ensuite que

$$\mathsf{Qq} : \mathsf{QM} = \varepsilon : s \tag{10.26}$$

on aura aussi l'égalité :

$$\mathsf{hk} = \mathsf{tr} = \mathsf{MQ} + \mathsf{Qq} = \frac{y\,(s+\varepsilon)}{q} \tag{10.27}$$

Pourtant, les triangles LPM et Oth n'étant pas semblables, de la proportion (10.22) ne s'ensuit nullement la proportion (10.23), et donc de la donnée des segments Qt, hk, PL et PM on ne dérive aucune équation dans les variables y, u, $\frac{s}{q}$ et $\frac{\varepsilon}{q}$, et, *a fortiori*, aucune équation dans la seule variable y, propre à exprimer une condition nécessaire pour que le point M soit un point d'inflexion où la tangente n'est pas parallèle à la droite HA.

On comprend alors que le succès de l'argument de Newton dépend de deux circonstances particulières, qui, prises ensemble, caractérisent la conchoïde de Nicomède, et dont la seconde se présente comme une particularisation ultérieure de la première, . Il faut d'abord que, une courbe étant donnée, il soit possible de fixer, par rapport à elle, une droite HA et un point O, tels que quel que soit le point M pris sur la courbe, la tangente à cette courbe en ce point coupe la droite HA dans un point t tel que : si MQ est le segment qui joint le point M au point Q où la perpendiculaire à la droite OM issue de t rencontre cette dernière droite, et L est le point d'intersection des droites OM et HA, alors $\mathsf{MQ} = \mathsf{OL}$. Cette circonstance fait que la droite Om est parallèle à la droite HA et rend ainsi possible de construire le triangle Oth comme un triangle semblable au triangle LPM, et de s'assurer que

$$\mathsf{MQ} = u\frac{b}{y} \tag{10.28}$$

pourvu qu'on ait posé $\mathsf{PM} = y$, $\mathsf{LM} = u$ et $\mathsf{OA} = b$. Ensuite il faut que le segment ML soit constant, ce qui permet d'un côté d'exprimer MQ en termes de la seule variable y, et de l'autre de déterminer Qq comme étant égal à MQ. De cette manière on élimine d'emblée les rapports $\frac{s}{q}$ et $\frac{\varepsilon}{q}$ des expressions de MQ, Qt et hk, en les remplaçant, l'un et l'autre, par le rapport $\frac{ab}{y}$ (où $a = \mathsf{LM}$).

On voit alors que, tout en faisant intervenir une condition comme la nullité de la vitesse ponctuelle du mouvement du point t sur un axe fixe (qu'on peut penser comme le mouvement de génération de la sous-tangente prise sur cet axe), ce qui rappelle à nos yeux la condition de nullité de la dérivée deuxième, l'argument de Newton ne porte *de facto* que sur le rapport $\frac{s}{q}$ qui donne l'inclinaison de la tangente. Ce rapport est de surcroît réduit à un rapport où n'intervient que une des deux coordonnées qui déterminent le point M (l'autre étant soit la distance $\mathsf{OM} = v$ de ce point à un point fixe, soit sa distance $\mathsf{AP} = x$ à une droite fixe, que, par simplicité, on pourrait faire passer par le point O). Cet argument ne fait donc intervenir la considération d'aucun rapport qu'on puisse de quelque manière assimiler à ce que nous concevons aujourd'hui comme une dérivée deuxième. La condition de similarité des triangles LPM et Oth sert justement à Newton pour exprimer la condition qui caractérise le point d'inflexion de la conchoïde en termes du seul rapport $\frac{s}{q}$. En termes modernes, cela signifie que cette condition n'est référée par Newton qu'à la dérivée première de la fonction qui exprime la courbe considérée. Si dans le cas de la conchoïde, cette caractérisation est suffisante pour parvenir à la solution du problème, cela n'est évidemment pas le cas général.

En observant que la détermination d'un point d'inflexion tient à la nullité de la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de la sous-tangente, Newton a avancé, dans son langage à lui, une condition qui nous apparaît comme proche de celle de la nullité de la dérivée deuxième. S'il ne suit pas son idée jusqu'au bout, en la généralisant, et se contente de l'appliquer au cas particulier de la conchoïde de Nicomède, c'est qu'il ne possède aucune notion générale qu'on pourrait assimiler, ne serait que formellement, à celle de dérivée deuxième. La vitesse ponctuelle du mouvement de génération de la sous-tangente ne peut donc pas être exprimée par le truchement d'un invariant géométrique auquel on pourrait ensuite associer, dans certains cas, un invariant algorithmique. La raison de cela a déjà été indiquée ci-dessus[88] : la métaphore mécanique qui donne sens à la notion de vitesse du mouvement de génération d'un segment n'est pas réitérable directement ; il n'y a rien de tel qu'une vitesse du mouvement de génération d'une vitesse. La vitesse ponctuelle du mouvement de génération de la sous-tangente n'est ainsi que la vitesse ponctuelle du mouvement de génération d'un segment, exactement comme c'est le cas pour la vitesse ponctuelle du mouvement de génération du rayon vecteur OM, ou de toute autre coordonnée de la courbe considérée. S'il s'agit donc de construire le segment qui représente la première de ces vitesses à partir de la donnée du segment qui représente la seconde, cela conduit justement à chercher une procédure aisée pour parvenir à cette construction, comme Newton le fait dans le cas de la conchoïde en exploitant des caractéristiques propres à cette courbe. La détermination de cette construction n'est que le corrélat de la procédure algorithmique qui, dans le cas de courbes exprimées par des équations Algébriques, consiste dans la réduction de l'égalité $sn._x = y\frac{q}{p} = g(x)$ — trouvée en appliquant l'algorithme énoncé par la proposition 7 à l'équation de la courbe — à une équation entière entre les variables $sn._x = z$ et x, et dans une nouvelle application à cette équation de ce même algorithme.

Tout comme cette dernière procédure algorithmique, la procédure de construction du segment tp que Newton propose dans le cas de la conchoïde cache les relations générales qui lient entre eux les rapports $\frac{q}{p}$ et $\frac{r}{p}$ (dont le premier est d'ailleurs *de facto* éliminé, en tant que tel, lors de la première étape de cette procédure algorithmique, en faveur de l'expression Algébrique $g(x)$ qui tient à la courbe particulière dont il est question). Si les deux

[88]Cf. la section 9.2.2, en particulier pp. 453-454.

procédures relèvent d'une nouvelle application d'une procédure élémentaire déjà appliquée précédemment, on ne retrouve dans celles-ci rien de tel qu'une réitération directe qui puisse suggérer l'idée clef de réitération d'un opérateur. En d'autres termes : en introduisant la notion de vitesse ponctuelle du mouvement de génération des coordonnées d'un courbe, Newton est parvenu à définir un rapport formellement équivalent à notre rapport $\frac{dy}{dx}$ et à montrer le rôle que ce rapport joue dans la résolution de plusieurs problèmes géométriques ; mais il ne peut pas penser ce rapport comme le premier terme d'une hiérarchie de rapports tous liés entre eux par la relation qui lie ce premier rapport à une coordonnée de la courbe.

La deuxième solution Bien que Newton ne pouvait certes pas saisir les limites de sa solution du problème du point d'inflexion de la conchoïde ainsi que nous savons le faire aujourd'hui, il était certes conscient de l'impossibilité de généraliser cette solution au cas d'une courbe quelconque. C'est probablement en visant une méthode générale pour la recherche des points d'inflexions que Newton fait suivre l'exposé de cette solution par une observation à propos de la méthode des *maxima* et *minima*, et qu'il exemplifie ensuite cette observation en présentant une nouvelle solution de ce problème dans le cas de la conchoïde.

> In stead of the ordinary method de Maximis et Minimis — il écrit[89] —, it would be as convenient (& perhaps more naturall) to use This ; Namely. To find the motion of the line or quantity & suppose it equal to nothing, or infinitely small.

D'après Whiteside[90], la méthode des *maxima* et *minima* à laquelle se réfère Newton est celle de Hudde[91]. Il est pourtant bien plus naturel de penser que Newton se réfère plus en général à la méthode de Fermat[92]. Son observation reviendrait donc à remarquer que dans un extrême d'une grandeur variable y, il y a non seulement égalité entre deux valeurs de cette variable qui correspondent à deux valeurs infiniment proches d'une autre grandeur variable x dont y dépend, mais il a aussi, plus en général — c'est-à-dire indépendamment de la considération de toute autre grandeur x dont y dépend —, une inversion dans la direction de la vitesse ponctuelle du mouvement qui engendre cette grandeur, et donc nullité de cette vitesse. Prise en tant que telle, cette observation semblerait donc justifier *a posteriori* la solution précédente, en explicitant un lemme général dont celle-ci relève, plutôt que d'en suggérer une nouvelle. L'énonciation de ce lemme général suggère néanmoins la possibilité d'une nouvelle solution pour le problème du point d'inflexion de la conchoïde. C'est justement cette solution que Newton expose en clôturant sa note.

Avant d'y venir, il est pourtant nécessaire d'éclairer le contenu de l'observations précédente. D'abord, il faut noter qu'en éliminant la référence explicite à une grandeur x dont la grandeur y, dont on cherche un extrême, est censé dépendre, Newton n'a plus aucun besoin de distinguer différents ordres d'infinitésimalité. Supposons qu'on dispose d'une égalité telle que $y = f(x)$, où $f(x)$ est une expression Algébrique en x. La méthode de Fermat consiste à supposer que e est une grandeur infiniment petite par rapport à x, et à faire l'hypothèse que la différence $f(x) = f(x + e)$ — qui est de toute façon infiniment petite par rapport à x (car une grandeur est par définition une fonction continue, dans

[89]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 397.
[90]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, note (35), 397.
[91]Cf. la section 3.3.2.
[92]Cf. la section 3.4.

notre langage) — est aussi infiniment petite par rapport à e (ce qu'on exprime d'habitude en disant que cette différence est nulle après élimination des puissances supérieures de e et division par e). En revanche, la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de y est en général une grandeur finie, et donc rien ne change dans le résultat qui sera trouvé, selon si on suppose que cette vitesse est nulle ou qu'elle est infiniment petite par rapport à y. Cela explique et justifie l'ambiguïté de l'observation de Newton. Il faut pourtant aussi observer que Newton ne travail jamais avec une seule vitesse ponctuelle ; il en considère toujours au moins deux dont il détermine la relation. La condition de nullité de la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de y équivaut ainsi soit à la condition de nullité du rapport entre deux vitesses ponctuelles, soit à la condition de nullité d'un produit dont une autre vitesse ponctuelle est un facteur. Si on suppose que y dépend de x, alors on a dans le premier cas la condition $\frac{q}{p} = 0$ et dans le second la condition $q = Xp = 0$, où p est la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de x, et X une grandeur convenable. Si on choisit la première formulation, il faut supposer d'emblée que p soit différent de zéro. Si on choisit la première, il faut supposer que la nullité de q n'est pas une conséquence de la nullité de p. Si x est une variable absolument indépendante — c'est-à-dire, qu'elle ne dépend d'aucune autre variable dans le contexte du problème abordé —, alors la condition $p \neq 0$ est évidemment implicite et son respect ne dépend que d'une convention banale. Mais, si le problème abordé se pose dans un contexte où x dépend à son tour d'une troisième variable, alors la condition $p \neq 0$ est essentielle. C'est ce que Newton ne manque pas de noter :

> But than the motion to which tis [the mouvement of y] compared must bee finite. That is, the unkown quantitys ought not bee at their gratest or least, both at once[93].

Avant d'aborder à nouveau le problème du point d'inflexion de la conchoïde, Newton éclaire son observation à propos de la méthode des *maxima* et *minima*, par un exemple bien plus simple[94] : deux segments étant donnés, dont l'un est fixe et l'autre tourne autour d'une extrémité du premier, il s'agit de déterminer la position de ce dernier segment de façon à ce que le troisième côté du triangle construit sur ces deux segments soit le plus court possible. Le problème a évidemment une solution immédiate, tirée des propriétés géométriques du cercle : cela se passe quand le triangle se réduit à un segment, c'est-à-dire que les deux côtés donnés se superposent. Le but de Newton n'est pourtant pas celui de résoudre ce problème trivial, mais de montrer, sur un cas on ne pourrait plus simple, comment il est possible de résoudre un problème des *maxima* et *minima*, en se fondant sur l'observation précédente.

Si a et b sont les deux segments donnés, a étant fixe et b tournant, et que y est le troisième côté du triangle construit sur ceux-ci, il s'agit de trouver la valeur de la hauteur $x = b \sin \alpha$ de ce triangle, α étant l'angle formé par les segments a et b. Comme Newton n'emploie pas de fonctions trigonométriques, il ne peut que se réclamer du théorème de Pythagore pour tirer l'équation :

$$y^4 - 2(a^2 + b^2)y^2 + a^4 + b^4 + 4a^2x^2 - 2a^2b^2 = 0 \tag{10.29}$$

[93]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 397. Whiteside [*ibid.*, note (36)] qualifie la deuxième partie de l'énoncé de Newton "a curious turn of phrase". Cette formulation me semble pourtant toit à fait naturelle, si on suppose que x dépend d'une troisième variable.

[94]Cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 397.

Cette équation étant donnée, Newton applique pour la première fois dans sa note l'algorithme énoncé par la proposition 7, et il détermine, à l'aide de celui-ci, l'équation qui lie entre elles les vitesses ponctuelles de génération de x et y, respectivement p et q :

$$4y^3q - 4(a^2 + b^2)yq + 8a^2xp = 0 \tag{10.30}$$

Si $q = 0$, on a ainsi

$$8a^2xp = 0 \tag{10.31}$$

Et, en supposant que p et a soient différents de zéro, il est enfin aisé de tirer la solution attendue[95] : $x = 0$.

Ce premier exemple rend clair le parcours qu'il faut suivre pour déterminer le point d'inflexion de la conchoïde : il ne s'agit que d'associer à chaque point d'une branche de celle-ci un segment qui rejoint un extrême quand et seulement quand le point lui étant associé est le point d'inflexion de cette branche de la conchoïde, puis d'exprimer la relation qui lie ce segment à une coordonnée du point auquel il est associé par une équation Algébrique, d'appliquer ensuite l'algorithme énoncé par la proposition 7 pour tirer de là une autre équation Algébrique qui exprime la relation qui lie entre elles les vitesses ponctuelles des mouvement qui engendrent respectivement ce segment et cette coordonnée, et enfin de supposer que la première de ces vitesses est nulle sans que la seconde le soit aussi. L'équation qu'on aura ainsi trouvée exprimera une condition qui est satisfaite par cette coordonnée quand et seulement quand le point de la conchoïde qu'elle désigne est le point d'inflexion de la branche considérée.

Ce n'est au fond qu'une reformulation de la solution de Huygens, dans le langage des vitesses ponctuelles des mouvements de génération des segments considérés. Pourtant, pour des raisons de simplicité, Newton associe à chaque point de la conchoïde un segment pris sur la base HA (fig. 15), plutôt que sur l'axe AO, comme l'avait fait ce dernier. Il y associe en particulier le segment AR qui joint le point A au point R où la parallèle BR à la tangente Mt issue du point B coupe la base HA. Ce segment rejoint évidemment un *minimum* quand et seulement quand le point M coïncide avec le point d'inflexion I. Or, de la similitude des triangles PLM et LQT et de l'égalité $\mathsf{MQ} = \mathsf{OL}$ s'ensuit la proportion

$$\mathsf{PL} : \mathsf{LM} = \mathsf{MO} : \mathsf{tL} \tag{10.32}$$

En posant, comme tout à l'heure, $\mathsf{AB} = \mathsf{LM} = a$, $\mathsf{OA} = b$ et $\mathsf{PM} = y$, on aura alors les égalités :

$$\begin{aligned} \mathsf{tL} &= \frac{a^2y + a^2b}{y\sqrt{a^2 - y^2}} \\ \mathsf{tP} = \mathsf{tL} - \mathsf{PL} &= \frac{a^2b + y^3}{y\sqrt{a^2 - y^2}} \end{aligned} \tag{10.33}$$

[95]Pour souligner l'importance de la position $p = 0$, Newton observe que si on cherche à déterminer la positon du segment b, en choisissant comme variable principale la projection de y sur a, "the effect would not have followed because both the motions q & p would have vanished at once" [cf. Newton (MP), I, **2**, 6, § 4, [2], 398]. En effet, si on pose cette projection égale à x, on a l'équation $y^2 + a^2 - b^2 - 2ax = 0$ et donc, selon la proposition 7, $2yq - 2ap = 0$, d'où il est clair que q est nul si et seulement si p l'est aussi, sans ce cette condition nous donne aucune information sur la valeur de x.

Il suffit ainsi d'observer que les triangles PMt et ABR sont semblables pour tirer de là l'autre égalité :

$$\mathsf{AR} = \frac{a^3b + ay^3}{y^2\sqrt{a^2 - y^2}} \tag{10.34}$$

En posant $\mathsf{AR} = z$ on aura alors l'équation :

$$a^6b^2 + a^2y^6 + 2a^4by^3 - a^2y^4z^2 + y^6z^2 = 0 \tag{10.35}$$

Pour trouver la condition qui fait de z un *minimum*, il ne s'agit alors que d'appliquer à cette équation l'algorithme énoncé par la proposition 7 et de poser ensuite dans l'équation résultante $r = 0$, $q \neq 0$. Comme cette dernière équation est la suivante

$$6a^2y^5q + 6a^4by^2q - 4a^2y^3z^2q + 6y^5z^2q - 2a^2y^4zr + 2y^6zr = 0 \tag{10.36}$$

on aura l'égalité :

$$z^2 = \frac{3a^2y^3 + 3a^4b}{2a^2y - 3y^3} \tag{10.37}$$

En comparant enfin cette égalité avec l'égalité (10.34), on aura :

$$\frac{3a}{2a^2 - 3y^2} = \frac{a^3b + ay^3}{a^2y^3 - y^5} \tag{10.38}$$

d'où, il est facile de tirer l'équation (10.17).

Bien que la nouvelle solution de Newton exploite l'algorithme énoncé par la proposition 7, ce dernier ne s'applique pas à l'équation de la conchoïde. Pour trouver l'équation (10.35) à laquelle s'applique cet algorithme, Newton exploite une propriété géométrique de cette courbe — l'égalité entre MQ et OL — qui n'est pas directement exprimée par cette équation — qui, du coup, reste en tant que telle totalement étrangère à la méthode. Cette dernière est ainsi bien loin de se présenter sous l'aspect d'une suite de transformations algorithmiques dont cette équation fournit le point de départ. Elle ne peut donc pas être appliquée en général, c'est-à-dire à n'importe quelle courbe géométrique. Encore une fois, ceci n'est que le corrélat de l'absence, dans la procédure de Newton, de tout objet qui puisse être assimilé à une dérivée deuxième. L'algorithme énoncé par la proposition 7 n'est d'ailleurs appliqué qu'une fois, après qu'une décomposition convenable du mouvement qui engendre la conchoïde a permis de parvenir à une expression du segment $\mathsf{AR} = z$ en termes de la seule variable y.

Il est clair cependant qu'il aurait été également possible de parvenir à la même expression de ce segment (qui dans la procédure de Newton ne fait que substituer par simplicité le segment At égal à la somme de l'abscisse du point M et de la sous-tangente correspondante), en partant de l'équation qui exprime la conchoïde par rapport au système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'axe AH et origine A, en appliquant une première fois l'algorithme énoncé par la proposition 7. Bien que spécifique à la conchoïde, la nouvelle solution de Newton semble alors pouvoir suggérer une procédure générale applicable à toute courbe géométrique fondée de manière essentielle sur ce dernier algorithme. Et elle laisse aussi entendre que le succès final de cette procédure dépend de la possibilité de parvenir à exprimer la sous-tangente en termes d'une seule parmi les deux variables qui fournissent les coordonnées de la courbe considérée. Ce ne sera pourtant pas en suivant cette stratégie que Newton parviendra dans le *Traité de l'octobre 1666* à fournir une solution générale pour le problème des points d'inflexion d'une courbe géométrique. On y reviendra dans la section 11.2.2.

Chapitre 11

Le traité d'octobre 1666

Bien qu'il ne pouvait certes pas être satisfait de l'état d'esquisse dans lequel il avait laissé sa note du 16 mai, Newton ne revint apparemment à son projet qu'au mois d'octobre suivant. Pendant tout l'été 1666 il resta en effet éloigné des recherches mathématiques, ou du moins il ne rédigea pas de notes mathématiques qu'il lui ait semblé utile de conserver. Ce temps lui permit pourtant de laisser mûrir ses idées. Quand il revint à son projet, il le fit en effet pour en parvenir au bout ; entre les mois d'octobre et de novembre 1666, il rédigea un traité à peu-près complet[1], dans lequel tous les principaux résultats auxquels il était parvenu au cours des deux années précédentes sont présentés dans le cadre d'une théorie unitaire : la théorie de la composition des mouvements, avec ses applications géométriques. Bien qu'il ne fait pas de doute qu'il ait conçu son traité comme un aboutissement, Newton garda pour soi son manuscrit, sans se soucier de le publier[2]. Ce dernier eut une diffusion assez limitée pendant sa vie, et même après sa mort[3], et ne fut enfin publié, dans son intégralité, qu'en 1962[4].

Sa structure est analogue à celle de la note du 16 mai. L'exposition est divisée en deux parties ; la première[5] présente la théorie en général, sous la forme de huit propositions qui sont qualifiées de "suffisantes" pour "résoudre les problèmes par le mouvement"[6] ; la deuxième[7] expose la solution de ces problèmes par l'application de ces propositions. La première partie est à son tour divisée, bien que seulement implicitement, en deux sous-parties. Les six premières propositions — qui correspondent, sans beaucoup de changements, aux six premières propositions de la note du 16 mai — servent à exposer en général la théorie de la composition des mouvements ; les deux dernières s'attachent à l'algorithme des vitesses pour des mouvements engendrant des segments dont la relation est exprimée

[1] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, 400-448.
[2] Cf. le chapitre (12).
[3] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note (1), 400.
[4] Cf. Hall et Hall (1962), 15-64. Les pages 5-11 de cet même ouvrage contiennent un court commentaire du traité de Newton qui n'apporte en fait aucun éclairage significatif. Comme le signale Whiteside [cf. encore Newton (MP), I, **2**, 7, note (1), 400], des extraits du manuscrit furent publiés par J. Wilson en 1761 [cf. Robins (MTW), II, 351-356].
[5] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 400-415.
[6] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 400.
[7] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2]-[3] 416-448.

par une équation Algébrique. La septième proposition — que Newton tire de la proposition 7 de la note du 16 mai et de la première partie de la note du 13 novembre 1665[8] — expose cet algorithme. La huitième — qui est en revanche nouvelle, pour l'essentiel — aborde le problème de l'inversion de celui-ci. La solution de ce problème, dans un certain nombre de cas où elle est possible, occupe la grande majorité de la première partie du traité. C'est, à mon sentiment, la principale innovation que ce dernier introduit par rapport aux notes précédentes. Quant à la deuxième partie, elle est bien plus large qu'elle ne l'était dans la note du 16 mai. Loin de se limiter à appliquer ses propositions à la recherche de tangentes et de points d'inflexion, Newton aborde aussi le problème des centres de courbure, les problèmes (directs et inverses) des aires et des rectification, et celui des centres de gravité. Il ne se cantonne pas de surcroît à présenter quelques exemples ; il présente à chaque fois des méthodes aptes à résoudre ces problèmes, sinon en général, du moins dans de larges ensembles de cas. C'est à ce propos qu'il revient aux principaux résultats à propos de tangentes, normales, centres de courbure et aires qu'il avait obtenus dans les deux années précédentes. Ceux-ci sont reformulés et représentés dans le cadre de la nouvelle théorie, et se présentent donc désormais comme des parties d'un édifice unique.

11.1 La première partie du traité : les propositions "suffisantes pour résoudre les problèmes par le mouvement"

Les considérations contenues dans les sections 10.1 et 9.1 permettent de limiter l'analyse des propositions 1-7 du *Traité d'octobre 1666* à une simple comparaison avec les propositions 1-6 de la note du 16 mai 1666 et la première partie de la note du 13 novembre 1665. La proposition 8 de ce traité demandera en revanche un traitement bien plus important.

11.1.1 Une nouvelle exposition de la théorie de la composition des mouvements (propositions 1-6)

Les six premières propositions du *Traité*[9] correspondent, presque mot à mot, aux propositions 1-6 de la note du 16 mai. Les propositions 1 et 6 sont d'ailleurs exactement identiques dans les deux cas. La proposition 2 ne présente que des changements linguistiques fort mineurs et n'est plus suivie du scolie à propos de la réduction du mouvement d'un corps à celui de son centre de gravité. Quant aux propositions 3 et 4, Newton se limite à remplacer le terme "*motion*" par le terme "*velocity*"[10]. La proposition 5 du *Traité* résulte enfin de la réunion de la proposition 5 de la note du 16 mai et des deux scolies qui dans cette note précédaient et suivaient respectivement cette proposition.

De ces propositions, seulement les deux premières sont accompagnées par des preuves que Newton présente à la fin de la première partie de son traité[11].

[8]Cf. la section 9.1.
[9]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 400-402.
[10]Cette substitution intervient en vérité dans un deuxième temps : cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note (5), 401.
[11]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 415.

La preuve de la proposition 1 ne fait que suivre, en vérité de manière inutilement complexe, l'indication que Newton avait donnée dans la note du 14 mai[12]. En imaginant un point g (fig. 1) sur le prolongement du diamètre ac du cercle donné[13], et en tirant de d la perpendiculaire df à ce diamètre, il pose $\mathsf{gf} = x$, $\mathsf{gd} = y$ et $\mathsf{fd} = k$ et il applique le théorème de Pythagore pour trouver l'équation de deuxième degré

$$k^2 + x^2 - y^2 = 0 \tag{11.1}$$

où k est naturellement prise comme une constante. De là, par l'algorithme qui fera l'objet de la proposition 7 (que Newton expose en fait avant de présenter cette preuve), il tire l'équation

$$2xp - 2yq = 0 \tag{11.2}$$

d'où suit l'égalité : $\frac{q}{p} = \frac{x}{y}$. Il lui suffit enfin de supposer que le point g coïncide avec le point a, pour tirer, de par la similitude des triangles cda et fda, les proportions $\mathsf{ac} : y = y : x = p : q$, et de là l'égalité

$$\frac{p}{q} = \frac{\mathsf{ac}}{\mathsf{ad}} \tag{11.3}$$

qui conclut la preuve.

Il est facile de comprendre que l'explicitation de cette preuve n'apporte aucun changement essentiel à l'argument, largement insatisfaisant, par lequel Newton avait cherché, lors de sa note du 14 mai, à justifier ses propositions 1 et 2[14]. Ceci d'autant plus que — comme je l'ai déjà observé ci-dessus[15] — la preuve de la proposition 2 est essentiellement la même que celle que Newton avait déjà donnée dans cette note. Celui-ci remplace, encore une fois, le terme "*motion*" qui intervenait dans la preuve donnée le 14 mai, par le terme "*velocity",* et apporte quelques legers changements dans la formulation de son argument. En particulier, il identifie d'emblée les segments ac, ad af, ae, et ab (fig. 2 du chapitre 10) avec les vitesses que, selon la formulation du 14 mai, ces segments ne faisaient que représenter[16]. L'égalité géométrique

$$\mathsf{ab} = \mathsf{ae} + \mathsf{eb} = \mathsf{ae} + \mathsf{ad} \tag{11.4}$$

se présente donc directement comme une expression du contenu de la proposition 2. Il est pourtant clair qu'en tant que vitesses, ces segments ne se comportent pas comme des segments quelconques. En particulier, ils ne s'additionnent pas, en général, comme deux segments quelconques s'additionnent. La preuve de Newton consiste justement dans la réduction de l'addition des segments ac et af à l'addition des segments ad et ae, et dans l'identification de la somme de ces deux derniers segments avec le segment ab, et avec ce segment seulement (c'est-à-dire qu'aucun autre segment, égal à celui-ci en tant que segment, ne saurait correspondre à cette somme). En d'autres termes, Newton semble subrepticement introduire dans sa preuve des objets intermédiaires entre vitesses et segments, pris au sens habituel de ces termes ; ce sont, pour ainsi dire, des segments qui ne se comportent

[12]Cf. p. 467, ci-dessus.
[13]Cf. la figure 1 du chapitre 10.
[14]Cf. la section 10.1.1, ci-dessus.
[15]Cf. p. 467.
[16]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 415 : "And let the first bodys velocity to c bee called ac, the seconds to f bee af, and the 3$^{\text{ds}}$ towards b bee ab. Then shall the firts velocity towards b bee ad (by Prop 1) : and The seconds towards b is ae, (prop. 1)".

pas en tout et pour tout comme de véritables segments. C'est, il me semble, une première apparition de ceux qui vont, bien plus tard, devenir des vecteurs.

11.1.2 L'algorithme des vitesses (proposition 7)

L'algorithme des vitesses (pour des mouvements engendrant des segments dont la relation est exprimée par une relation Algébrique) avait été présenté dans la note du 13 novembre 1665 comme la solution d'un problème. Dans la note du 16 mai 1666, il faisait en revanche l'objet d'un théorème. Il en est de même pour le *Traité d'octobre 1666*. La proposition 7 de ce traité débute en fait comme il suit[17] :

> Haveing an Equation expressing the relation twixt two or more lines x, y, z &c : described in the same time by two or more moveing bodys A, B, C, &c : the relation of their velocitys p, q, r, &c may bee thus found, viz :

À cela font suite trois formulations distinctes du même algorithme : aux deux formulations contenues dans la note du 13 novembre 1665[18], Newton ajoute la formulation contenue dans la note du 16 mai 1666.

La preuve de ce théorème n'est donnée — comme celle des propositions 1 et 2 — qu'à la fin de la première partie du traité[19]. Elle tient, pour l'essentiel, à l'argument que Newton avait employé dans la note du 13 novembre 1665 pour s'assurer que l'équation qui est obtenue, en appliquant cet algorithme à l'équation Algébrique donnant la relation entre les segments engendrés par deux mouvements, exprime bien la relation entre les vitesse ponctuelles de ces mouvements. Néanmoins, au lieu de dénoter l'incrément infiniment petit de x par la lettre "o", Newton dénote cet incrément par le produit "po", p étant la vitesse ponctuelle du mouvement qui engendre ce segment. Il s'ensuit que l'incrément infiniment petit de y est dénoté à son tour par le produit "qo", q étant la vitesse ponctuelle du mouvement qui engendre ce segment. Le lemme dont relève l'essentiel de la preuve se laisse de ce fait formuler comme il suit[20] :

> [...] if the described lines bee [...] x, & [...] y, in one moment, they will bee [...] $x + po$ & [...] $y + qo$ in the next.

Si on ne reste qu'à la métaphore mécanique dont relève la preuve, ce changement de notation revient à dénoter par la lettre "o" non pas un segment, comme dans la note du 13 novembre, mais un temps, en particulier un temps infiniment petit au cours duquel les mouvements considérés ne engendrent que des segments infiniment petits et peuvent être considérés comme uniformes. Pourtant, dans la preuve de Newton o ne fonctionne pas comme une grandeur qu'on peut considérer tout seule ; il apparaît à chaque fois comme facteur des produits po et qo qui expriment des segments. Pris en tant que tel, le temps n'intervient donc pas dans cette preuve, il ne sert qu'à permettre de considérer les segments x et y comme deux variables à parts égales, dont aucune ne fonctionne comme variable principale. Au-delà du simple changement de notation, la principale nouveauté de la preuve du *Traité d'octobre 1666*, par rapport à la preuve de la note du 13 novembre 1665, est

[17]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 402.
[18]Pour la deuxième de ces formulations cf. la note (23), ci-dessus.
[19]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 414-415.
[20]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 414.

justement celle-ci : x cesse dans cette preuve de jouer le rôle de variable principale, ce rôle étant pris par une variable temporale cachée. L'équation donnée entre les variables x et y est ainsi traitée *de facto* en termes paramétriques, comme la résultante d'un système de deux équations $F(t,x)=0$ et $G(t,y)=0$[21]. Les deux variables x et y sont donc traitées, l'une et l'autre, comme des variables dépendantes exprimant des segments engendrés par des mouvement quelconques.

Encore une fois, la preuve de Newton ne porte que sur une équation particulière[22], tout en tenant à une procédure applicable à n'importe quelle équation. En supposant donnée l'équation

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}x^{i-j}y^{j}=0 \tag{11.5}$$

on aura, d'après le lemme précédent, la nouvelle équation

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}\left\{\begin{array}{l}\left(\begin{array}{c} i-j \\ 0\end{array}\right)x^{i-j}\sum_{h=1}^{j}\left(\begin{array}{c} j \\ h\end{array}\right)y^{j-h}\left(qo\right)^{h}+ \\ \sum_{k=1}^{i-j}\left[\left(\begin{array}{c} i-j \\ k\end{array}\right)x^{i-j-k}\left(po\right)^{k}\sum_{h=0}^{j}\left(\begin{array}{c} j \\ h\end{array}\right)y^{j-h}\left(qo\right)^{h}\right]\end{array}\right\}=0 \tag{11.6}$$

En divisant cette équation par o (qui, conformément à la nouvelle notation employée par Newton, n'est plus l'incrément de x) et en négligeant les termes où, après cette division, o continue à apparaître, l'on obtient l'équation

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}\left\{\left[\left(i-j\right)x^{i-j-1}y^{j}p\right]+\left[jx^{i-j}y^{j-1}q\right]\right\}=0 \tag{11.7}$$

qui est aussi celle à laquelle on parvient en appliquant l'algorithme.

* * *

Le changement que Newton introduit par rapport à la preuve contenue dans la note du 13 novembre 1665 ne change guère la nature des relations qui lient les variables x, y,. . .à leurs vitesses ponctuelles p, q ,. . .. : ces dernières entrent dans cette preuve comme des grandeurs primordiales ; elles ne sont liées aux premières par aucune définition explicite établissant un lien opérationnel entre ces deux sortes de grandeurs qui soit préalable à l'algorithme qui conduit à l'équation (11.7). De même que la géométrie de la composition des mouvements — que Newton a su désormais élaborer de manière bien plus satisfaisante qu'en novembre 1665 — enseigne à construire les segments qui représentent les vitesses ponctuelles des

[21] On notera que Newton n'écrit jamais ces équations. Si on considère t comme un temps variable, alors ces équations présentent des opérations entre un segment et un temps, et ne peuvent pas de ce fait appartenir à la seule Algèbre des segments. Si on veut écrire ces équations dans le contexte de cette Algèbre, il faut considérer t comme un segment engendré par un mouvement uniforme dont la vitesse constante est supposée être unitaire. Newton n'a pourtant pas besoin d'entrer dans ces détails. Il préfère éviter toute référence explicite à la variable dont o est l'incrément infiniment petit. Il sera plus explicite dans le *De methodis*, où il ne parlera du temps que pour indiquer la variable principale [cf. le chapitre (12), en particulier pp. 608-12].

[22] Il s'agit cette fois de l'équation $x^3-abx+a^3-cy^2=0$.

mouvements de génération de segments donnés, un algorithme explicite permet de fixer les liens Algébriques qui lient l'équation Algébrique exprimant la relation entre ces segments à l'équation exprimant la relation entre ces vitesses, et ceci sans s'appuyer, ni dans un cas ni dans l'autre, sur une définition explicite et préalable de ces vitesses. Dans le premier cas, c'est la supposition du principe du parallélogramme — que Newton croît à tort avoir démontré, mais qui est *de facto* assumé comme un axiome — qui permet cet exploit. Dans le deuxième cas, le même exploit est rendu possible par la supposition de la proportionnalité entre les incréments infiniment petits des segments considérés et les vitesses ponctuelles des mouvements générateurs. Au-delà des intentions de Newton, sa nouvelle théorie se fonde ainsi sur deux axiomes qui fournissent *de facto* une sorte de définition implicite de la vitesse ponctuelle du mouvement de génération d'un segment.

* * *

Aucun scolie ne suit, dans le texte du *Traité d'octobre 1666*, la proposition 7. Lorsque son travail de rédaction se trouvait "à un stade assez avancé"[23], Newton ajouta pourtant, sur une page qu'il avait d'abord laissée blanche, juste avant la première page du manuscrit, deux remarques, respectivement suivies par un et par deux exemples. Le deuxième des exemples qui suit la deuxième remarque est en réalité étranger au contenu de cette remarque et doit être traité, je crois, comme une troisième remarque. On a ainsi trois remarques[24], dont les deux premières peuvent être prises comme deux scolies à la proposition 7.

Par la première de ces remarques[25], Newton suggère une procédure propre à trouver le rapport des vitesses ponctuelles de deux mouvements engendrant deux segments dont la relation est exprimée par une équation Algébriques non entière ou même par une équation non Algébrique[26].

Une équation de la sorte étant donnée, il est facile de la réduire à une équation Algébrique entière à plusieurs variables en remplaçant tout terme non entier ou non Algébrique de celle-ci par une nouvelle variable. Supposons qu'après cette substitution, on obtienne l'équation entière

$$F(x, y, z_1, \ldots z_\mu) = 0 \tag{11.8}$$

qui résultera alors associée à μ équations auxiliaires

$$\{z_i = f_i(x, y)\}_{i=1}^{i=\mu} \tag{11.9}$$

[23]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note 36, 411.

[24]En observant que "Newton ne donne aucune instruction spécifique pour leur placement" [cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note 36, 411] Whiteside a cru "naturel" d'insérer ces remarques après la proposition 8 [cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 411-413]. En effet, à la fin de cette longue proposition, Newton observe qu'il est quelquefois possible de simplifier la procédure qui conduit à la détermination du rapport des vitesses, en appliquant les techniques qui sont décrites dans les deux premières de ces remarques. Cela n'empêche que ces remarques relèvent, non pas de la proposition 8 (même si Newton y fait allusion à des "quantités mécaniques" qu'il n'introduira que dans la proposition 8 [cf. la note (26), ci-dessous]), mais de la proposition 7.

[25]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 411-412.

[26]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 411. Dans le langage de Newton, il s'agit d'équations dans lesquelles interviennent "soit une fraction ou une quantité sourde, soit une quantité Mécanique". Par le terme "quantité mécanique", Newton entend probablement se référer à des primitives non Algébriques, telles que celles qu'il considère lors de la proposition 8 [cf. la section 11.1.3 ci-dessous]. Dans la suite, je parlerai plutôt, à ce propos, de termes ou expressions non Algébriques.

où les $f_i(x,y)$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ sont des expressions Algébriques non entières ou même non Algébriques en x et y. Ces dernières expressions expriment à leur tour des segments qu'on peut supposer comme étant engendrés par des mouvements. Soient alors r_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ les vitesses ponctuelles respectives de ces segments. De ces équations, il sera ensuite possible de tirer respectivement les nouvelles équations[27]

$$\{r_i = \chi_i(x, y, p, q)\}_{i=1}^{i=\mu} \tag{11.10}$$

où les $\chi_i(x, y, p, q)$ sont des expressions Algébriques dans lesquelles n'interviennent que les variables x, y, p et q. Or, en appliquent l'algorithme énoncé par la proposition 7 à l'équation (11.8), on tire une autre équation nouvelle :

$$\Phi(x, y, z_1, \ldots z_\mu, p, q, r_1, \ldots r_\mu) = 0 \tag{11.11}$$

En comparant cette dernière équation avec les équations (11.9) et (11.10), on aura alors l'équation

$$\Phi(x, y, f_1(x, y), \ldots f_\mu(x, y), p, q, \chi_1(x, y, p, q), \ldots \chi_\mu(x, y, p, q)) = 0 \tag{11.12}$$

où n'apparaissent que les variables x, y, p et q. Comme les dernières parmi ces variables n'apparaissent dans cette équation qu'à la première puissance, il sera enfin aisé de tirer de là l'égalité :

$$\frac{q}{p} = h(x, y) \tag{11.13}$$

qui donne le rapport cherché[28].

[27] Considérons une équation quelconque

$$z_\nu = f_\nu(x, y)$$

$(1 \leq \nu \leq \mu)$ appartenant au système (11.9). Si $f_\nu(x, y)$ est une expression Algébrique alors il est possible de réduire cette équation à une équation entière et de lui appliquer l'algorithme énoncé par la proposition 7 (si cette réduction est pénible, ou pourra toujours simplifier l'équation dont il est question en lui appliquant la méthode qu'on est en train d'exposer). En revanche, si $f_\nu(x, y)$ est une expression non Algébrique, alors elle sera de la forme $\square[f(x)]$ ou $\square[f(y)]$ où $f(x)$ et $f(y)$ sont des expressions Algébriques respectivement en x ou en y [cf. la note (26)]. On aura alors une équation telle que

$$z_\nu = \square[f(x)] \quad \text{ou} \quad z_\nu = \square[f(y)]$$

d'où, par la définition de $\square$ [cf. ci-dessous, p. 510], suivront respectivement les équations Algébriques

$$r_\nu = f(x)p \quad \text{ou} \quad r_\nu = f(y)q$$

[28] L'exemple proposé par Newton [cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 411] est le suivant :

$$F(x, y, f(x)) = y^2 - x\sqrt{a^2 - x^2} = 0$$

En posant

$$f(x) = z = \sqrt{a^2 - x^2}$$

on a successivement

$$r = -\frac{px}{z}$$
$$y^2 - xz = 0$$
$$2yq - zp - xr = 0$$

En termes modernes, cette procédure fournit la dérivée des fonctions composées conformément à la règle de la chaîne. Il est pourtant clair que ce n'est pas ainsi que Newton pense sa procédure. Celle-ci n'est pour lui qu'une procédure propre à fournir le rapport des vitesses ponctuelles de deux mouvements engendrant deux segments dont la relation est exprimée par une équation qu'on suppose ne pas savoir réduire à une équation Algébrique entière. On comprendra plus loin le rôle que cette procédure, entendue de cette manière, prendra dans la considération du problème inverse des vitesses.

La deuxième remarque[29] ne présente qu'un cas particulier de la procédure précédente. Newton suggère tout simplement d'appliquer celle-ci pour trouver l'équation des vitesses correspondant à une équation qui puisse être écrite sous la forme

$$\sum_{i=0}^{\mu} f_i(x,y) = 0 \tag{11.14}$$

où les $f_i(x,y)$ $(i = 1, 2, ..., \mu)$ sont des expressions quelconques en x et y. En posant, comme ci-dessus, $f_i(x,y) = z_i$ $(i = 1, 2, ..., \mu)$, on aura $\sum\limits_{i=0}^{\mu} z_i = 0$ et donc, pour la proposition 7, $\sum\limits_{i=0}^{\mu} r_i = 0$. Il suffira alors de déterminer séparément les expressions en x et y qui expriment les vitesses r_i $(i = 1, 2, ..., \mu)$ pour avoir, après substitution, l'équation des vitesses cherchée.

11.1.3 L'algorithme inverse des vitesses (proposition 8)

Comme je l'ai déjà remarqué, la nouveauté principale de la première partie du *Traité d'octobre 1666*, par rapport à la note du 16 mai, tient à l'introduction d'une huitième proposition, consistant dans l'énonciation et la solution du problème suivant[30] :

> If two Bodys A & B, by their velocitys p et q describe the lines x & y. & an Equation bee given expressing the relation twixt one of the lines x, & the ratio $\frac{p}{q}$ of their motions p & q; To find the other line y.

Il s'agit évidemment du problème inverse de celui que la proposition 7 résout : le même problème, ou du moins un problème analogue à celui que dans l'automne 1665 Newton avait déclaré "plus difficile et parfois géométriquement impossible"[31]. En retournant sur ce problème, après une période dans laquelle ses recherches mathématiques s'étaient concentrées pour l'essentiel sur la théorie de la composition des mouvements et sur ses applications à la solution du problème des tangentes, Newton semble plus optimiste[32] :

> Could this ever bee done all problems whatever might bee solved. But by the following rules it may bee very often done.

---

et donc, par substitution,

$$2yq - p\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2 p}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$$

[29]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 412.
[30]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 403.
[31]Cf. ci-dessus, p. 356.
[32]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 403.

Cet optimisme est en vérité le fruit de quelques résultats nouveaux. Cette phrase n'est en effet ajoutée par Newton que dans un deuxième moment, évidemment après qu'il a trouvé les règles auxquelles elle fait référence[33].

Bien que la réflexion qui le conduit à la rédaction de ces règles semble partir des résultats que Newton avait obtenus une année auparavant[34] et suivre un chemin proche de celui qui l'avait conduit à ces résultats, des nouveautés importantes sont à remarquer.

D'abord, le problème à résoudre n'est pas présenté de la même manière : il ne s'agit plus de passer de l'équation des vitesses à l'équation des segments, mais de passer d'une équation $G(x, \frac{q}{p}) = 0$ à une expression $f(x)$, exprimant le segment y — qui est censé être engendré par un mouvement dont q est la vitesse — en termes du segment x. *De facto*, Newton suppose pourtant que la première de ces équations se présente sous la forme d'une égalité telle que $\frac{q}{p} = g(x)$. La plus grande généralité de la nouvelle formulation du problème n'a donc pas de conséquences majeures. Reste pourtant que Newton montre par cette formulation avoir désormais compris que le rapport $\frac{q}{p}$ peut être traité comme une variable à part entière, qui peut même être prise comme l'expression d'un certain segment.

Ensuite, ce problème est désormais conçu indépendamment de toute application géométrique, comme un problème purement algorithmique concernant les relations entre des variables, associées entre elles par des équations qui sont censées être obtenues conformément à un certain algorithme. La solution de ce problème vise ainsi directement à déterminer une expression qu'on peut désormais penser comme une primitive, dans un sens assez proche du sens moderne. Pour indiquer cette expression, Newton utilise le symbole "$\square$" qu'il avait déjà employé en d'autres occasions[35]. Malgré son évidente origine géométrique, ce symbole ne semble pourtant être ici employé que comme la marque d'une transformation formelle à accomplir : une expression $g(x)$ étant donnée et posée égale à $\frac{q}{p}$, le symbole "$\square g(x)$" est utilisé pour indiquer une autre expression $f(x)$, le plus souvent inconnue, telle que $y = f(x) + C$, où C est une constante quelconque[36]. Les origines géométriques du problème conduisent pourtant Newton à ne pas considérer cette dernière constante, ou si on veut à supposer en général qu'elle est égale à zéro. Pour des raison de simplicité, je ferai de même par la suite, c'est-à-dire que j'utiliserai le terme "primitive" pour indiquer l'expression $f(x)$.

Newton considère trois cas, différents entre eux par la nature de l'expression $g(x)$ qui est supposée exprimer le rapport $\frac{q}{p}$. D'abord Newton suppose que $g(x)$ ne consiste qu'en une somme de termes de la forme ax^s où s est un exposant rationnel quelconque. Ensuite, il suppose que cette forme consiste dans le quotient de deux polynômes en x. Enfin, il suppose que la forme $g(x)$ est irrationnelle et considère différents sous-cas qu'il ordonne dans une table. Après avoir considéré ces trois cas, Newton conclut en ajoutant quelques scolies à sa proposition. Il s'agit, dans l'ensemble, d'une masse assez remarquable de procédures purement algorithmiques qui préfigurent un véritable domaine de recherche. C'est le domaine qui s'affirmera plus tard sous le nom de "calcul intégral".

[33]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], note (9), 402.

[34]Cf. le chapitre 7.

[35]Cf. la note (76), ci-dessus.

[36]C'est la raison pour laquelle je garderai dans la suite la notation de Newton, alors que j'ai écrit jusqu'ici "$\sum_{\kappa}^{\xi} [\ldots]$" à la place de "$\square$", pour souligner que ce symbole servait à indiquer une aire [cf. encore la note (76), ci-dessus].

Comment trouver l'expression de y lorsque le rapport $\frac{q}{p}$ est exprimé par un polynôme à puissances rationnelles

Le premier cas considéré par Newton[37] ne présente évidemment aucune difficulté, autre que celle relative aux termes de la forme ax^{-1}. Bien que ce dernier déclare s'intéresser à des expressions "rationnelles", dont l'éventuel dénominateur se réduit à un monôme en x, il énonce, en tant que solution du problème, l'algorithme bien connu qui permet de passer de l'égalité $\frac{q}{p} = ax^{\frac{m}{n}}$ à l'égalité $y = \frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ (où m et n sont des exposants entiers quelconques, n étant différent de 0). S'il est clair que cet algorithme s'applique aussi à des expressions irrationnelles du rapport $\frac{q}{p}$, il est aussi clair qu'il ne résout le problème posé que si l'on suppose qu'il est un algorithme linéaire, ce que Newton ne s'efforce en revanche guère de démontrer.

Ce dernier croit en revanche nécessaire de considérer de plus près le cas où $\frac{m}{n} = -1$. En appliquant l'algorithme précédent, il conclut que dans ce cas y est égal à $\frac{a}{0}x^0$ est il est donc infini. Cet infini, continue Newton, peut pourtant être assimilé à la somme d'un logarithme et du "nombre infini" $\frac{a}{0}$ (c'est-à-dire, si je comprends bien l'argument, que $\frac{a}{0}x^0 = \log x + \frac{a}{0}$, ou bien $x^0 = \frac{0}{a}\left[\log x + \frac{a}{0}\right]$), de sorte que "in this case, x et y increase in the same proportion that numbers & their logarithmes doe"[38].

Whiteside[39] justifie cet étrange argument, en observant que

$$\int_0^\xi \frac{a}{x}dx = a\log\xi - a\log 0 = a\log\xi + \frac{a}{0} \tag{11.15}$$

Il me semble pourtant que cette égalité ne fait qu'en montrer la conclusion à la quelle Newton parvient sous la forme du formalisme différentiel, sans en donner raison. Newton savait qu'en opérant sur l'équation $y = \log x$ comme sur l'équation (11.5), en se servant du développement en série entière de $\log(x + po)$, on obtient l'égalité $\frac{q}{p} = \frac{1}{x}$, et que l'aire d'une hyperbole se comporte comme un logarithme. Plutôt que d'admettre que l'algorithme précédent ne s'applique pas au cas $y = ax^{-1}$, il semble chercher la manière d'accorder cet algorithme avec ces résultats. L'obscurité de son argument montre son échec.

Ce qui est important n'est pourtant pas d'insister sur cet échec, mais d'observer que la mise en jeu des logarithmes non seulement permet à Newton d'éviter d'admettre que son algorithme souffre d'une exception, mais l'autorise surtout à énoncer une règle générale qui fournit la solution du problème posé lorsque le rapport $\frac{q}{p}$ est supposé être égal à $\frac{a}{c+x}$ (a et c étant des constantes quelconques). Voici comment il s'exprime[40] :

> [...] if x bee diminished by c, as if $\frac{a}{c+x} = \frac{q}{p}$[41], y is also diminished by the infinite number $\frac{a}{0}c^0$ & becomes finite like a logarithme of the number x. & so x being given, y may bee mechanichally found by a Table of logarithmes, as shall bee hereafter showne.

Bien que ce nouvel argument ne soit pas moins obscur que le précédent, la comparaison de ce passage avec le quatrième des scolies que Newton fait suivre à la proposition 8[42] rend sa

[37] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 403.
[38] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 403.
[39] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note (10), 402.
[40] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 403.
[41] Il s'agit évidemment de supposer l'égalité $\frac{q}{p} = \frac{a}{x}$ et d'opérer la substitution $x \to x - c$.
[42] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 413 et p. 532, ci-dessous.

conclusion assez claire : si $\frac{q}{p} = \frac{a}{c+x}$, alors y peut être déterminé formellement sous la forme d'une série entière (et sa valeur peut, en l'occurrence, être approchée à l'aide d'une table logarithmique). Par rapport au problème posé par la proposition 8, le cas $\frac{q}{p} = \frac{a}{c+x}$ peut ainsi être considéré, de même que le cas $\frac{p}{q} = ax^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n} \neq -1$), comme un cas élémentaire, un cas auquel on peut chercher à réduire d'autres. Mais, tandis que dans ce deuxième cas, le passage de l'égalité $\frac{p}{q} = ax^{\frac{m}{n}}$ à l'égalité $y = \frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ est immédiat et résout le problème d'emblée, dans le premier, Newton ne peut que passer de l'égalité $\frac{p}{q} = \frac{a}{c+x}$ à l'égalité $y = \square\left(\frac{a}{c+x}\right)$ qui ne fait qu'indiquer le caractère non Algébrique de y et évoquer la possibilité d'en approcher la valeur à l'aide des tables logarithmiques. Naturellement une telle approximation n'a de sens que lorsque la primitive est interprétée comme l'expression d'un certain segment qu'il s'agit de déterminer en tant que tel. Si on en reste aux pures relations algorithmiques, alors l'égalité $y = \square\frac{a}{c+x}$ doit elle-même être prise comme une expression de la solution du problème posé. Bien que dans un nouveau contexte, Newton semble donc répéter la démarche qu'il avait suivie dans deux notes rédigées plus d'une année auparavant, où il s'agissait respectivement de carrer des courbes d'équation $y = \frac{x^k}{ax+b}$ ($k = \ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots$)[43], et de trouver des courbes d'aire égale à celle d'autres courbes données[44].

Le traitement du premier des trois cas dans lesquels Newton distingue le problème posé par la proposition 8 conduit ainsi , implicitement, à l'énonciation des deux règles suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{si} \quad \dfrac{q}{p} = ax^{\frac{m}{n}} & \text{alors :} & y = \dfrac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} \\ \text{si} \quad \dfrac{q}{p} = \dfrac{a}{c+x} & \text{alors :} & y = \square\left(\dfrac{a}{c+x}\right) \end{array} \tag{11.16}$$

On verra comment ces règles seront utilisées par la suite.

Comment trouver l'expression de y lorsque le rapport $\frac{q}{p}$ est exprimé par un quotient de polynômes

Le deuxième cas considéré par Newton[45] tient, comme on l'a dit, à la supposition que le rapport $\frac{q}{p}$ est exprimé par un quotient de polynômes[46]. Il s'agit alors de réduire ce quotient à une somme finie de termes soit de la forme $\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{bx^m}$ — où n et m sont des nombres naturels et a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) et b des coefficients constants, dont le deuxième est différent de 0 —, soit de la forme $\frac{a}{c+x}$ — où a et c sont à leur tour des coefficients constants. Si cette réduction est possible, alors le problème peut être résolu à l'aide des deux règles (11.16).

En termes moderne, il s'agit donc de parvenir à intégrer un quotient de polynômes à l'aide d'une méthode qui préfigure notre méthode de réduction en éléments simples. Si on

[43] Cf. la section 6.2.2, ci-dessus.
[44] Cf. la section 7.2.1, ci-dessus.
[45] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 403-405.
[46] Encore une fois, la formulation de Newton est ambiguë, car celui-ci se limite à supposer que le dénominateur de la valeur de $\frac{q}{p}$ est composé par plusieurs termes ["consist[s] of but one terme" : cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 403]. Les arguments qu'il avance et les exemples qu'il choisit nous font penser pourtant qu'il ne songe qu'à des quotients de polynômes.

la considère dans son contexte originaire, cette méthode pose néanmoins deux problèmes distincts. Le premier tient à la réduction dont il est question : sous quelles conditions cette réduction est-elle possible ? et comment peut-on s'y prendre pour la réaliser, dans les différents cas où elle est possible ? Le deuxième concerne la possibilité d'une application des deux règles (11.16) à l'expression obtenue à la suite de cette réduction pour en tirer une nouvelle expression exprimant y.

Je commencerai par le second problème.

Il est clair que pour justifier une application terme à terme des règles (11.16) à une égalité de la forme

$$\frac{q}{p} = \sum_{j=0}^{\mu} \left[\frac{\sum_{i=0}^{n_j} a_{j,i} x^i}{b_j x^{m_j}} \right] + \sum_{j=0}^{\nu} \left[\frac{a_j}{c_j + x} \right] \tag{11.17}$$

il ne suffit pas de s'assurer que l'algorithme qui conduit de $\frac{q}{p} = ax^n$ à $y = \frac{a}{n+1}x^{n+1}$ est linéaire. D'abord, il faut présumer que le passage de l'expression $g(x)$, qui exprime le rapport $\frac{q}{p}$, à l'expression $f(x)$, qui exprime la variable y, tient à une transformation algorithmique due à une opération unique (quelle que soit l'expression $g(x)$), dont cet algorithme n'est qu'un cas particulier. Ensuite, il faut supposer que cette opération unique — dont Newton ne connaît pas en général la nature algorithmique, et qu'il ne sait définir autrement que comme l'opération qui conduit de $g(x)$ à $f(x)$ — est linéaire.

Ainsi, si d'un côté Newton semble encore bien loin de concevoir un opérateur formel qui, appliqué à n'importe quelle expression $f(x)$ exprimant une variable y en termes d'une autre variable x, produit une expression $g(x)$ exprimant le rapport $\frac{q}{p}$ des vitesses ponctuelles associées aux variables x et y (en concevant plutôt l'algorithme des vitesses comme un algorithme Algébrique bien déterminé, s'appliquant aux seules équations entières), il semble, de l'autre côté, être parvenu à concevoir le passage de l'équation des vitesses à l'équation des variables comme relevant d'un opérateur linéaire (indiqué par le symbole "$\square$"), dont la nature algorithmique n'est connue qu'en certains cas, et qui s'applique à n'importe quelle expression $g(x)$ exprimant le rapport $\frac{q}{p}$. Cette asymétrie me semble la conséquence directe de la plus grande difficulté algorithmique du problème inverse par rapport au problème direct. C'est justement parce que Newton n'a trouvé aucun algorithme déterminé s'appliquant à n'importe quelle expression $g(x)$ exprimant le rapport $\frac{q}{p}$ (ou, ce qui est la même chose, à n'importe quelle équation entière $G(x, y, p, q) = 0$, de premier degré en p et q) et donnant l'équation $F(x, y) = 0$ correspondante, qu'il ne considère qu'un ensemble de cas particuliers, et pense ceux-ci comme des exemples d'application d'une seule opération qui n'est pas définie, en général, par sa nature algorithmique, mais par la fonction qu'elle accomplit. Cette idée est certes suggérée à Newton par la possibilité, sous des conditions convenables, de concevoir l'expression $g(x)$ comme l'aire de la courbe d'équation $F(x, y) = 0$. Elle n'est donc, au fond, que le résultat d'un acte d'abstraction à partir d'une circonstance géométrique. Néanmoins, le fait que p et q puissent être traitées comme des variables apparaissant dans une équation $G(x, y, p, q) = 0$ qu'on obtient à partir de n'importe quelle équation entière $F(x, y) = 0$ par l'application d'un algorithme déterminé, semble à Newton suffisant pour caractériser la transformation qui conduit de $\frac{q}{p} = g(x)$ à $y = f(x)$ en termes purement formels. C'est ainsi justement la détermination formelle et l'applicabilité générale de l'algorithme énoncé par la proposition 7 qui est en même temps responsable de l'absence chez Newton de toute notion similaire à notre notion de différentiation, et de l'apparition d'une notion qui semble s'approcher de notre notion d'intégration.

Ceci étant dit à propos du deuxième problème, venons-en au premier.

Supposons d'abord que le quotient de polynômes donné a été réduit comme on l'a dit, mais que parmi les termes de la forme $\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{bx^m}$ il y en a un tel que $i - m = -1$, pour quelque i entre 0 et n. L'applicabilité des règles (11.16) est alors douteuse : la première de ces règles ne fait que produire l'égalité $y = \infty$; tandis que pour appliquer la deuxième il faut opérer une substitution $x \to x + c$ dans l'expression de $\frac{q}{p}$, sans que cette règle indique clairement comment cette substitution se reflète sur l'expression de y. Newton ne fait qu'occulter cette première difficulté. Non seulement il n'énonce jamais explicitement l'égalité $\Box\left(Kx^{-1}\right) = \log x$, mais il ne s'en sert jamais, en évitant tout simplement de considérer des cas où cette difficulté se manifeste.

Après avoir noté cette première difficulté de la solution de Newton, considérons de plus proche la méthode proposée par celui-ci pour parvenir à réaliser la réduction dont il est question.

Supposons donnée l'égalité

$$\frac{q}{p} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i} \tag{11.18}$$

(où n et m sont des nombres entiers strictement positifs). Pour décomposer ce quotient de polynômes en une somme de quotients de polynômes plus simples, il faut commencer par écrire le polynôme $\sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$ sous la forme d'un produit de deux ou plusieurs polynômes plus simples. Pour faciliter cette factorisation, on peut chercher un terme t tel que la position $x = z + t$ transforme le polynôme $\sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$ en un nouveau polynôme $\sum\limits_{i=1}^{m} B_i z^i$ dépourvu du terme de degré 0. Ce nouveau polynôme aura en fait un facteur $z = x - t$, et on pourra donc écrire aisément le quotient de polynômes donné sous la forme d'une somme de quotients de polynômes dont les dénominateurs ont un degré plus petit que m. Supposons qu'après cette substitution on obtienne le polynôme $\frac{\sum_{i=0}^{n} A_i z^i}{\sum_{i=1}^{m} B_i z^i}$. On aura alors

$$\begin{aligned} \frac{q}{p} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} A_i z^i}{\sum\limits_{i=1}^{m} B_i z^i} \quad &= \frac{a}{z} + \frac{R_{[z]}}{\sum\limits_{i=1}^{m} B_i z^{i-1}} \\ &= \frac{a}{x-t} + \frac{R_{[x]}}{\sum\limits_{i=0}^{m-1} B_{[x],i} x^i} \end{aligned} \tag{11.19}$$

où on aura posé, par simplicité :

$$
\begin{aligned}
& a=\frac{A_0}{B_1} \\
& R_{[z]}=\sum_{i=1}^{n} A_i z^{i-1}-a \sum_{i=1}^{m} B_{i+1} z^{i-1} \\
& R_{[x]}=\sum_{i=1}^{n} A_i\,(x-t)^{i-1}-a \sum_{i=1}^{m} B_{i+1}\,(x-t)^{i-1} \\
& \sum_{i=0}^{m-1} B_{[x],i} x^i=\sum_{i=1}^{m} B_i\,(x-t)^{i-1}
\end{aligned}
\tag{11.20}
$$

Cette égalité ayant été obtenue, on pourra ensuite réitérer le procédé, en espérant pouvoir enfin obtenir une expression de $\frac{q}{p}$ de la forme désirée. La méthode de réduction proposée par Newton n'est qu'une spécification de cette méthode générale, visant à faire en sorte qu'on puisse parvenir à obtenir cette expression le plus rapidement possible. Voyons dans les détails comment Newton propose de procéder.

Si $m=1$ et $\sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$ est donc un polynôme de premier degré, le problème a une solution immédiate, quel que soit le polynôme $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$. Il suffira en effet de poser $t=-\frac{b_0}{b_1}$ pour obtenir[47] :

$$
\begin{aligned}
\frac{q}{p} & =\frac{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\,(z-c)^i}{z b_1} \\
& =\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\sum\limits_{j=0}^{n-i}(-)^j \left(\begin{array}{c} j+i \\ j \end{array}\right) a_{j+i} c^j\right) z^i}{b_1 z} \\
& =\frac{a}{z}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=0}^{n-i}(-)^j \left(\begin{array}{c} j+i \\ j \end{array}\right) a_{j+i} c^j\right) z^{i-1}}{b_1} \\
& =\frac{a}{c+x}+\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-i-1}(-)^j\, \frac{a_{i+j+1} c^j}{b_1}\right) x^i
\end{aligned}
\tag{11.21}
$$

[47] Il est facile de vérifier que le même résultat s'obtient directement, sans opérer aucune substitution, en divisant $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ par $b_0+b_1 x$ selon la méthode de division de Mercator [cf. les notes (69) et (70) du chapitre (6)], en commençant par les termes du degré le plus élevé. La méthode par substitution, bien que moins directe, a l'avantage de montrer clairement la raison qui fait que, lorsque $\sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$ est un binôme de premier degré, la réduction cherchée est toujours possible.

où on aura naturellement posé, par simplicité,

$$\sum_{j=0}^{n} (-)^j\, a_j \frac{1}{b_1}\left(\frac{b_0}{b_1}\right) = a \quad \text{et} \quad -t = \frac{b_0}{b_1} = c \tag{11.22}$$

Il sera alors facile, en appliquant les règles (11.16), d'en conclure que[48] :

$$y = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-i-1} (-)^j\, \frac{a_{i+j+1}c^j}{b_1\,(i+1)}\right) x^{i+1} + \square\left(\frac{a}{c+x}\right) \tag{11.23}$$

Les choses ne sont pas si simples, si $\sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$ est un polynôme de degré supérieur à 1.

Si dans ce polynôme on opère la substitution $x = t+z$, on obtient un nouveau polynôme $\sum\limits_{i=0}^{m} b_i t^i + \sum\limits_{i=1}^{m} T_i z^i$, où, quel que soit i ($i = 1, 2, ..., m$), on aura :

$$T_i = T_i(t) = \sum_{j=0}^{m-i}\binom{j+i}{j} b_{j+i}t^j \tag{11.24}$$

Ainsi, quel que soit le polynôme $\sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$, il est possible de le réduire à un polynôme tel que $\sum\limits_{i=1}^{m} B_i z^i$, par la substitution indiquée, si et seulement si l'équation

$$\sum_{i=0}^{m} b_i t^i = 0 \tag{11.25}$$

a au moins une racine réelle qui, mise à la place de t, n'annule pas en même temps tous les coefficients T_i ($i = 1, 2, ..., m$)[49]. Sans expliciter cette condition nécessaire et suffisante pour la possibilité de cette réduction, Newton se limite à prescrire de "augmenter ou diminuer x jusqu'à ce que le dernier terme du dénominateur disparaisse"[50].

Supposons alors que cela est possible, c'est-à-dire que l'équation (11.25) a une racine réelle α, telle que $T_i(\alpha) \neq 0$ pour quelque i entre 1 et m. Il s'agit de réduire le quotient

[48] Le premier exemple avancé par Newton [cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 404] relève de l'hypothèse

$$\frac{q}{p} = \frac{x^2}{b_1 x + b_0}$$

qui donne, évidemment :

$$y = \frac{1}{2b_1}x^2 - \frac{b_0}{b_1^2}x + \square\left(\frac{b_0^2}{b_1^3 x + b_1^2 b_0}\right)$$

On observe pourtant que si $b_0 = c = 0$, et donc $z = x$, dans l'égalité (11.21) apparaît un terme de la forme ax^{-1}. Newton ne dit pas comment un tel terme doit être traité.

[49] On remarque que si $b_0 = 0$, alors $t = 0$ est un racine de l'équation (11.25), et donc on pourra supposer $\alpha = 0$ et, par conséquent, $z = x$, et $B_i = b_i$. En d'autres termes, dans ce cas aucune substitution ne sera nécessaire.

[50] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 403. Naturellement, Newton ne fait aucune référence à la manière par laquelle une éventuelle racine réelle de l'équation (11.25) peut être déterminée.

$\dfrac{\sum_{i=0}^{n} A_i z^i}{\sum_{i=1}^{m} B_i z^i}$ obtenu en opérant la substitution linéaire $x \to z + \alpha$ à une somme finie de termes auxquels il est possible d'appliquer séparément les règles (11.16). Voici ce que Newton écrit à ce propos[51] :

> Divide the numerator by the Denominator (as in Decimal numbers) untill the Quotient consists of such parts none of whose Denominators are so multiplied by z, z^2 &c. : & begin the Division in those termes in which z is of its fewest dimensions unlesse the denominator be $B_0 + B_1 z$. If then the termes in the valor of $\frac{q}{p}$ bee such as was before required, the valor of y may bee found by the first part of this Prop : onely it must bee so much diminished or increased as it was before increased or diminished by increasing or diminishing x. But if the denominator of any terme consist of more termes than one, unlesse that terme bee $\frac{a}{c+x}$. First find those parts of y's valor which correspond to the other parts of $\frac{q}{p}$ its valor. & then by the preceding rules &c : seeke the part of y's valor answering to this part of $\frac{q}{p}$ its valor.

Newton se réfère, de toute évidence, à la méthode de division de Mercator[52], en prescrivant d'interrompre la division lorsque le reste ainsi trouvé peut être écrit sous une forme propre à rendre possible l'application des règles (11.16).

Si on applique cette méthode, en commençant par les termes de degré plus petit, autant au numérateur qu'au dénominateur, on obtient d'abord :

$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{n} A_i z^i}{\sum\limits_{i=1}^{m} B_i z^i} = \frac{A_0}{B_k z^k} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{\nu} \left(A_i - A_0 \frac{B_{k+i}}{B_k}\right) z^i}{\sum\limits_{i=k}^{m} B_i z^i} \tag{11.26}$$

où $\nu = \max(n, m)$ et k est le premier nombre entier positif (évidemment compris entre 1 et m, ces limites étant inclues) tel que $B_k \neq 0$. Si on pose, par simplicité,

$$\begin{gathered} A_i = A_{0,i} \\ \left(A_{j,i} - A_{j,j} \frac{B_{k+i-j}}{B_k}\right) = A_{j+1,i} \end{gathered} \tag{11.27}$$

(pour $i = 0, 1, \ldots, n$ et $j = 0, 1, ..., \nu$), en supposant que $A_i = A_{0,i} = 0$ lorsque $i > n$, et

[51] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 403-404. Newton écrit "x" où j'écris "z", en ne distinguant pas entre les variables x et z : et il n'emploie pas la notation avec indices, en écrivant "$a + bx$" où j'écris "$B_0 + B_1 z$".

[52] Cf. la note (47), ci-dessus. Cela laisse penser que dans le cas où le polynôme $\sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$ est un polynôme de premier degré, il préfère appliquer directement cette méthode plutôt que de passer par la substitution $x \to z - \frac{b_0}{b_1}$, comme on l'a fait ci-dessus.

$B_{k+i-j} = 0$ lorsque $k + i - j > m$, on obtient ensuite :

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{i=0}^{n} A_i z^i}{\sum\limits_{i=1}^{m} B_i z^i} &= \frac{A_{0,0}}{B_k z^k} + \frac{A_{1,1}}{B_k z^{k-1}} + \frac{\sum\limits_{i=2}^{\nu} A_{2,i} z^i}{\sum\limits_{i=k}^{m} B_i z^i} \\
&= \frac{A_{0,0}}{B_k z^k} + \frac{A_{1,1}}{B_k z^{k-1}} + \frac{A_{2,2}}{B_k z^{k-2}} + \frac{\sum\limits_{i=3}^{\nu} A_{3,i} z^i}{\sum\limits_{i=k}^{m} B_i z^i} \\
&\dots \\
&= \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{A_{j,j}}{B_k} z^{j-k} + \frac{A_{\nu,\nu} z^{\nu}}{\sum\limits_{i=k}^{m} B_i z^i}
\end{aligned}
\tag{11.28}
$$

Comme $\nu = \max(n, m)$ et $1 \leq k \leq m$, il s'ensuit que $\nu - k \geq 0$ et $0 \leq m - k < m$. Si on pose donc $\nu - k = \mu$ et $m - k = h$, de l'égalité (11.28) il s'ensuit, par simplification :

$$
\frac{q}{p} = \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{A_{j,j}}{B_k} z^{j-k} + \frac{A_{\nu,\nu} z^{\mu}}{\sum\limits_{i=0}^{h} B_{k+i} z^i} \tag{11.29}
$$

avec $0 \leq \mu \leq m$ et $0 \leq h < m$.

Si $m = 1$ (et donc $k = 1$ et $h = 0$) la substitution inverse $z \to x - \alpha$ nous ramène à l'égalité (11.21)[53]. Le problème est donc résolu. Ceci est pourtant le seul cas où l'égalité (11.29) nous fournit d'emblée la solution du problème. En effet, la position $\mu = 0$ implique l'égalité $\nu = m = k$ et donc, si $k = 1$, on ne peut pas avoir aussi $m = 1$ et $h = 0$. On ne peut donc pas avoir en même temps $h = 1$ et $\mu = 0$.

Si $k = 1$, h est pourtant, quels que soient m et ν, plus petit que m et donc le procédé de Newton réduit l'expression donnée du rapport $\frac{q}{p}$ à une somme finie de termes auxquels on peut appliquer séparément les règles (11.16), plus un dernier terme consistant en un quotient de polynômes en x dont le dénominateur est de degré inférieur à m. On peut donc opérer sur ce dernier terme comme on a opéré sur le quotient de polynômes donné, et réitérer le procédé jusqu'à obtenir une expression convenable pour le rapport $\frac{q}{p}$. En particulier, le résultat est immédiat si $m = 2$, et donc $h = 1$.

Ceci est justement le cas de l'exemple choisi par Newton pour illustrer sa méthode :

$$
\frac{q}{p} = \frac{x^3}{b^2 - x^2} \tag{11.30}
$$

L'équation (11.25) est ici la suivante

$$
b^2 - t^2 = 0 \tag{11.31}
$$

[53]Cf. la note (47), ci-dessus.

et Newton choisit, pour plus de simplicité, la racine négative $t = \alpha = -b$. Comme

$$\begin{gathered} A_0 = -b^3 \quad ; \quad A_1 = 3b^2 \quad ; \quad A_2 = -3b \quad ; \quad A_3 = 1 \\ B_1 = 2b \quad ; \quad B_2 = -1 \end{gathered} \tag{11.32}$$

on aura $k = 1$ et

$$A_{0,0} = -b^3 \quad ; \quad A_{1,1} = \frac{5}{2}b^2 \quad ; \quad A_{2,2} = -\frac{7}{4}b \quad ; \quad A_{3,3} = \frac{1}{8} \tag{11.33}$$

et donc :

$$\frac{q}{p} = -\frac{b^2}{2z} + \frac{5b}{4} - \frac{7}{8}z + \frac{z^2}{16b - 8z} \tag{11.34}$$

Si on applique ensuite la méthode de division de Mercator au terme $\frac{z^2}{16b-8z}$, on obtient

$$\frac{z^2}{16b - 8z} = \frac{b^2}{4b - 2z} - \frac{b}{4} - \frac{1}{8}z \tag{11.35}$$

et donc, en substituant dans l'égalité (11.34)[54] :

$$\frac{q}{p} = -\frac{b^2}{2z} + b - z + \frac{b^2}{4b - 2z} \tag{11.36}$$

De là, en opérant la substitution inverse, $z \to x + b$, on a

$$\frac{q}{p} = -x - \frac{b^2}{2x + 2b} + \frac{b^2}{2b - 2x} \tag{11.37}$$

et donc :

$$y = -\frac{x^2}{2} + \square\left(\frac{a}{c_1 + x}\right) + \square\left(\frac{a}{c_2 + x}\right) \tag{11.38}$$

où on aura posé

$$-\frac{b^2}{2} = a \quad ; \quad b = c_1 \quad ; \quad -b = c_2 \tag{11.39}$$

La condition $k = 1$ n'est pourtant pas suffisante à assurer que la méthode de Newton conduise, après un nombre fini de réitérations, à une expression du rapport $\frac{q}{p}$ apte à rendre possible l'application des règles (11.16). De plus, si $k > 1$, la substitution $z \to x - \alpha$ fait apparaître dans l'égalité (11.29) au moins un terme de la forme $\frac{a}{(c+x)^\lambda}$, où λ est un exposant entier plus grand que 1. Or, comme le seul facteur réel de premier degré du polynôme $(c + x)^\lambda$ est $c + x$, et donc la seule racine réelle de l'équation (11.25) référée à ce

[54] Dans le traitement de son exemple, Newton obtient [cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 404] directement l'égalité (11.36), sans passer par une deuxième application de la division de Mercator au terme $\frac{z^2}{16b-8z}$, en choisissant un ordre convenable dans la considération des termes des polynômes qui interviennent dans l'application de cette division au quotient donné, $\frac{q}{p} = \frac{x^3}{b^2-x^2}$. Après avoir déterminé le terme en z^1 — c'est-à-dire $-\frac{b^2}{2z}$ — il divise entre eux les termes de plus grand degré du reste $z^3 - 3bz^2 + \frac{5}{2}b^2z$ et du dénominateur $2bz - z^2$— ce qui donne le terme $-z$ — et continue de la même manière pour déterminer le terme successif et le reste correspondant.

polynôme est $t = \alpha = -c$, qui annule tous les coefficients $T_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., \lambda)$, il s'ensuit que dans ce cas la méthode de Newton ne fournit la solution du problème qu'à condition de ne pas opérer la substitution $z \to x - \alpha$ avant d'appliquer les règles (11.16) pour passer de l'expression simplifiée du rapport $\frac{q}{p}$ à celle de y. Ceci préfigure une méthode d'intégration par substitution linéaire. Or, bien qu'une année auparavant[55] Newton eût déjà appliqué une méthode par substitution bien plus générale pour rédiger deux tables de quadratures, c'est un fait qu'il n'évoque pas cette possibilité à propos du problème dont il est ici question. Néanmoins, on comprend difficilement quelle difficulté lui aurait pu empêcher d'admettre l'égalités suivante :

$$\Box\left(\frac{a}{(c+x)^{\lambda}}\right) = \Box\left(\frac{a}{z^{\lambda}}\right) = \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{a}{z^{\lambda-1}}\right) = \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{a}{(c+x)^{\lambda-1}}\right) \tag{11.40}$$

Et cela d'autant plus qu'il emploie cette même méthode plus générale quelques lignes plus loin[56]. Il faut donc en conclure que l'égalité (11.40) est implicitement supposée par Newton.

* * *

Malgré les quelques ambiguïtés qu'on a signalées, et surtout l'absence de toute clarification des conditions qui rendent possible d'opérer la réduction voulue du quotient de polynômes qui exprime le rapport $\frac{q}{p}$, la méthode proposée par Newton pour passer de ce quotient à l'expression correspondante de y n'est pas sans préfigurer un traitement formel des fonctions rationnelles. Par ce biais c'est ainsi la problématique de celle qui sera appelée plus tard "algèbre linéaire" qui semble se mettre en place, en suggérant aux mathématiciens futurs que toute fonction rationnelle peut être développée en une série entière convergente : ce sera d'abord de Moivre et ensuite Euler qui saisiront cette suggestion[57].

* * *

Je viens de dire que Newton n'éclaire pas en général les conditions sous lesquelles sa réduction ne peut pas aboutir. Il est néanmoins conscient que cette réduction n'est pas toujours possible. Après en avoir donné l'exemple qu'on vient d'exposer, il observe que quelques fois "le premier terme du dénominateur ne peut pas être éliminé"[58], et il fournit les exemples des polynômes : $a^2 + x^2$; $a^4 + x^4$; et $a^4 + b^2x^2 + x^4$. Il ne pense donc qu'au cas où l'équation $\sum\limits_{i=0}^{m} b_i t^i = 0$ n'a pas de racines réelles et le polynôme $\sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$ n'a donc pas de facteurs réels de premier degré.

Lorsque le rapport $\frac{q}{p}$ est exprimé par un quotient de polynômes dont le dénominateur est donné par un polynôme de cette sorte, il n'est évidemment pas possible de trouver l'expression correspondante de y par le biais de la méthode précédente. Pour pouvoir y parvenir, il faut donc appliquer des artifices particuliers ou, plus généralement, se réclamer de certaines transformations, pour ainsi dire élémentaires, auxquelles on peut réduire les

[55]Cf. la section 7.2, ci-dessus.
[56]Cf. p. 518, ci-dessous.
[57]Cf. entre autres (de Moivre 1730) et Euler (1748).
[58]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 404].

cas plus complexes[59]. Bien qu'il ne multiplie pas les exemples, Newton semble songer à la possibilité de construire ce qu'on décrirait aujourd'hui comme une table de primitives pour des fonctions rationnelles irréductibles ; une table dont la consultation puisse servir pour résoudre le problème dans les cas les plus courants auxquels on ne peut pas appliquer la réduction précédente. Plutôt que les quelques cas qu'il considère, c'est la méthode qu'il semble suivre pour construire cette table que nous intéresse ici.

Il considère d'abord le cas où[60]

$$\frac{q}{p} = \frac{ax^{n-1}}{c + bx^n} \tag{11.41}$$

en se limitant à observer que si on pose

$$bx^n = z \tag{11.42}$$

il s'ensuit que

$$y = \Box\left(\frac{A}{c+z}\right) \tag{11.43}$$

où on aura évidemment posé

$$A = \frac{a}{nb} \tag{11.44}$$

Ce résultat est clairement obtenu par l'application de la méthode par substitution qu'on vient d'évoquer et que Newton avait appliquée une année auparavant pour obtenir deux tables de quadratures. Si on emploie la notation introduite dans la section 7.2, où il était question de cette méthode — en posant, par uniformité avec ce qui précède, $\frac{q}{p} = g(x)$, plutôt que $\frac{q}{p} = f(x)$, et en écrivant "z" en lieu de "w" —, on a en effet (r étant la vitesse du mouvement de génération de z) :

$$\begin{aligned}
z \quad &= \phi(x) = bx^n \\
\psi(x) \quad &= \frac{r}{p} = nbx^{n-1} \\
\varphi(z) \quad &= \frac{g(\phi^{-1}(z))}{\psi(\phi^{-1}(z))} = \frac{a\left(\frac{z}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}}}{c + b\left(\frac{z}{b}\right)} \frac{1}{nb\left(\frac{z}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{\frac{a}{nb}}{c+z}
\end{aligned} \tag{11.45}$$

et donc :

$$\Box\left(\frac{ax^{n-1}}{c+bx^n}\right) = \Box\left(\frac{\frac{a}{nb}}{c+z}\right) \tag{11.46}$$

pourvu que $z = bx^n$.

Le deuxième cas considéré par Newton tient à l'égalité

$$\frac{q}{p} = \frac{a}{c + bx^2} \tag{11.47}$$

[59]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 404-405. Dans ces cas — écrit Newton — "it will bee necessary to have in readinesse some example with such Denominateurs to which all other cases of like denomination may bee by Division reduced".

[60]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 405. Avant de considérer le cas général, Newton aborde les cas particuliers correspondant aux positions $n = 2, 3, 4$.

Bien que celui-ci se limite à écrire l'autre égalité

$$y = \frac{a}{c+bx^2} + \Box\left(2\sqrt{\frac{2z\sqrt{ac}}{b} - \frac{cz^2}{b}}\right) \tag{11.48}$$

soumise à la position

$$z = \sqrt{\frac{a}{c}} - \sqrt{\frac{a}{c+bx^2}} \tag{11.49}$$

il est clair qu'il parvient à ce résultat en appliquant la méthode par substitution appliquée au cas précédent seulement dans un deuxième temps[61]. En effet, si on pose

$$v = \frac{ax^{n-1}}{c+bx^n} \tag{11.50}$$

on tire

$$\frac{s}{p} = \frac{a(n-1)x^{n-2}}{c+bx^n} - \frac{nabx^{2n-2}}{(c+bx^n)^2} \tag{11.51}$$

où s est la vitesse du mouvement de génération de v. De là il s'ensuit que

$$\Box\left(\frac{a(n-1)x^{n-2}}{c+bx^n}\right) = \frac{ax^{n-1}}{c+bx^n} + \Box\left(\frac{nabx^{2n-2}}{(c+bx^n)^2}\right) \tag{11.52}$$

Si $n = 2$, il suffira alors de poser

$$g(x) = \frac{2abx^2}{(c+bx^2)^2} \tag{11.53}$$

et de se réclamer de la position (11.49), pour obtenir, en opérant comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} \Box\,(g(x)) = \Box\left(\frac{2abx^2}{(c+bx^2)^2}\right) \quad &= \Box\left(\frac{g(\phi^{-1}(z))}{\psi(\phi^{-1}(z))}\right) \\ &= \Box\left(2\sqrt{\frac{2z\sqrt{ac}}{b} - \frac{cz^2}{b}}\right) \end{aligned} \tag{11.54}$$

qui, en conjonction avec l'égalité (11.52), donne justement l'égalité (11.48).

L'égalité (11.48) ne fournit pas, en tant que telle, une solution du problème posé, car rien dans ce que Newton a dit jusqu'ici ne nous permet de parvenir à écrire une expression Algébrique en x qui puisse être prise pour l'expression d'un segment engendré par une vitesse ponctuelle telle que le rapport entre cette vitesse et la vitesse ponctuelle p du mouvement de génération de x soit égal à $2\sqrt{\frac{2z\sqrt{ac}}{b} - \frac{cz^2}{b}}$. En termes modernes, cela signifie que Newton n'as pas encore expliqué comment calculer la primitive d'une fonction de la forme $K\sqrt{az+bz^2}$, K, a et b étant des constantes quelconques. Newton considère le cas où le rapport $\frac{q}{p}$ est exprimé par une expression irrationnelle à la suite du cas où ce rapport est

[61]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note 18, 404-405.

exprimé par un quotient de polynômes, cas dont il est ici question. À cette occasion, il traite pourtant des expressions de la forme $K\sqrt{az+bz^2}$ à la même aune que les expression de la forme $\frac{a}{c+x}$ — c'est-à-dire comme des expressions irréductibles du rapport $\frac{q}{p}$ auxquelles ne correspond aucune expression Algébrique de y — et il ne s'explique sur ce point que dans un des scolies qu'il fait suivre à la proposition 8. On reviendra sur la question lorsqu'il sera question de ces scolies[62]. Pour l'instant il ne convient que d'observer que Newton se sert ici implicitement d'une nouvelle règle qu'il faut donc ajouter aux règles (11.16) :

$$\text{si} \quad \frac{q}{p} = K\sqrt{ax+bx^2} \quad \text{alors :} \quad y = \Box\left(K\sqrt{ax+bx^2}\right) \tag{11.55}$$

Le dernier cas que Newton considère est plus problématique que les précédents[63]. Voici ce que Newton écrit[64] (la référence est à la figure 2) :

> Or if $\frac{a}{c+bxx} = \frac{q}{p}$. Make $\sqrt{\frac{a}{c+bxx}} = z =$ CB, $2\sqrt{\frac{a}{b}-\frac{c}{b}z^2} = y =$ BD & $\Box =$ CDV $= y$.

Ce court argument ne semble compréhensible qu'à la condition de supposer une erreur d'écriture de la part de Newton, et de lire par exemple "$t =$ CB" au lieu de "$y =$ BD". Après avoir introduit cette correction, Whiteside propose d'interpréter un tel argument comme une intégration par parties[65]. En effet, de la position

$$z = \sqrt{\frac{a}{c+bx^2}} \tag{11.56}$$

il s'ensuit

$$\int \frac{a}{c+bxx}dx = \int z^2 dx \tag{11.57}$$

et donc, en intégrant par parties :

$$\int \frac{a}{c+bx^2}dx = z^2x - \int 2zxdz \tag{11.58}$$

[62]Cf. la section 11.1.5, ci-dessous.

[63]Avant d'y venir, Newton considère [cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 405] un cas de toute autre nature relevant de la position

$$\frac{q}{p} = \sqrt{\frac{a}{bx} - \frac{c}{b}}$$

d'où, en posant $z = \sqrt{x}$, il passe à l'égalité

$$y = \Box\left(2\sqrt{\frac{a}{b} - \frac{c}{b}z^2}\right)$$

Il est difficile de justifier la présence de cet exemple au cours du traitement du cas où le rapport $\frac{q}{p}$ est exprimé par un quotient de polynômes, autrement que par une simple inadvertance. Cf. de toute manière la note (64), ci-dessous.

[64]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 405. L'intervention de l'expression "$2\sqrt{\frac{a}{b}-\frac{c}{b}z^2}$", au cours de cet court argument, peut expliquer l'inadvertance de Newton qu'on a signalée dans la note (63), ci-dessus.

[65]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note (20), 405. Dans sa reconstruction de l'argument de Newton, Whiteside commet à son tour une triviale erreur de calcul et suggère de ce fait de supposer une deuxième faute d'écriture de la part de Newton, qui ne me semble pas, en revanche, avoir lieu.

Il suffit alors d'observer que de l'égalité (11.56), il suit

$$x = \sqrt{\frac{a - cz^2}{bz^2}} \tag{11.59}$$

et donc

$$2\sqrt{\frac{a}{b} - \frac{c}{b}z^2} = t = 2xz \tag{11.60}$$

pour en conclure que

$$\int \frac{a}{c + bxx}dx = \frac{1}{2}tz - \int tdz \tag{11.61}$$

Si l'ordonnée BD de la courbe VD est référée à l'abscisse $z = \mathsf{CB}$ — le point C étant pris sur la figure 2 à gauche du point B —, et qu'on pose $\mathsf{BD} = t = 2\sqrt{\frac{a}{b} - \frac{c}{b}z^2}$, alors le point V correspondra à l'abscisse $z = \sqrt{\frac{a}{c}}$, et l'aire du trapézoïde VBD délimité par la courbe VD sera donc donnée par l'intégrale définie $\int_{\kappa}^{z} tdz$, où on aura posé $\kappa = \sqrt{\frac{a}{c}}$. Si dans l'égalité (11.61), on prend ainsi la deuxième intégrale comme une intégrale définie entre $\sqrt{\frac{a}{c}}$ et z, il s'ensuit que $y = \int \frac{a}{c+bxx}dx$ est égal à la différence entre l'aire du triangle CBD, c'est-à-dire $\frac{1}{2}tz$, et l'aire du trapézoïde VBD, c'est-à-dire qu'il est égal à l'aire du triangle curviligne CVD, comme le veut Newton.

Si cette reconstruction rend raison du résultat énoncé par Newton, elle ne le fait qu'*a posteriori*. Pour pouvoir supposer que Newton ait raisonné ainsi, il faut supposer en effet qu'il disposât de la règle d'intégration par parties. Or, aucune évidence ne semble justifier cette supposition. Si on en reste à sa formulation moderne, cette règle se réclame d'ailleurs de l'usage des différentielles et de leur rôle dans le formalisme du calcul intégral. En tant que telle, elle ne pouvait donc pas être énoncée par Newton. Pour comprendre la manière dont Newton aurait pu raisonner, il faut ainsi abandonner le formalisme moderne du calcul intégral, et chercher ailleurs une justification de sa conclusion.

Cette justification me semble pouvoir venir de la première des trois remarques que Newton ajouta dans un deuxième temps au début de son traité[66]. Considérons en effet une équation de la forme

$$v - f_1(x)f_2(x) = 0 \tag{11.62}$$

(où $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont deux expressions Algébriques quelconques où apparaît la seule variable x), et appliquons la méthode exposée lors de cette remarque. Il suffit de poser $f_i(x) = z_i$ $(i = 1, 2)$, pour tirer la nouvelle équation

$$s - z_2r_1 - z_1r_2 = 0 \tag{11.63}$$

(où s est la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de v), d'où, en supposant que $r_i = \chi_i(x)p$ (c'est-à dire que $\frac{r_i}{p} = \chi_i(x)$), il s'ensuit :

$$\frac{s}{p} = f_2(x)\chi_1(x) + f_1(x)\chi_2(x)$$

De là, en passant aux primitives,on obtient

$$\Box\left(\frac{s}{p}\right) = v = \Box\left(f_2(x)\chi_1(x)\right) + \Box\left(f_1(x)\chi_2(x)\right) \tag{11.64}$$

[66]Cf. ci-dessus, pp. 504-506.

et donc, d'après l'équation (11.62) :

$$\square\left(f_1(x)\chi_2(x)\right) = f_1(x)f_2(x) - \square\left(f_2(x)\chi_1(x)\right) \tag{11.65}$$

Comme $\chi_2(x)$ n'est rien qu'une expression Algébriques en x, cela nous suggère que lorsque le rapport $\frac{q}{p}$ est donné par le produit de deux expressions en x, $f(x)$ et $\chi(x)$, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{q}{p} = [f(x)]\,[\chi(x)] \tag{11.66}$$

alors on peut poser

$$y = \square\left([f(x)]\,[\chi(x)]\right) = [f(x)]\,[\square\left(\chi(x)\right)] - \square\left([\square\left(\chi(x)\right)]\,\frac{r}{p}\right) \tag{11.67}$$

r étant la vitesse ponctuelle du mouvement qui engendre $f(x) = z$.

Bien que formellement analogue à la règle d'intégration pour parties, cette règle dérive d'une conception de la primitive bien différente de celle qui intervient dans le calcul intégral et se réclame d'outils et de pratiques mathématiques parfaitement compatibles avec les conceptions de Newton.

Cette règle étant donnée, supposons que

$$\frac{q}{p} = g(x) = \frac{a}{c+bx^2} \tag{11.68}$$

En accord avec la position (11.56), et selon la méthode par substitutions employée pour traiter les exemples précédentes, on aura :

$$\begin{aligned} z = \phi(x) \quad &= \sqrt{\frac{a}{c+bx^2}} \\ \psi(x) = \frac{r}{p} \quad &= -\frac{zbx}{c+bx^2} \\ \varphi(x) = \frac{g(\phi^{-1}(z))}{\psi(\phi^{-1}(z))} \quad &= z^2\left(-\frac{a\sqrt{b}}{z^2b\sqrt{a-cz^2}}\right) \end{aligned} \tag{11.69}$$

En posant

$$f(z) = z^2 \quad \text{et} \quad \chi(z) = -\frac{a\sqrt{b}}{z^2b\sqrt{a-cz^2}} = \frac{1}{\psi(x)} = \frac{p}{r} \tag{11.70}$$

on aura alors, d'après cette règle :

$$\begin{aligned} y = \square\left(f(z)\chi(z)\right) \quad &= z^2x - \square\left(2xz\right) \\ &= z\sqrt{\frac{a}{b} - \frac{c}{b}z^2} - \square\left(2\sqrt{\frac{a}{b} - \frac{c}{b}z^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}zt - \square\left(t\right) \end{aligned} \tag{11.71}$$

Il suffit alors d'interpréter $\square\left(t\right)$ comme l'aire du trapézoïde VBD pour en conclure, comme le veut Newton, que y est égal à l'aire du triangle curviligne CVD.

Or, il est facile de voir qu'une telle application de cette règle est favorisée par la substitution qui conduit de $y = \Box(g(x))$ à $\Box\left(\left[g(\phi^{-1}(z))\right]\frac{1}{\psi(\phi^{-1}(z))}\right)$. En effet l'expression $\frac{1}{\psi(\phi^{-1}(z))}$ qui intervient dans le produit $f(z)\chi(z)$ auquel on applique cette règle se présente d'emblée, à la suite de cette substitution, comme le rapport $\frac{p}{r}$ des vitesses des mouvements qui engendrent respectivement x et z, de sorte qu'il est immédiat de conclure que $\Box(\chi(z)) = x$. Ainsi, plutôt que de fonctionner comme une règle formellement analogue à la règle d'intégration par parties, cette règle fonctionne ici comme une règle propre à rendre possible la décomposition de $\Box\left(\frac{q}{p}\right) = \Box(\varphi(z))$.

Quant à l'intervention de la courbe VD et de son aire dans un contexte qui apparaît par ailleurs comme purement algorithmique, il semble possible de la justifier en tant qu'artifice propre à fournir une représentation, pour ainsi dire plus palpable, du terme $\Box\left(2\sqrt{\frac{a}{b} - \frac{c}{b}z^2}\right)$ qui intervient dans l'expression de y obtenue en appliquant cette méthode. Comme tous les termes de la forme $\Box\left(K\sqrt{a - bz^2}\right)$, ce terme est en effet Algébriquement irréductible, ainsi que le sont les termes de formes $\Box\left(\frac{a}{c+x}\right)$ et $\Box\left(K\sqrt{az - bz^2}\right)$ qui interviennent dans les exemples considérés ci-dessus. Le recours à la courbe VD et à son aire n'est donc qu'une manière détournée d'énoncer une quatrième règle qu'il faut ajouter aux règles (11.16) et (11.55), et dont Newton fera d'ailleurs un large usage par la suite :

$$\text{si} \quad \frac{q}{p}K\sqrt{a + bx^2} \quad \text{alors :} \quad y = \Box\left(K\sqrt{a + bx^2}\right) \tag{11.72}$$

Comment trouver l'expression de y lorsque le rapport $\frac{q}{p}$ est exprimé par une expression irrationnelle

Le troisième des trois cas en lesquels Newton distingue le problème posé par la proposition 8 concerne des expressions du rapport $\frac{q}{p}$ où x intervient sous des racines carrées[67]. Plutôt que de présenter en général une méthode apte à résoudre le problème dans ce cas, Newton se limite à rédiger une table où plusieurs expressions irrationnelles de ce rapport sont associées aux expressions correspondantes de y, en observant que les plus simples parmi les cas de ce type peuvent être réduits aux cas compris dans une telle table.

Mise à part l'indication de certaines substitutions, Newton ne donne aucun renseignement sur la méthode utilisée pour obtenir les résultats intervenant dans cette table. Whiteside justifie un à un ces résultats, en se réclamant, dans la plupart des cas, de procédures récursives fondées sur des intégrations par parties[68].

* * *

Pour donner un exemple de ces procédures, considérons les cinq premières entrées de la table de Newton, relevant des égalités

$$\frac{q}{p} = \frac{cx^{kn}}{x}\sqrt{a + bx^n} \tag{11.73}$$

$(k = 1, 2, ..., 5)$.

[67]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 405-410.
[68]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, notes 21-28 et 30, 406-410.

Si on pose, pour tout h naturel

$$\begin{aligned}\int cx^{hn-1}(a+bx^n)^{\frac{1}{2}}dx &= F(h)\\ cx^{hn}(a+bx^n)^{\frac{3}{2}} &= f(h)\\ \int cx^{hn-1}(a+bx^n)^{\frac{3}{2}}dx &= \int f(h)x^{-1}dx = G(h)\end{aligned} \tag{11.74}$$

et

$$\begin{aligned} v = cx^{hn} \qquad &; \qquad dv = chnx^{hn-1}dx\\ u = (a+bx^n)^{\frac{3}{2}} \qquad &; \qquad du = \frac{3}{2}bnx^{n-1}(a+bx^n)^{\frac{1}{2}}dx\end{aligned} \tag{11.75}$$

la règle d'intégration par parties donne :

$$G(h) = \frac{1}{hn}\left[f(h) - \frac{3bn}{2}F(h+1)\right] \tag{11.76}$$

ou bien

$$F(h+1) = \frac{2}{3bn}\left[f(h) - hnG(h)\right] \tag{11.77}$$

Il est de surcroît facile de vérifier que

$$G(h) = \int (a+bx^n)\left[\frac{d}{dx}F(h)\right]dx \tag{11.78}$$

Une nouvelle intégration par parties donne ainsi :

$$G(h) = (a+bx^n)F(h) - bn\int x^{n-1}F(h)dx \tag{11.79}$$

Les égalités (11.77) et (11.79) fournissent deux formules de récurrence. Il suffit ensuite de poser $h = 0$ dans la première de ces égalités pour obtenir

$$F(1) = \frac{2}{3bn}f(0) = \frac{2c}{3bn}(a+bx^n)^{\frac{3}{2}} = \frac{2c}{3bn}(a+bx^n)\sqrt{a+bx^n} \tag{11.80}$$

qui correspond à la première entrée de la table de Newton, et fournit une première base de la récurrence. En comparant ensuite cette dernière égalité à l'égalité (11.79), on obtient :

$$\begin{aligned} G(1) &= \frac{2c}{3bn}(a+bx^n)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\int cx^{n-1}(a+bx^n)^{\frac{3}{2}}dx\\ &= \frac{2c}{3bn}(a+bx^n)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}G(1)\\ &= \frac{2c}{5bn}(a+bx^n)^2\sqrt{a+bx^n}\end{aligned} \tag{11.81}$$

qui fournit la deuxième base.

Le calcul récursif des intégrales de $F(k)$ $(k = 2, 3, ...)$ est désormais facile. Des égalités (11.77) et (11.79) on tire d'abord :

$$\begin{aligned} G(h) &= \begin{cases} (a+bx^n)F(h) - \dfrac{2}{3}\displaystyle\int x^{n-1} f(h-1)dx \\ \qquad + \dfrac{2(h-1)n}{3} \displaystyle\int x^{n-1} G(h-1)dx \end{cases} \\ &= (a+bx^n)F(h) - \tfrac{2}{3}G(h) + \frac{2(h-1)n}{3}\int x^{n-1}G(h-1)dx \\ &= \tfrac{3}{5}(a+bx^n)F(h) + \frac{2(h-1)n}{5}\int x^{n-1}G(h-1)dx \end{aligned} \tag{11.82}$$

Et comme

$$\int x^{n-1}G(h-1)dx = \int x^{n-1}\left(\int cx^{(h-1)n-1}(a+bx^n)^{\frac{3}{2}}dx\right)dx \tag{11.83}$$

les positions

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{n}x^n \\ dv &= x^{n-1}dx \\ u &= \int cx^{(h-1)n-1}(a+bx^n)^{\frac{3}{2}}dx \\ du &= cx^{(h-1)n-1}(a+bx^n)^{\frac{3}{2}}dx \end{aligned} \tag{11.84}$$

donnent

$$\begin{aligned} \int x^{n-1}G(h-1)dx &= \begin{cases} \dfrac{1}{n}x^n \displaystyle\int cx^{(h-1)n-1}(a+bx^n)^{\frac{3}{2}}dx \\ \qquad -\dfrac{1}{n}\displaystyle\int cx^{hn-1}(a+bx^n)^{\frac{3}{2}}dx \end{cases} \\ &= \frac{1}{n}x^nG(h-1) - \frac{1}{n}G(h) \end{aligned} \tag{11.85}$$

En substituant dans l'égalité (11.82), on aura ainsi :

$$\begin{aligned} G(h) &= \frac{3}{5}(a+bx^n)F(h) + \frac{2(h-1)}{5}\left(x^nG(h-1) - G(h)\right) \\ &= \frac{3}{3+2h}(a+bx^n)F(h) + \frac{2(h-1)}{3+2h}x^nG(h-1) \end{aligned} \tag{11.86}$$

Mais, de l'égalité (11.76), il s'ensuit

$$\begin{aligned} G(h-1) &= \frac{1}{h-1}\left[\frac{1}{n}f(h-1) - \frac{3b}{2}F(h)\right] \\ &= \frac{1}{h-1}\left[\frac{1}{nx^n}f(h) - \frac{3b}{2}F(h)\right] \end{aligned} \tag{11.87}$$

et donc, en substituant dans l'égalité (11.86) :

$$G(h) = \begin{cases} \dfrac{3}{3+2h}(a+bx^n)F(h)+ \\ \dfrac{2(h-1)}{3+2h}x^n\left(\dfrac{1}{h-1}\left[\dfrac{1}{nx^n}f(h)-\dfrac{3b}{2}F(h)\right]\right) \end{cases} \\ = \frac{3a}{3+2h}F(h)+\frac{2}{3+2h}\frac{1}{n}f(h) \tag{11.88}$$

En comparant cette égalité avec l'égalité (11.77), on a alors :

$$F(h+1) = \frac{2}{3bn}\left[f(h)-hn\left(\frac{3a}{3+2h}F(h)+\frac{2}{3+2h}\frac{1}{n}f(h)\right)\right] \\ = \frac{2f(h)-2nhaF(h)}{(3+2h)\,bn} \tag{11.89}$$

qui est la formule récursive par laquelle Whiteside justifie les cinq premières entrées de la table de Newton[69].

S'il est certain que par le truchement de cette égalité, on obtient les résultats dont relèvent ces cinq entrées, il est aussi facile de comprendre que l'argument qui conduit à prouver cette égalité demande non seulement un usage massif de la règle d'intégration par parties, mais aussi un jeu de comparaison entre différentes valeurs des trois fonctions F, f et G — dont le domaine est $\mathbb{N}$ et dont le codomaine est un espace d'expressions en x (comprenant des expressions intégrales) —, qui ne semble guère à la portée de Newton.

* * *

Il ne me semble donc pas vraisemblable que ce dernier ait trouvé les résultats qu'il énonce dans sa table en se fondant sur des formules récursives analogues à l'égalité (11.89), démontrées par un argument semblable au précédent. Et ceci d'autant plus qu'une autre méthode, bien plus conforme à la pratique mathématique et aux connaissances de Newton, permet de parvenir aux mêmes résultats de manière plus simple.

Supposons que le rapport $\frac{q}{p}$ est exprimé par une expression de la forme $R\sqrt{S}$ ou de la forme $\frac{R}{\sqrt{S}}$ — où S est un polynôme en x et R un polynôme en x ou en x^{-1} — et que

$$y = P\sqrt{S} \tag{11.90}$$

P étant un polynôme indéterminé en x ou en x^{-1}. Si on pose

$$P^2S = z \tag{11.91}$$

(ce qui fait que z est à son tour un polynôme en x ou en x^{-1}), on tire :

$$2yq = r = Qp \tag{11.92}$$

r étant la vitesse du mouvement de génération de z et Q étant une expression Algébrique en x, telle que

$$\frac{r}{p} = Q \tag{11.93}$$

[69]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note 21, 406.

En ayant par supposition

$$\frac{q}{p} = R\sqrt{S} \qquad \text{ou} \qquad \frac{q}{p} = \frac{R}{\sqrt{S}} \tag{11.94}$$

de là il s'ensuit

$$2RS = \frac{Q}{P} \qquad \text{ou} \qquad 2R = \frac{Q}{P} \tag{11.95}$$

Mais de l'égalité (11.91), il s'ensuit

$$Q = \frac{r}{p} = 2PS\tilde{P} + P^2\tilde{S} \tag{11.96}$$

où $\tilde{P}$ est un polynôme en x ou en x^{-1} et $\tilde{S}$ un polynôme en x, tels que des positions $P = v$ et $S = v$, il s'ensuit respectivement $\frac{s}{p} = \tilde{P}$ et $\frac{s}{p} = \tilde{S}$ (s étant la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de v). En comparant cette dernière égalité avec les égalités (11.95), on aura ainsi

$$2\tilde{P}S + P\tilde{S} = 2RS \qquad \text{ou} \qquad 2\tilde{P}S + P\tilde{S} = 2R \tag{11.97}$$

Comme les degrés de $\tilde{P}$ et de $\tilde{S}$ sont respectivement égaux aux degrés de P et de S moins 1, de là il s'ensuit que P est un polynôme dont le degré est égal au degré de R plus 1 (et dont $2S$ est un facteur), ou un polynôme dont le degré est égal au degré de R moins le degré de S plus 1 . Les polynômes R et S étant donnés, le degré de P est donc connu. Si les expressions $R\sqrt{S}$ et $\frac{R}{\sqrt{S}}$ sont telles qu'il existe un polynôme P en x ou en x^{-1} tel que de $\frac{q}{p} = R\sqrt{S}$ ou $\frac{q}{p} = \frac{R}{\sqrt{S}}$ il s'ensuit $y = P\sqrt{S}$, il suffit d'appliquer aux égalités (11.97) la méthode des coefficients indéterminés pour déterminer P et résoudre donc le problème.

Bien qu'en principe cette méthode puisse être appliquée quel que soit le degré des polynômes concernés, il est clair que les calculs qu'elle demande sont de plus en plus pénibles, à mesure que ce degré augmente. Si on l'applique à l'exemple qu'on vient de considérer relevant de l'égalité (11.73), elle permet ainsi de déterminer — d'abord assez aisément et ensuite plus péniblement — l'expression de y pour $k = 1, 2, \ldots, 5$, mais ne permet pas de déterminer cette expression si la valeur de k n'est pas déterminée.

Pour l'illustrer, considérons ce même exemple. En comparant l'égalité (11.73) avec la première des égalités (11.94), on tire

$$\begin{aligned} R &= cx^{kn-1} \\ S &= a + bx^n \end{aligned} \tag{11.98}$$

de sorte que la première des égalités (11.97) fournit l'équation

$$2\tilde{P}\left(a + bx^n\right) + nbPx^{n-1} = 2cx^{kn-1}\left(a + bx^n\right) \tag{11.99}$$

Si on suppose d'emblée, pour simplifier les calculs, que P est un polynôme en x^n, on en tire

$$2acx^{n(k-1)} + 2bcx^{kn} = 2a\sum_{i=1}^{k} inA_i x^{n(i-1)} + 2b\sum_{i=1}^{k} inA_i x^{in} + nb\sum_{i=0}^{k} A_i x^{in} \tag{11.100}$$

où les A_i ($i = 1, 2, \ldots n$) sont des coefficients indéterminés. La méthode des coefficients indéterminés donne ainsi sur le champ les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2c}{(2k+1)n} \\ A_{k-1} &= \frac{2a(c-knA_k)}{(2k-1)nb} = \frac{2ac}{(2k-1)(2k+1)nb} \end{aligned} \tag{11.101}$$

et

$$\left\{ A_{h-1} = \frac{2ahA_h}{b(2h-1)} \right\}_{h=k-1}^{h=1} \tag{11.102}$$

d'où en posant respectivement $k = 1, 2, ..., 5$, il est facile de tirer les résultats dont relèvent les cinq premières lignes de la table de Newton.

Il me semble naturel de supposer que Newton est parvenu à la détermination d'un premier groupe de résultats, parmi ceux contenus dans cette table, par le truchement de cette méthode. Ces résultats sont présentés dans la table contenue dans la première section de l'annexe qui clôt le présent chapitre[70], où j'ai aussi indiqué les procédures par lesquelles ils peuvent être obtenus.

Les autres résultats contenus dans cette table concernent, eux-aussi, des égalités de formes (11.94). Ces égalités sont néanmoins toutes telles qu'il n'existe aucun polynôme P en x ou en x^{-1}, tel que $y = P\sqrt{S}$. Autrement dit, les expressions du rapport $\frac{q}{p}$ dont il est question dans ces résultats ne possèdent pas de primitives Algébriques. On peut distinguer ces résultats en deux groupes, selon la méthode par laquelle Newton les obtient.

D'abord il y a un groupe de résultats obtenus par substitution. Ils sont présentés dans la table contenue dans la deuxième section de l'annexe qui clôt le présent chapitre[71]. Les procédures par lesquelles ils sont obtenus — qui sont indiquées dans cette même table — ne demandent aucun commentaire, car elles relèvent d'applications assez simples de la méthode de substitution qu'on a présentée dans la section 7.2, à la seule exception du résultat présenté dans la dernière ligne de cette table, auquel on parvient plus convenablement grâce à une double substitution[72]. En appliquant cette méthode, et une substitution convenable $x \to \phi^{-1}(z)$, Newton parvient à réduire l'expression $g(x)$ donnée, exprimant le rapport $\frac{q}{p}$, en une nouvelle expression $\varphi(z)$, possédant la même primitive que $g(x)$ pour la substitution inverse $z \to \phi(x)$. L'expression $\varphi(z)$ est toujours de la forme $K\sqrt{az - bz^2}$ ou $K\sqrt{a - bz^2}$, de sorte que le résultat final est obtenu par application des règles (11.55) et (11.72). L'ensemble de ces résultats fournit ainsi une table de primitives analogue à la table de courbes à aire égale obtenue par Newton en l'automne 1665[73].

Un troisième et dernier groupe contient enfin des résultats obtenus par une procédure plus complexe, comportant deux moments : d'abord une réduction, ensuite une substitution. Dans tous les cas dont il est question dans ce groupe, le polynôme R, intervenant dans les expressions (de la forme $R\sqrt{s}$ ou $\frac{R}{\sqrt{S}}$) qui expriment le rapport $\frac{q}{p}$, est tel qu'il est possible de déterminer un monôme A qui est à son tour tel que le polynôme $\frac{1}{K}[R \pm A]$ (où K est une constante convenable) est égal au polynôme R intervenant dans une des expressions du

[70]Cf. ci-dessous, pp. 594 et suiv.
[71]Cf. ci-dessous, pp. 596 et suiv.
[72]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note (31), 410.
[73]Cf. l'annexe au chapitre 7.

rapport $\frac{q}{p}$ dont relèvent les résultats du premier groupe. Il suffit alors d'observer que les égalités (11.94) sont identiques aux égalités

$$\frac{q}{p} = [R \pm A]\sqrt{S} \mp A\sqrt{S} \qquad ; \qquad \frac{q}{p} = \frac{[R \pm A]}{\sqrt{S}} \mp \frac{A}{\sqrt{S}} \tag{11.103}$$

et de consulter les résultats du premier groupe pour obtenir les égalités

$$\begin{aligned} y &= \square\left([R \pm A]\sqrt{S}\right) \mp \square\left(A\sqrt{S}\right) \\ &= KP\sqrt{S} \mp \square\left(A\sqrt{S}\right) \\ y &= \square\left(\frac{[R \pm A]}{\sqrt{S}}\right) \mp \square\left(\frac{A}{\sqrt{S}}\right) \\ &= KP\sqrt{S} \mp \square\left(\frac{A}{\sqrt{S}}\right) \end{aligned} \tag{11.104}$$

Comme les expressions du rapport $\frac{q}{p}$ concernées par ce troisième groupe de résultats ne possèdent pas de primitives Algébriques, cela sera aussi le cas des expressions $A\sqrt{S}$ et $\dfrac{A}{\sqrt{S}}$. En employant une substitution $x \to \phi^{-1}(z)$, Newton réduit alors ces expressions à des expressions de la forme $\varphi(z) = K\sqrt{az - bz^2}$ ou $\varphi(z) = K\sqrt{a - bz^2}$, et applique ensuite les règles (11.55) et (11.72), pour obtenir des primitives de la forme

$$y = KP\sqrt{S} \mp \square\left(\varphi(z)\right) \tag{11.105}$$

Les résultats de ce troisième groupe sont présentés dans la table contenue dans la troisième section de l'annexe qui clôt le présent chapitre[74], où j'ai aussi indiqué, encore une fois, la procédure par laquelle ils peuvent être obtenus.

11.1.4 Formalisme des vitesses et origines de l'*analyse*

Si mes reconstructions des procédures par lesquelles Newton parvient aux résultats qu'il présente dans la table de primitives qui clôt la proposition 8 sont correctes, alors il faut en conclure que celui-ci ne fit aucun usage de procédures récursives fondées sur la règle d'intégration par parties. Il employa plutôt deux méthodes qui étaient pour lui parfaitement habituelles : la méthode des coefficients indéterminés, et la méthode de quadrature par substitution (pensée ici comme une méthode pour la recherche de primitives) qu'il avait élaborée dès l'automne 1665. Néanmoins, l'application de ces méthodes n'est rendue possible que grâce à un usage généralisé de la procédure de substitution exposée dans la première des trois remarques qu'il ajouta dans un deuxième temps au début de son traité[75]. En particulier Newton semble implicitement appliquer cette procédure à des équations entières en introduisant de nouvelles variables propres à exprimer des polynômes intervenant dans ces équations.

[74]Cf. ci-dessous, pp. 597 et suiv.
[75]Cf. ci-dessus, pp. 504-506.

Ces polynômes sont ainsi traités comme des variables auxiliaires exprimant certains segments engendrés par un mouvement doté d'une certaine vitesse ponctuelle, vitesse qui résulte ainsi être associée à ces mêmes variables. La relation entre ces dernières et les vitesses ponctuelles correspondantes semble de ce fait être pensée désormais comme une relation purement formelle. La métaphore mécanique faisant intervenir des segments, avec leurs mouvements de génération et les vitesses ponctuelles de ces mouvements, ne semble que fournir une terminologie classique[76] pour indiquer cette relation qui n'est *de facto* qu'une relation entre deux variables. Ce sera justement pour exprimer directement cette relation en termes généraux, sans faire intervenir cette terminologie métaphorique et archaïque, que Newton introduira dans le *De methodis* les termes de "fluente" et de "fluxion", en se donnant le droit de parler de le fluxion d'une fluente (plutôt que de la vitesse ponctuelle du mouvement de génération d'un segment exprimé par une certaine variable).

Bien que cette terminologie soit encore absente du *Traité d'octobre 1666*, les objets mathématiques qu'elle servira plus tard à dénoter semblent donc faire leur première — encore que fort discrète — apparition dans ce traité, en particulier dans la proposition 8. Le problème posé par cette proposition ne semble en effet être confiné au domaine restreint de l'Algèbre des segments que par la faute d'une présentation qui se révèle inadéquate à la substance mathématique de ce problème pour la manière dans laquelle ceci est effectivement abordé par Newton. La limitation à ce domaine, et en particulier à l'étude des relations entre expressions Algébriques relevant de l'algorithme des vitesses, n'apparaît en fait nécessaire que pour donner un sens à la métaphore mécanique dont relève la notion de vitesse ponctuelle. Mais elle semble disparaître de la pratique mathématique de Newton qui ne travaille *de facto* qu'avec des variables auxquelles sont associées des vitesses, qui se présentent à leur tour comme d'autres variables, liées aux premières par un algorithme connu.

Dans ce contexte, ce qui confère à ces variables le statut d'objets mathématiques n'est pas tant leur définition en tant qu'expression de certains segments ou de vitesses ponctuelles des mouvements de génération de ces segments, que leurs relations mutuelles fixées par un système d'équations répondant à cet algorithme. L'objet d'étude est donc constitué d'abord par ces mêmes systèmes d'équations, qu'on devrait donc à bon droit qualifier d'*algébriques*, s'il n'était pour la présence éventuelle de termes des formes $\Box\left(\frac{a}{b+cz}\right)$, $\Box\left(K\sqrt{ax+bx^2}\right)$ ou $\Box\left(K\sqrt{a+bx^2}\right)$.

Cette exception n'est pourtant pas que le symptôme d'une visée plus large. Les équations dont il est question ne semblent intéresser Newton que parce qu'elles expriment des relations entre des grandeurs. Et si ces grandeurs sont ouvertement définies comme des segments, ou comme les vitesses des mouvements de génération de ces segments (tout en se donnant le droit de multiplier entre elles des variables exprimant respectivement des segments et des vitesses), elles sont traitées comme des grandeurs qui ne sont déterminées que relativement

[76]De même que dans les notes précédentes, dans le *Traité d'octobre 1666*, la terminologie de Newton est fort instable, surtout lors des applications des propositions 7 et 8. L'expression "vitesse ponctuelle du mouvement de génération de ..." me semble décrire les grandeurs p, q, r, etc., de la manière la plus précise, conformément aux conceptions de Newton. Ce dernier qualifie pourtant ces grandeurs de maintes manières différentes, en parlant, par exemple : de vitesse d'un corps, d'un point, ou d'un segment ; de mouvement d'un point, d'un segment ou d'une variable ; de mouvement ou de vitesse par lequel un segment, une aire, ou une variable augmentent ou diminuent ; de mouvement qui décrit un segment ou une aire ; d'augmentation ou de diminution d'un segment ; etc.

les unes aux autres par les systèmes d'équations dans lesquelles elles interviennent. Ce sont ainsi des véritables objets *analytiques* qui apparaissent pour la première fois sur la scène mathématique.

11.1.5 Quatre scolies pour la proposition 8

La deuxième des règles (11.16), ainsi que les règles (11.55) et (11.72) semblent servir pour indiquer, dans le nouveau contexte purement formel dans lequel Newton semble désormais se placer, l'inexistence d'une expression Algébrique propre à exprimer un segment y tel que le rapport $\frac{q}{p}$ correspondant à ce segment soit exprimé par une expression de formes $\frac{a}{c+x}$, $K\sqrt{ax+bx^2}$, ou $K\sqrt{a+bx^2}$. Newton avait déjà implicitement dénoncé la même limite des pouvoirs expressifs de l'Algèbre une année auparavant, en se référant au problème des aires[77]. Il avait alors construit une table où il avait associé à des courbes dont l'ordonnée est exprimée par des expressions Algébriques de ces formes, d'autre courbes d'aire égale. En discutant de cette table j'ai observé qu'elle marque, de notre point de vue, l'origine de la théorie des intégrales elliptiques. Dans le *Traité d'octobre 1666* Newton remarque explicitement que ces expressions ne sont que celles des ordonnées de certaines coniques qu'on ne peut pas pas carrer Algébriquement. Voici ce qu'il écrit, lors d'un premier scolie à la proposition 8[78] :

> $$\text{Note that} \quad \begin{array}{lrcr} 1. & \frac{a}{b+cz}: & & \Box\frac{a}{b+cz}::\\ 2. & \sqrt{az+bzz}: & \text{is to} & \Box\sqrt{az+bzz}::\\ 3. & \sqrt{a+bzz}: & & \Box\sqrt{a+bzz}:: \end{array} \quad \text{as the ordinately}$$
> applyed line PM in some of the Conick sections : is to its corresponding superfice APM, the axis AP being in like manner related to z[79]. But all those areas (& consequently $\Box\frac{a}{b+cz}$, $\Box\sqrt{az+bzz}$, $\Box\sqrt{a+bzz}$) may bee Mechanichally found either by a Table of logarithmes or signes & Tangentes. And I have beene therefore hitherto content to suppose them knowne, as the basis of most of the precedent propositions.

La référence à des coniques, à leur aires, et à des approximations de ces dernières, rendues possibles par l'usage des tables logarithmiques et trigonométriques, est ici clairement un moyen pour éliminer le problème consistant à donner un sens aux écritures "$\Box\frac{a}{b+cz}$", "$\Box\sqrt{az+bz^2}$" et "$\Box\sqrt{a+bz^2}$". Newton ne pense nullement à trouver ces approximations, qui d'ailleurs — comme je l'ai observé ci-dessus[80] — n'ont de sens que lorsque la primitive est interprétée comme l'expression d'un certain segment. Il veut seulement justifier (par un artifice qui n'est *de facto* que rhétorique) son droit à considérer ces écritures comme des écritures élémentaires qui peuvent entrer comme telles dans la solution du problème posé par la proposition 8. Ces écritures semblent ainsi référer désormais à des objets autres que des quantités géométriques. Si Newton n'a pas encore explicité une notion, telle que celle de fonction, propre à caractériser ces objets en général, il semble néanmoins ne viser que

[77] Cf. la section 7.2.1, ci-dessus.

[78] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 410.

[79] La figure dessinée par Newton n'a évidemment aucun intérêt, car elle ne fait que représenter une courbe quelconque d'abscisse AM et d'ordonnée PM (par uniformité j'ai changé ici les lettres de Newton qui écrit "a", "b", "c" où j'écris "A", "P", "M").

[80] Cf. p. 11.1.3.

l'étude de certaines classes d'expressions, parmi lesquelles il fait désormais intervenir des expressions non Algébriques.

Ceci est rendu encore plus clair par un dernier scolie[81], que Newton insère à la suite de deux autres, et où il se limite à rappeler la linéarité de $\square$[82] et à indiquer la possibilité de décomposer une expression donnée à l'aide de substitutions convenables[83]. Lors de ce quatrième scolie il observe, en fait, que la proposition 8 peut aussi "être résolue mécaniquement" par l'usage des séries entières. L'adjectif "mécanique", d'évidente dérivation cartésienne, est donc employé ici pour indiquer une procédure qui ne permet une approximation qu'à la suite d'une double transformation formelle conduisant à exprimer les primitives dont il est question par des expressions Algébriques infinitaires. Et ce sont clairement ces expressions Algébriques infinitaires qui intéressent Newton, bien plus que les approximations numériques éventuelles qu'il est possible d'en tirer.

La procédure que Newton propose pour parvenir à cette solution "mécanique" du problème posé par la proposition 8 ne comporte, quant à elle, aucune difficulté, lorsque il ne s'agit que de trouver la primitive d'une expression de la forme $\frac{a}{b+cx}$, $\sqrt{ax+bx^2}$ ou $\sqrt{a+bx^2}$, comme dans tous les exemples précédents, où ce problème ne possède pas de solution Algébrique. Il ne s'agit en fait que de développer en série entière cette expression, par les méthodes de division ou d'extraction de racine de Mercator, et d'appliquer ensuite, à la série ainsi obtenue, la première des règles (11.16).

Les deux premiers exemples présentés par Newton relèvent justement de ce cas fort simple, car ils portent respectivement sur les égalités

$$\frac{q}{p} = \frac{a}{b+cx} \qquad \text{et} \qquad \frac{q}{p} = \sqrt{a^2 - x^2} \tag{11.106}$$

dont il est aisé d'obtenir respectivement :

$$\begin{aligned} y &= \square\left(\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2}x + \frac{ac^2}{b^3}x^2 - \frac{ac^3}{b^4}x^3 + \ldots\right) \\ &= \frac{a}{b}x - \frac{ac}{b^2}x^2 + \frac{ac^2}{3b^3}x^3 - \frac{ac^3}{4b^4}x^4 + \ldots \end{aligned} \tag{11.107}$$

et

$$\begin{aligned} y &= \square\left(a - \frac{1}{2a}x^2 - \frac{1}{8a^3}x^4 - \frac{1}{16a^5}x^6 - \frac{5}{128a^7}x^5 - \ldots\right) \\ &= ax - \frac{1}{6a}x^3 - \frac{1}{40a^3}x^5 - \frac{1}{112a^5}x^7 - \frac{5}{1152a^7}x^7 - \ldots \end{aligned} \tag{11.108}$$

[81]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 413.

[82]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 410-411 : "Note also that the Valor of $\frac{q}{p}$ consists of severall parts each part must be considered severally, as if $\frac{ax^3-bbxx}{c^4} = \frac{q}{p}$. Then is $\square\frac{ax^3}{c^4} = \frac{ax^4}{4c^4}$. & $\square\frac{bbxx}{c^4} = \frac{bbx^3}{3c^4}$. Therefore $\square\frac{ax^3-bbxx}{c^4} = \frac{ax^4}{4c^4} - \frac{bbx^3}{3c^4} = y$". L'usage du symbole "$\square$" comme l'expression d'un opérateur agissant sur des expressions Algébriques est ici manifeste. Il ne semble donc pas forcé de parler de la linéarité de $\square$.

[83]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 411 : "Note also that if the denominator of the valor of $\frac{q}{p}$ consists of both rationall & surde quantitys or of two or more surde quantitys First take those surde quantitys out of the denominator & then seeke y by the precedent theoremes". Le but de Newton semble donc de souligner le rôle de la procédure de substitution exposée dans la première des trois remarques ajoutées au début de son traité dans l'obtention des résultats précédents. Et c'est justement à la suite de ce scolie que Whiteside a inséré ces trois remarques [cf. la note 24, ci-dessus].

Newton pense pourtant qu'une méthode similaire peut aussi être appliquée pour trouver "mécaniquement" les primitives des racines d'une équation Algébrique. Il s'agit pour cela d'appliquer à l'équation donnée la méthode de solution par série exposée par Viète dans le *De numerosa potestatum*[84]. Ceci aurait du être l'objet d'un troisième exemple, que Newton ne fait pourtant qu'annoncer, se contentant de laisser un espace blanc qu'il ne remplira jamais[85]. Son propos était de trouver la primitive de la racine $\frac{q}{p} = z$ d'une équation de troisième degré :

$$z^3 - axz - x^3 = 0 \tag{11.109}$$

en exprimant d'abord cette racine par une série entière et en appliquant ensuite à cette série la première des règles (11.16). Bien que formellement analogue à une équation différentielle, cette équation semble plutôt se présenter aux yeux de Newton comme une expression implicite du rapport $\frac{q}{p}$. Il s'agit d'abord de la résoudre, d'une manière ou d'une autre, en tant qu'équation Algébrique, pour ne chercher que dans un deuxième temps la primitive de sa racine. Néanmoins, le seul fait d'entendre de cette manière le problème posé par la proposition 8 confirme que ce problème est compris par Newton comme un problème purement formel, ne concernant que les relations qui s'établissent entre certaines équations.

11.2 La deuxième partie du traité : les applications géométriques des propositions 1-8

Si les six premières propositions du *Traité d'octobre 1666* énoncent les principes généraux d'une géométrie de la composition des mouvements, et les propositions 7 et 8 de ce même traité fournissent une théorie des transformations formelles induites par l'algorithme des vitesses — préfigurant, pour la première fois dans l'histoire des mathématiques, un véritable traité d'*analyse* —, la deuxième partie de ce traité montre de quelle manière ces deux théories — qui restent, en tant que telles, complètement séparées — s'articulent l'une par rapport à l'autre, pour apporter une solution à une vaste classe de problèmes géométriques et à quelques problèmes mécaniques.

Bien que la variété des problèmes abordés et l'organisation systématique par laquelle leurs solutions sont présentées confèrent à l'exposition de Newton une envergure qui dépasse largement celle des expositions précédentes, l'attitude de celui-ci envers le problème des tangentes et les problèmes connectés (tels que ceux des centres de courbure, des points d'inflexion et de la rectification de la développée d'une courbe donnée) ne change pas par rapport aux notes de l'automne précédent. L'ampleur avec laquelle les transformations directes et inverses induites par l'algorithme des vitesses sont étudiées lors des propositions 7 et 8 est loin d'assigner à cet algorithme un rôle central dans la solution de ces problèmes. Ce dernier reste un outil local, qui dans certaines circonstances peut être mis au service de la théorie de la composition des mouvements. C'est cette théorie — au sein de laquelle les courbes sont pensées comme les trajectoires de certains mouvements composés (leurs éventuelles équations Algébriques ne servant qu'à exprimer la relation qui lie entre eux les mouvements composants) — qui fournit la solution de ces problèmes. À la lumière de

[84]Cf. Viète (1600). Comme l'observe Whiteside [cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note (41), 413], Newton avait étudié cette méthode à la fin de 1664 [cf. *ibid.*,I, **1**, § 1, [2], 66-71].

[85]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 413 et note (44), *ibid.*

l'histoire postérieure, l'exposition de cette solution, telle qu'on la trouve dans le *Traité d'octobre 1666*, se présente ainsi plus comme la préfiguration d'une géométrie différentielle développée à l'aide d'un modèle mécanique, que comme l'esquisse d'un traité de géométrie analytique.

La situation est différente pour le problème des aires, que Newton n'avait d'ailleurs plus abordé après sa rencontre avec la méthode des tangentes de Roberval. Le lien entre la solution que Newton propose pour ce problème et la théorie de la composition des mouvements est en fait assez faible. Ce dernier se limite à penser un trapézoïde délimité par une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes comme étant engendré par une translation de l'ordonnée le long de la direction de l'axe. En raisonnant sur la vitesse ponctuelle de ce mouvement de translation, il arrive à montrer que si x et y sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée de cette courbe et que z est sont aire, alors cette dernière aire se trouve en supposant que $y = \frac{r}{p}$, et en remontant de ce rapport à la variable z (p et r étant évidemment les vitesses ponctuelles des mouvements de génération de x et z). De cette manière, Newton réduit le problème des aires à un corrélat géométrique du problème inverse des vitesses, et, ne sachant s'attaquer à ce dernier problème que sous la forme du problème posé par la proposition 8 — qui concerne, plus précisément, l'inversion de l'algorithme des vitesses référé à des équations Algébriques —, il se limite à aborder le problème des aires pour des courbes dont l'ordonnée est exprimée par une expression Algébrique. Il en va de même pour le problème des rectifications d'une courbe quelconque.

Ceci étant dit, venons-en aux solutions de ces problèmes.

11.2.1 Le problème des tangentes

En suivant l'ordre de l'exposition de Newton, considérons d'abord le problème des tangentes[86]. Par la manière dans laquelle Newton pense ce problème il s'agit, plutôt que de déterminer un simple coefficient angulaire, de construire un point qui, avec le point choisi sur la courbe donnée, détermine la tangente à celle-ci en ce dernier point. Si la courbe donnée est telle (ou est donnée de telle manière) qu'il est possible de déterminer les vitesses ponctuelles des deux mouvements dont la composition produit le mouvement de génération de cette courbe, alors cela peut se faire à l'aide de la méthode de Roberval, que Newton résume ainsi[87] :

> Seeke (by prop 7$^{\text{th}}$; or 11$^{\text{d}}$, 4$^{\text{th}}$ & 2$^{\text{d}}$, &c) the motions of those streight lines to which the crooked line is cheifly referred, & with what velocity they increase or decrease. & they shall give (by prop 6$^{\text{t}}$, or 1$^{\text{st}}$ or 2$^{\text{d}}$) the motion of the point describing the crooked line ; which is in its tangent.

Il semblerait, à première vue, que Newton ne se réfère qu'à des courbes référées à des coordonnées rectilignes dont on suppose connaître le mouvement de génération. Les trois exemples par lesquels il illustre cette règle, en particulier le troisième, montrent pourtant qu'il veut se référer à toute courbe engendrée par un mouvement composé auquel on puisse appliquer la construction énoncée par la proposition 6. Cette proposition fournit ainsi la pierre de touche de la solution du problème des tangentes.

[86]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], Prob. 1, 416-418.
[87]Cf. Newton (MP),I, **2**, 7, [2], 416.

Bien que Newton les introduise comme des exemples de solution du problème des tangentes pour des courbes géométriques, les deux premiers de ces exemples concernent, plutôt que deux courbes particulières, deux modalités de donation d'une courbe qui peuvent aussi bien convenir pour des courbes géométriques que pour des courbes mécaniques. La limitation aux courbes géométriques ne concerne donc que l'application de l'algorithme énoncé par la proposition 7. Le premier exemple relève d'une courbe quelconque décrite par le point d'intersection de deux droites qui translatent selon leurs directions réciproques. Si on suppose connaître à tout moment les espaces couverts par ces translations, ceci est évidemment le cas d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes. Le deuxième exemple relève d'une courbe quelconque décrite par le point d'intersection de deux droites qui tournent autour de deux centres fixes. Si on suppose connaître à chaque instant la distance entre ces centres et ce point d'intersection, ceci est le cas d'une courbe référée à un système de coordonnées bipolaires.

Même si l'exposition est sans doute plus soignée que dans les notes de l'automne 1665, la solution proposée n'est autre que celle qui avait été présentée dans ces notes. Dans le premier cas il s'agit de construire un parallélogramme dont les côtés sont proportionnels aux composantes scalaires des vitesses de translation des deux droites et suivent les directions de ces vitesses, et d'en tracer la diagonale. Dans le deuxième cas, il s'agit de tirer deux segments perpendiculaires aux droites tournantes et proportionnels aux composantes scalaires des vitesses de rotation de ces droites, de construire sur ces segments un quadrilatère dont les deux autres côtés sont parallèles aux droites tournantes, prises dans la position où leur intersection donne le point en question, et de tracer encore la diagonale de ce quadrilatère.

Newton suppose que les courbes en question sont exprimées, par rapport aux systèmes de coordonnées dont il est question, par des équations Algébriques — qui expriment la relation entre les distances du point d'intersection des deux droites mobiles respectivement à deux droites fixes et aux centres de rotation (ce qui revient à dire que ces courbes sont justement géométriques). Dans le premier cas, il suffit alors d'appliquer l'algorithme énoncé par la proposition 7 à l'équation qui exprime la courbe pour obtenir le rapport des composantes scalaires des vitesses ponctuelles des mouvements de translation de ces droites. La soustangente est alors donnée d'emblée par le produit de l'ordonnée de la courbe et du rapport trouvé en appliquant cet algorithme à cette équation. Cet algorithme fournit ainsi sur le champ un autre algorithme que Newton présente sous la forme d'un "théorème général"[88] :

$$stg._x = -\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}\, j x^{i-j} y^j}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j,j}(i-j)x^{i-j-1}y^j} \tag{11.110}$$

En revanche, dans le deuxième cas, l'algorithme énoncé par la proposition 7, appliqué à l'équation qui exprime la courbe, ne fournit pas le rapport des composantes scalaires des vitesses des mouvements de rotation des droites tournantes. Il fournit plutôt le rapport entre les composantes scalaires des vitesses ponctuelles des mouvements de génération des coordonnées de la courbes. Il s'agit alors de prendre sur les directions de ces coordonnées deux segments qui soient entre eux dans ce rapport, et de tracer des pieds de ces segments

[88]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 417.

deux perpendiculaires. Le point d'intersection de ces perpendiculaires est le point cherché, c'est-à-dire que la tangente cherchée passe par ce point[89]. Il est alors clair que dans ce cas, l'algorithme énoncé par la proposition 7 ne fournit aucun algorithme supplémentaire propre à fournir d'emblée la position du point cherché à partir de l'équation de la courbe.

Le troisième des trois exemples présentés par Newton concerne la quadratrice. Cet exemple aurait du être suivi par un quatrième (à insérer dans un espace blanc qui ne sera jamais rempli[90]), et fournir avec celui-ci une illustration de la solution du problème des tangentes pour des courbe mécaniques. Il est pourtant clair que tout en multipliant ses exemples, Newton n'aurait pas pu fournir d'indications générales autres que celles qui sont déjà fournies par la proposition 6, lorsqu'on observe que la tangente de la courbe tracée par le point d'intersection de deux courbes rigides mobiles est la direction de la vitesse ponctuelle de ce mouvement. Une courbe mécanique étant donnée, il ne s'agit donc que de passer des modalités particulières de sa donation à une description de celle-ci comme trace d'un mouvement de cette sorte, et d'appliquer ensuite cette proposition. Il est clair que ce passage ne tient pas à une procédure standard, car il dépend des modalités particulières de donation de la courbe dont il est question. L'exemple de la quadratrice reste donc un exemple parmi d'autres. Probablement Newton le choisit-il parce que la tangente ne coïncide pas dans ce cas avec la diagonale du parallélogramme construit sur les segments représentant les vitesses des mouvements des deux courbes mobiles. La quadratrice étant directement donnée comme trace du mouvement du point d'intersection de deux droites mobiles, la proposition 6 s'applique pourtant dans ce cas sans aucune réduction préalable. Pris tout seul, cet exemple cache donc une difficulté intrinsèque à la méthode, que Newton avait probablement l'intention d'illustrer avec son deuxième exemple.

La construction qu'il propose est évidemment la même que celle qu'on trouve, après correction, dans la note du 8 novembre 1665[91]. Cependant, en pouvant disposer de la proposition 6, Newton n'a plus aucune nécessité de se réclamer d'une notion aussi vague que celle de mouvement total ou absolu. Des propositions 3 et 4, il s'ensuit que les vitesses ponctuelles, respectivement de translation et des rotation des droites XY et OE au point M (cf. la fig. 7 du chapitre 8) peuvent être respectivement représentées, l'une relativement à l'autre, par les segments MQ et MN, pourvu que ce dernier segment soit égal à l'arc de cercle MG. La proposition 6 nous dit alors sur-le-champ que la tangente passe par le point T d'intersection des perpendiculaires aux droites MR et MS tirées respectivement des points Q et N.

11.2.2 Le problème de la courbure et des points d'inflexion

À la suite du problème des tangentes, Newton aborde, dans l'ordre : le problème de la "quantité de courbure" (problème 2)[92] ; celui des points d'inflexion, ou points "distinguant les portions concaves et convexes d'une ligne courbe" (problème 3)[93] ; et celui des points de

---

[89] C'est à l'occasion de l'exposition de cette construction que Newton fournit l'argument référé au mouvement du point d'intersection de deux droites tournantes qu'on a présenté à la fin de la section 10.1.3, ci-dessus, pp. 479-480.

[90] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note (65), 419.

[91] Cf. la section 8.2.2.

[92] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], Prob. 2^{d}, 419-424.

[93] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], Prob. 3^{d}, 424-425.

courbure maximale ou minimale (problème 4)[94].

Le problème des centres de courbure

La solution des problèmes 3 et 4 n'est évidemment qu'un corollaire de la solution du problème 2, qui est résolu, à son tour, à l'aide de la méthode que Newton avait mise en place dans la note du 13 novembre 1665[95], et à laquelle il rattache désormais (comment il l'avait déjà suggérer à la fin de cette même note[96]) le formalisme employé dans la note du 21 mai 1665[97]. Le théorème énoncé à la fin de la première de ses deux notes de décembre 1664 à propos de la quantité de courbure[98] — affirmant que les courbures de deux arcs de cercle égaux appartenant à deux cercles distincts sont entre elles dans le rapport inverse des rayons de ces cercles — que celui-ci présente, sous la forme d'un lemme[99], en ouverture de son traitement du premier problème, lui permet d'ailleurs de réduire ce problème à celui de la détermination du centre de courbure.

Comme dans la note du 13 novembre, ce centre est conçu comme centre instantané de rotation du mouvement qui décrit la courbe, ou, comme le dit Newton, comme le point de “moindre mouvement”, parmi ceux qui appartiennent à la normale à cette courbe au point considéré. La construction de ce point est néanmoins justifiée plus soigneusement qu'elle ne l'avait été dans cette note. Newton observe que tous les points qui, lors du mouvement de rotation autour de ce point, restent fixes par rapport à la normale décrivent des cercles dont ce point est le centre ; en se réclamant de la proposition 4, il tire de ceci que les vitesses ponctuelles de ces points sont entre elles comme les rayons de ces cercles ; et, en se réclamant de la proposition 6, il en déduit que'il est de même pour les vitesses des points d'intersection de ces même rayons avec n'importe quelles droites fixes parallèles entre elles[100].

Ces prémisses ayant été posées, Newton ne considère qu'un seul exemple. Il est pourtant aisé de généraliser sa démarche et de parvenir à une construction du centre de courbure relatif à tout point de n'importe quelle courbe dont on suppose connaître la normale en ce point. Cette normale étant donnée, supposons qu'un de ses points, disons C, est le centre instantané de rotation du mouvement qui engendre la courbe dont il est question. La vitesse

[94]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], Prob. 4, 425-427.

[95]Cf. la section 9.2.2.

[96]Cf. ci-dessus, p. 453.

[97]Cf. la section 5.5.2.

[98]Cf. la note (45), ci-dessus.

[99]La preuve de ce lemme est la même que celle qui avait été donnée dans la note du décembre 1664 [cf. encore la note (45), ci-dessous].

[100]Si A et $\mathsf{A'}$ (fig. 3) sont respectivement les points d'intersection entre une droite OR qui tourne autour de O et deux autres droites fixes XY et $\mathsf{X'Y'}$, parallèles entre elles, et que AB et $\mathsf{A'B'}$ sont deux segments perpendiculaires à OR, tels que

$$\mathsf{AB} : \mathsf{A'B'} = \mathsf{OA} : \mathsf{OA'}$$

et qui représentent les vitesses ponctuelles des points A et $\mathsf{A'}$ conçus comme étant fixes sur la droite OR, alors, pour trouver les segments qui représentent les vitesses ponctuelles de ces mêmes points conçus comme points d'intersection entre la droite OR et les droites XY et $\mathsf{X'Y'}$, il suffit, conformément à la proposition 6, de tirer de B et $\mathsf{B'}$ des parallèles à OR jusqu'à ce qu'elles rencontrent les droites XY et $\mathsf{X'Y'}$. Si ces parallèles rencontrent ces dernières droites respectivement en deux points C et $\mathsf{C'}$, alors les segments AC et $\mathsf{A'C'}$ représentent ces vitesses. Mais, comme les triangles ACB et $\mathsf{A'C'B'}$ sont semblables, ces segments sont entre eux comme les segments AB et $\mathsf{A'B'}$ et donc comme les segments AO et $\mathsf{OA'}$. La généralisation de ce résultat à tout couple de points fixes par rapport à une droite tournante (qui n'est d'ailleurs pas nécessaire pour la suite de l'argument de Newton) est ensuite triviale.

ponctuelle de ce mouvement n'est alors que la vitesse ponctuelle du mouvement de rotation de cette normale autour de C, évaluée au point M, où cette normale touche la courbe. De même, la vitesse ponctuelle du mouvement de n'importe quel point de cette normale est la vitesse ponctuelle de ce mouvement de rotation, évaluée en ce point. Prenons alors sur la normale MC deux points quelconques distincts du point C, dont un peut être par simplicité le point M lui-même, et deux droites fixes passant par ces points, parallèles entre elles. Les vitesses instantanées des points d'intersection entre ces droites et la normale MC, tournant autour du point C, seront représentées respectivement par deux segments pris sur ces droites à partir de ces points d'intersection et proportionnels aux distances de ceux-ci au point C. Il s'ensuit que la droite qui joint les pieds de ces segments passe par C. En inversant le raisonnement, on en conclut que le centre de courbure relatif au point M est le point d'intersection entre la normale en ce point et la droite qui passe par les pieds des deux segments représentant respectivement les vitesses ponctuelles des mouvements des points d'intersection entre cette normale et deux droites fixes quelconques, parallèles entre elles. Pour pouvoir construire ce point, il suffit donc de connaître ces vitesses. Le problème des centres de courbure se réduit ainsi au problème de la détermination de ces vitesses, indépendamment de la connaissance du centre instantanée de rotation de la normale. C'est exactement le problème que Newton enseigne à résoudre dans le cas de l'exemple qu'il considère.

Cet exemple est celui d'une courbe quelconque référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales qu'on suppose engendrées par le mouvement du point d'intersection de deux droites donnant les directions de ces coordonnées. C'est le même cas que celui que Newton avait déjà considéré dans la note du 13 novembre 1665[101]. Les observations précédentes, et la disponibilité de la proposition 6, permettent pourtant de simplifier l'argument qui conduit à la solution de ce problème et donc à la construction du centre de courbure.

Supposons que la courbe AMJ (fig. 3, chapitre 9) est décrite par le point d'intersection des droites orthogonales PM et MS, qui translatent l'une au long de la direction de l'autre, et que la vitesse ponctuelle du mouvement de la première de ces droites est représentée par le segment $\mathsf{MN} = \mathsf{tP}$ (tP étant la sous-tangente relative au point M). Si on pose $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{PM} = y$, ce segment représentera alors la vitesse ponctuelle p du mouvement qui engendre x. Si on suppose que la tangente tM reste fixe, alors la vitesse du point d'intersection de cette tangente avec l'ordonnée PM est représentée, d'après la proposition 6, par le segment MT, NT étant la perpendiculaire à MS tirée du point N. Ce segment MT représente ainsi la vitesse ponctuelle du mouvement de rotation de la normale MG autour de son centre de rotation instantané, quel que soit ce centre. Si TZ est la parallèle à MG tirée du point T, il s'ensuit, encore d'après la proposition 6, que le segment $\mathsf{MZ} = \mathsf{tg} = \mathsf{tP} + \mathsf{PG}$ représente la vitesse ponctuelle du point d'intersection des droites MG et MS. Il ne reste alors qu'à trouver la vitesse du point d'intersection de la normale MG et d'une autre droite quelconque, parallèle à MS. Le choix le plus naturel est celui de l'axe AH. Comme le point G d'intersection entre la normale MG et cet axe n'est rien qu'une extrémité de la sous-normale PG, sa vitesse ponctuelle sera la somme de la vitesse ponctuelle du point P au long de l'axe AH et de la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de cette sous-normale, qui n'est rien que le mouvement par lequel le point G s'éloigne (ou s'approche) du point P. Si on pose $\mathsf{PG} = z$,

[101]Cf. la section 9.2.2, ci-dessus, en particulier pp. 449-9.2.2.

et qu'on suppose que r est la vitesse ponctuelle de génération de ce segment, alors la vitesse du point d'intersection entre la normale MG et l'axe AH sera ainsi $p + z$.

Pour construire le centre de courbure de la courbe AMJ relatif au point M, il n'y donc qu'à tirer du point M le segment MZ parallèle et égal à tG, de prendre sur l'axe AH un point F tel que $\mathsf{GF} = \mathsf{tP} + \varepsilon$, ε étant un segment qui est avec tP dans le même rapport que r — la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de $\mathsf{PG} = sn._x$ — avec p — la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de x —, et de tirer enfin la droite ZF. Le point C d'intersection entre cette dernière droite et la normale MG sera justement le centre de courbure cherché.

Ceci étant posé, il suffit d'exploiter le théorème de Thalès, pour obtenir les proportions :

$$\begin{array}{c} \mathsf{MZ} - \mathsf{GF} : \mathsf{MG} = \mathsf{MZ} : \mathsf{MC} \\ \mathsf{MZ} - \mathsf{GF} : \mathsf{MP} = \mathsf{MZ} : \mathsf{MD} \end{array} \tag{11.111}$$

dont la deuxième dépend de l'orthogonalité des coordonnées auxquelles la courbe AMY est référée, et la première n'est rient d'autre que la proportion (9.12), que Newton avait déjà obtenue dans la note du 13 novembre.

Si dans ces proportions on pose pourtant

$$\mathsf{GF} = \mathsf{tP} + \varepsilon = stg._x + stg._x \frac{r}{p} \tag{11.112}$$

comme on l'a supposé ci-dessus, il faut aussi supposer que le segment $\mathsf{MN} = stg._x$ représente la vitesse p et que le segment $\mathsf{PM} = y$ (qui est à $\mathsf{TP} = stg._x$ comme q est à p) représente la vitesse q. On aura alors

$$\begin{array}{rl} \mathsf{GF} & = [p]_{q=y} + [r]_{q=y} \\ \mathsf{MZ} & = [p]_{q=y} + sn._x \\ \mathsf{MZ} - \mathsf{GF} & = sn._x - [r]_{q=y} \end{array} \tag{11.113}$$

(où les symboles "$[p]_{q=y}$" et "$[r]_{q=y}$" dénotent respectivement les vitesses de génération de x et de $z = sn._x$ sous la condition $q = y$), et les proportions (11.111) donneront les égalités suivantes :

$$\begin{array}{l} \mathsf{MC} = \dfrac{\left([p]_{q=y} + sn._x\right)\sqrt{y^2 + (sn._x)^2}}{sn._x - [r]_{q=y}} \\ \mathsf{MD} = y\dfrac{[p]_{q=y} + sn._x}{sn._x - [r]_{q=y}} \end{array} \tag{11.114}$$

dont la première vaut pour tout système de coordonnées cartésiennes, tandis que la deuxième — qui est équivalente à la proportion (9.18)[102] — ne vaut que si ces coordonnées sont orthogonales.

Ces égalités ne dépendent évidemment pas de la nature de la courbe considérée, et en particulier de la possibilité de l'exprimer, par rapport au système de coordonnées cartésiennes orthogonales dont il est question, par une équation Algébrique. Si on suppose pourtant que cette courbe est géométrique et qu'on connaît l'équation Algébrique qui l'exprime par rapport à ce système de coordonnées, alors il est possible d'employer l'algorithme énoncé par

[102] Cf. la note (53), ci-dessus.

la proposition 7 pour trouver des expressions Algébriques qui expriment les grandeurs intervenant dans ces équations. Pour illustrer cette possibilité, Newton suppose que la courbe AMD est exprimée par l'équation $x^3 - axy + ay^2 = 0$; il détermine, à partir de cette équation et en appliquant l'algorithme énoncé par la proposition 7, les expressions Algébriques qui expriment $[p]_{q=y}$ et $sn._x$; il pose $sn._x = z$, et il en tire une équation entière en x, y et z, à laquelle il applique à nouveau l'algorithme énoncé par la proposition 7, pour trouver l'expression Algébrique qui exprime $[r]_{q=y}$; enfin, en substituant dans la deuxième des égalités (11.114), il obtient :

$$\mathsf{MD} = \frac{\left[\begin{array}{c} 9x^5 - 6ax^3y + a^2x^3 - 6a^2x^2y + 13a^2xy^2 \\ +12ax^2y^2 - 10a^2y^3 - 18x^4y \end{array}\right]}{2a^2y^2 - 2a^2xy - 24axy^2 + 24ax^2y - 18x^4} \tag{11.115}$$

En opérant de la même manière à partir d'une équation Algébrique entière quelconque, pensée comme l'équation d'une courbe géométrique référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, il est aisé de passer des égalités (11.114) aux théorèmes énoncés dans la note du 21 mai 1665. Bien que, faute d'une notation convenable, Newton n'aurait certes pas pu rédiger une preuve de la sorte, il pouvait sans difficulté raisonner sur la nature des transformations algorithmiques qu'il, d'après ces égalités, nécessaire d'opérer pour obtenir le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure. Il n'explicite pourtant pas son argument et se limite à énoncer ces théorèmes, en employant les mêmes notations que dans cette note. Voici pourtant comment il est possible de les démontrer en toute généralité, à partir des égalités (11.114).

Supposons que la courbe AMJ, référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'axe AH et d'origine A, est exprimée par l'équation :

$$F(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n-i} A_{i,j}y^j\right)x^i = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n-j} A_{i,j}x^i\right)y^j = 0 \tag{11.116}$$

En appliquant à cette équation l'algorithme énoncé par la proposition 7, et en employant les notations introduites dans la note du 21 mai 1665, on obtient d'abord :

$$p = -\frac{q\sum\limits_{j=0}^{n}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-j} A_{i,j}x^i\right)\theta_j y^{j-1}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\sum\limits_{j=0}^{n-i} A_{i,j}y^j\right)\tau_i x^{i-1}} = -\frac{q\,(\mathcal{X}_\bullet)\,x}{(_\bullet\mathcal{X})\,y} \tag{11.117}$$

où $\{\theta j\}_{j=0}^{n} = \{\theta_0 + j\eta\}_{j=0}^{n}$ et $\{\tau_i\}_{i=0}^{n} = \{\tau_0 + i\eta\}_{i=0}^{n}$ sont deux progressions arithmétiques quelconques de raison η et de base θ_0 et τ_0, respectivement. De là, grâce à l'orthogonalité des coordonnées, il s'ensuit

$$sn._x = z = \frac{y^2}{stg._x} = y\frac{q}{p} = -\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\sum\limits_{j=0}^{n-i} A_{i,j}y^{j+1}\right)\tau_i x^{i-1}}{\sum\limits_{j=0}^{n}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-j} A_{i,j}x^i\right)\theta_j y^{j-1}} = -\frac{(_\bullet\mathcal{X})\,y^2}{(\mathcal{X}_\bullet)\,x} \tag{11.118}$$

et donc :

$$z\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n-j}A_{i,j}x^{i}\right)\theta_{j}y^{j-1}+\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n-i}A_{i,j}y^{j+1}\right)\tau_{i}x^{i-1}=0 \tag{11.119}$$

Si on applique encore l'algorithme énoncé par la proposition 7 à cette équation, on obtient ensuite[103] :

$$\left.\begin{array}{c} r\vartheta_1\sum\limits_{j=0}^{n}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-j}A_{i,j}x^{i}\right)\theta_{j}y^{j-1} \\ zp\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\sum\limits_{j=0}^{n-i}A_{i,j}\theta_{j}y^{j-1}\right)\tau_{i}x^{i-1}+p\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\sum\limits_{j=0}^{n-i}A_{i,j}y^{j+1}\right)\tau_{i\pm1}\tau_{i}x^{i-2} \\ zq\sum\limits_{j=0}^{n}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-j}A_{i,j}x^{i}\right)\theta_{j\pm1}\theta_{j}y^{j-2}+q\sum\limits_{j=0}^{n}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-j}A_{i,j}\tau_{i}x^{i-1}\right)\theta_{j+1}y^{j} \end{array}\right\}=0 \tag{11.120}$$

où ϑ_1 est le terme de rang 1 d'une progression arithmétique $\{\vartheta_h\}_{h=0}^{\infty}=\{\vartheta_0+h\eta\}_{h=0}^{\infty}$ de base ϑ_0 et raison η. En employant les notations introduites dans la note du 21 mai 1665 — avec les substitutions triviales ${}_{\therefore}\mathcal{X}\rightarrow{}_{\bullet\bullet}\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}_{\therefore}\rightarrow\mathcal{X}_{\bullet\bullet}$ —, cette équation s'écrit ainsi :

$$\left.\begin{array}{c} r\vartheta_1\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)y^{-1} \\ zp\left({}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet}\right)y^{-1}x^{-1}+p\left({}_{\bullet\bullet}\mathcal{X}\right)yx^{-2} \\ zq\left(\mathcal{X}_{\bullet\bullet}\right)y^{-2}+q\left({}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet}\right)x^{-1}+q\eta\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)x^{-1} \end{array}\right\}=0 \tag{11.121}$$

En comparant cette équation avec les égalités (11.117) et (11.118), on obtient enfin :

$$r=y\frac{-2q\left({}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet}\right)+q\frac{\mathcal{X}_{\bullet}}{{}_{\bullet}\mathcal{X}}\left({}_{\bullet\bullet}\mathcal{X}\right)+q\frac{{}_{\bullet}\mathcal{X}}{\mathcal{X}_{\bullet}}\left(\mathcal{X}_{\bullet\bullet}\right)-q\eta\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)}{\vartheta_1\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)x} \tag{11.122}$$

Pour trouver $[p]_{q=y}$ et $[r]_{q=y}$, il suffit de poser $q=y$ dans le deuxième membre des égalités (11.117) et (11.122), respectivement. En substituant dans les égalités (11.114), et en supposant (comme il est permis de le faire) que $\vartheta_1=\eta=1$: on aura alors :

$$\begin{aligned} \mathsf{MC}&=\frac{\left(y^{2}\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)^{2}+x^{2}\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)^{2}\right)\sqrt{x^{2}\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)^{2}+y^{2}\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)^{2}}}{xy\left({}_{\bullet\bullet}\mathcal{X}\right)\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)^{2}-2xy\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)\left({}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet}\right)\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)+xy\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)^{2}\left(\mathcal{X}_{\bullet\bullet}\right)} \\ \mathsf{MD}&=\frac{\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)\left[y^{2}\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)^{2}+x^{2}\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)^{2}\right]}{y\left({}_{\bullet\bullet}\mathcal{X}\right)\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)^{2}-2y\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)\left({}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet}\right)\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)+y\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)^{2}\left(\mathcal{X}_{\bullet\bullet}\right)} \end{aligned} \tag{11.123}$$

qui correspondent justement aux égalités (5.183) et (5.180). De là, en appliquant le théorème de Pythagore, il est enfin aisé de tirer :

$$\mathsf{DC}=\frac{\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)\left[y^{2}\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)^{2}+x^{2}\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)^{2}\right]}{-x\left({}_{\bullet\bullet}\mathcal{X}\right)\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)^{2}+2x\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)\left({}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet}\right)\left(\mathcal{X}_{\bullet}\right)-x\left({}_{\bullet}\mathcal{X}\right)^{2}\left(\mathcal{X}_{\bullet\bullet}\right)} \tag{11.124}$$

[103] Cf. la note (123), ci-dessus.

qui correspond à l'égalité (5.182). Ces sont exactement les égalités énoncées par Newton en tant que conséquences des égalités (11.114)[104].

* * *

L'argument par lequel Newton parvient aux égalités (11.114) est plus simple que celui qui supporte la solution du problème des centres de courbure exposée dans la note du 13 novembre 1665. Néanmoins, il n'est pas essentiellement différent de celui-ci, et les égalités (11.114) ne différent guère des égalités obtenues lors de cette note. Encore une fois, Newton n'a recours à rien de similaire à une dérivée ou à une différentielle secondes et se limite a employer l'algorithme énoncé par la proposition 7 pour ce qu'il est, c'est-à-dire comme une règle de transformation d'équations Algébriques entières. Du coup, bien que les égalités (11.123) et (11.124) soient obtenues en suivant un parcours essentiellement différent de celui qui dans la note du 21 mai 1665 avait conduit Newton à ces mêmes égalités, l'interprétation et le rôle de ces dernières dans la solution proposée pour le problème des centres de courbure ne change pas. Les symboles pointés ne réfèrent, une fois de plus, qu'à des invariants algorithmiques, sans ne rien préconiser de similaire à nos notions de différentielle ou de dérivée (autant premières que secondes), et les égalités (11.123) et (11.124) ne font qu'indiquer des transformations algorithmiques à opérer sur l'équation Algébrique de la courbe donnée pour obtenir les expressions Algébriques des coordonnées du centre de courbure et du rayon de courbure. L'introduction de la notion de vitesse ponctuelle et la possibilité de se réclamer de la théorie des mouvements composés n'ont donc aucune conséquence quant à la manière d'obtenir et de penser la solution du problème des centres de courbure pour des courbes géométriques. Elles ne permettent que de rattacher cette solution à une théorie plus générale. Cela permet d'exprimer les relations qui lient le centre de courbure aux coordonnées de n'importe quelle courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales (soit-elle exprimée ou non par une équation Algébrique) par des égalités, telles que les égalités (11.114), où — à la place des valeurs de la sous-normale prises en deux points infiniment proches qui intervenaient dans les égalités (5.97) (5.97), que Newton avait respectivement employées au mois de décembre 1664 et dans la note du 21 mai 1665 — interviennent les vitesses ponctuelles p et r[105].

* * *

Après avoir énoncé les égalités (11.123) et (11.124), Newton consacre plusieurs lignes de son traité[106] à les exemplifier, en se référant à deux courbes, respectivement d'équation $x^3 - axy + ay^2 = 0$ et $abx + ax^2 - by^2 = 0$. Il emploie à ce propos des progressions arithmétiques toutes de raison 1, ce qui s'accorde avec la supposition $\eta = 1$ employée dans la preuve de ces égalités.

[104] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 421-422. En vérité, Newton change le signe des égalités (11.114), et écrit donc les égalités (11.123) et (11.124) avec le signe inversé, ce qui n'a pourtant aucune conséquence, pourvu que ces égalités expriment des segments.
[105] Cf. la note (58), ci-dessus.
[106] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 422-423.

C'est seulement après ces exemples que Newton aborde, très rapidement, la question d'une possible généralisation de sa solution du problème du centre de courbure à des courbes référées à des coordonnées cartésiennes non orthogonales. Voici ce qu'il écrit[107] :

> Note that the curvity of any curve whose ordinates are inclined from right to oblique angles is as the curvity of a circle whose ordinates are in like manner inclined so as to make it becom an Ellipsis.

Il s'agit donc de considérer une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes non orthogonales comme le résultat de la déformation d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales induite par le changement d'inclinaison des ordonnées de cette dernière courbe. Du coup, le centre de courbure de la deuxième courbe en vient à coïncider avec le centre de l'ellipse résultant de la déformation du cercle osculateur de la première courbe induite par le même changement d'inclinaison des ordonnées orthogonales de ce cercle. S'il est difficile de ne pas rester fasciné par cette idée, qui fait implicitement intervenir l'équivalence projective entre le cercle et l'ellipse, il faut aussi observer que Newton ne la développe pas, et ne l'accompagne d'aucune adaptation des égalités (11.123) et (11.124). Si ces dernières égalités ne concernent que des courbes géométriques référées à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, car elles dérivent toutes de l'égalité (11.118), la première des égalités (11.114), exprimant le rayon de courbure, concerne, quant à elle, une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes quelconques. Si Newton ressent le besoin d'introduire l'observation précédente c'est donc qu'il ne considère pas cette dernière égalité, prise en tant que telle, comme une solution du problème des centres de courbure. Et la raison semble en être que cette égalité ne nous permet de construire le rayon de courbure qu'à la condition de connaître la normale à la courbe considérée. La difficulté due au passage à des courbes référées à des systèmes de coordonnées quelconques concerne donc non pas le problème des centres de courbure, mais, plus proprement, le problème des normales. Cette difficulté est pourtant mineure, et Newton aurait pu la résoudre, tout simplement, en introduisant un facteur constant dépendant de l'angle formé par les coordonnées. S'il ne l'a pas fait, en préférant passer par la prise en compte d'une déformation transformant un cercle en une ellipse, c'est qu'il visait une construction géométrique du centre de courbure, plutôt qu'une formule indiquant les relations, qu'on dirait aujourd'hui différentielles, entre la courbe donnée et son rayon de courbure.

Le problème des points d'inflexion

Après avoir résolu le problème des centres de courbure, Newton aborde le problème des points d'inflexions, en présentant la solution de ce dernier problème comme un corollaire de la solution du premier. En s'éloignant des solutions de ce problème proposées par Huygens, van Schooten, van Heuraet et Fermat, dans le cas de la conchoïde, ainsi que de celles qu'il avait lui même proposées, dans le même cas, dans la note du 16 mai 1666[108], il considère en effet un point d'inflexion d'une courbe quelconque comme un point où cette courbe "n'est pas courbée"[109], c'est-à-dire que sa courbature est nulle, et son rayon de courbure est

[107] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 424 ; pour une explication, cf. le commentaire de Whiteside, *ibid.*, note (84), 424-425.
[108] Cf. la section 10.3.2, ci-dessus.
[109] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 424.

donc infini. De cette manière, il peut aborder le problème en général, pour n'importe quelle courbe dont on suppose connaître le rayon de courbure. Il suffit en effet de se réclamer de la première des égalités (11.114) pour conclure qu'un point d'inflexion satisfait la condition

$$sn._x = [r]_{q=y} \tag{11.125}$$

En supposant que la courbe est géométrique et qu'elle est exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par l'équation (11.116), cette condition se laisse d'ailleurs exprimer par l'équation

$$(\mathcal{X}_{\bullet})^2 ({}_{\bullet\bullet}\mathcal{X}) - 2 (\mathcal{X}_{\bullet}) ({}_{\bullet}\mathcal{X}) ({}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet}) + ({}_{\bullet}\mathcal{X})^2 (\mathcal{X}_{\bullet\bullet}) = 0 \tag{11.126}$$

qui est exactement celle écrite par Newton.

C'est seulement après avoir écrit cette équation, qui fournit les points d'inflexion de n'importe quelle courbe géométrique référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, que Newton revient au cas particulier de la conchoïde de Nicomède. Il lui suffit alors d'exprimer cette courbe, relativement à un système de coordonnées cartésienne orthogonales, par l'équation

$$x^4 + 2bx^3 + \left[b^2 - a^2 + y^2\right] x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0 \tag{11.127}$$

— qui correspond à l'équation (10.15), sous les substitutions $x \to y$, $y \to x$ — et d'en tirer les égalités

$$\begin{aligned} ({}_{\bullet}\mathcal{X})_{[\tau_i = i-2]} &= 2x^4 + 2bx^3 + 2a^2bx + 2a^2b^2 \\ (\mathcal{X}_{\bullet})_{[\theta_j = j]} = (\mathcal{X}_{\bullet\bullet})_{[\theta_j = j]} &= 2x^2y^2 \\ ({}_{\bullet\bullet}\mathcal{X})_{[\tau_i = i-2]} &= 2x^4 - 4a^2bx - 6a^2b^2 \\ ({}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet})_{[\tau_i = i-2; \theta_j = j]} &= 0 \end{aligned} \tag{11.128}$$

pour avoir, d'après l'équation (11.126), la nouvelle équation :

$$x^3 + 3bx^2 - 2a^2b = 0 \tag{11.129}$$

qui correspond à l'équation (10.17), sous les mêmes substitutions.

Bien que très simple, cet exemple montre que la possibilité de choisir, lors de l'application de l'algorithme énoncé par la proposition 7, des progressions arithmétiques différentes de la progression $\{0, 1, 2, \ldots\}$ des nombres entiers positifs permet, dans certains cas, de simplifier les expressions Algébriques intervenant dans la solution des problèmes géométriques référés à des courbes exprimées par des équations Algébriques : comme il l'avait déjà fait en travaillant avec la règle de Hudde, Newton exploite cette possibilité pour éliminer des variables de ces expressions.

Malgré cette possibilité de simplification, l'équation (11.126) ne fournit la solution du problème des points d'inflexion pour une courbe géométrique que sous la forme d'une nouvelle équation, qu'il faut ensuite savoir résoudre pour parvenir à déterminer les coordonnées de ces points. Encore une fois dans la solution de Newton n'apparaît rien d'analogue à une condition différentielle, telle que la nullité de la dérivée seconde. La condition (11.125), que d'ailleurs Newton n'écrit pas explicitement, ne renvoie en effet qu'à des procédures constructives ou algorithmiques fondées sur une connaissance préalable de la sous-normale et sur son interprétation en tant que segment engendré par un mouvement dont il s'agit de déterminer la vitesse ponctuelle.

Le problème des points de courbure maximale ou minimale

De même que celle du problème des points d'inflexion, la solution du problème des points de courbure maximale ou minimale est présentée par Newton comme un simple corollaire de la solution du problème des centres de courbure. En effet, observe Newton, les points où la courbure d'une courbe atteint un extrême sont ceux où le rayon de courbure "ne croît ni ne décroît", de sorte que le centre de courbure "reste absolument en repos"[110]. Il s'agit, comme il est facile de le comprendre, de la condition qui, d'après la méthode des *maxima* et *minima* de Fermat, est satisfaite par les extrêmes de toute quantité variable. Newton ne fait que reformuler cette condition dans le langage de sa théorie de la composition des mouvements. Un point de toute courbe donnée est ainsi un point de courbure maximale ou minimale seulement si la vitesse ponctuelle du mouvement qui engendre le rayon de courbure relatif à ce point est nulle. Si la courbe dont il est question est référée à un système de coordonnées, il s'ensuit qu'en un point de courbure maximale ou minimale, la vitesse ponctuelle des mouvements qui engendrent les coordonnées du centre de courbure est également nulle.

Si la formulation de cette condition ne comporte aucune difficulté, pour passer de cette formulation à la détermination des points d'une courbe donnée qui peuvent être des points de courbure maximale ou minimale, il faut savoir passer de la première des égalités (11.114) — ou éventuellement de la deuxième — à la détermination de la vitesse ponctuelle du mouvement qui engendre le segment MC — ou éventuellement à la détermination de la vitesse du mouvement qui engendre le segment MD. Newton n'aborde pas ce problème en général. Il se limite à supposer que la courbe en question est géométrique et qu'elle est exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par une équation Algébrique connue. Il peut alors supposer que le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure sont exprimés par les égalités (11.123) et (11.124). S'il en est ainsi, il s'agit alors de : choisir parmi les segments MC, MD et DC celui exprimé par l'expression Algébrique la plus simple ; former une équation entière, en supposant que cette expression est égale à une nouvelle variable, disons v ; appliquer l'algorithme énoncé par la proposition 7 pour calculer la vitesse ponctuelle s du mouvement qui engendre v, à partir de cette équation (éventuellement simplifiée par comparaison avec l'équation de la courbe) ; former l'équation $v = 0$ et la résoudre par rapport à une des coordonnées de la courbe.

Il est clair que cette procédure, si facile à décrire, peut comporter des calculs fort pénibles, pour peu que l'équation de la courbe soit un peu compliquée. Après avoir abordé l'exemple de la conchoïde de Nicomède, Newton abandonne cet exemple, en observant que "le calcul

[110] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 425.

est trop ennuyeux"[111], et limitant à considérer les courbes d'équation

$$\begin{aligned} x^3 - a^2 y &= 0 \\ x^2 y - a^3 &= 0 \\ x^3 - b y^2 &= 0 \end{aligned} \tag{11.130}$$

De ces équations, il est facile de tirer, respectivement

$$\begin{array}{ll} ({}_{\bullet}\mathcal{X})_{[\tau_i=i]} = 3x^3 & ({}_{\bullet}\mathcal{X})_{[\tau_i=i-2]} = 2a^3 \\ (\mathcal{X}_{\bullet})_{[\theta_j=j]} = -a^2 y & (\mathcal{X}_{\bullet})_{[\theta_j=j-1]} = a^3 \\ ({}_{\bullet\bullet}\mathcal{X})_{[\tau_i=i]} = 6x^3 & ({}_{\bullet\bullet}\mathcal{X})_{[\tau_i=i-2]} = -6a^3 \\ (\mathcal{X}_{\bullet\bullet})_{[\theta_j=j]} = 0 & (\mathcal{X}_{\bullet\bullet})_{[\theta_j=j-1]} = 0 \\ ({}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet})_{[\tau_i=i;\theta_j=j]} = 0 & ({}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet})_{[\tau_i=i-2;\theta_j=j-1]} = 0 \end{array} \tag{11.131}$$

$$\begin{aligned} ({}_{\bullet}\mathcal{X})_{[\tau_i=i]} &= 3x^3 \\ (\mathcal{X}_{\bullet})_{[\theta_j=j]} &= -2by^2 \\ ({}_{\bullet\bullet}\mathcal{X})_{[\tau_i=i]} &= 6x^3 \\ (\mathcal{X}_{\bullet\bullet})_{[\theta_j=j]} &= -2by^2 \\ ({}_{\bullet}\mathcal{X}_{\bullet})_{[\tau_i=i;\theta_j=j]} &= 0 \end{aligned}$$

et donc, en changeant de signe, pour plus de simplicité,

$$\begin{aligned} v &= \frac{a^4 + 9x^4}{6a^2 x} \\ v &= \frac{x^2 + 4y^2}{6y} = \frac{a^3 + 4y^3}{6y^2} \\ v &= \frac{-4b^2y^3 - 9x^4 y}{9x^4 - 12bxy^2} = \frac{4}{3} b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} + 3y \end{aligned} \tag{11.132}$$

et

$$\begin{aligned} s &= p\left(\frac{9x^2}{2a^2} - \frac{a^2}{6x^2}\right) = 0 \\ s &= q\left(\frac{2}{3} - \frac{a^3}{3y^3}\right) = 0 \\ s &= q\left(3 + \frac{4}{9} b^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{2}{3}}\right) = 0 \end{aligned} \tag{11.133}$$

[111]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note (92), 426.

ou bien :

$$
\begin{aligned}
&\frac{9x^2}{2a^2}-\frac{a^2}{6x^2}=0\\
&\frac{2}{3}-\frac{a^3}{3y^3}=0\\
&3+\frac{4}{9}b^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}=0
\end{aligned}
\tag{11.134}
$$

La première courbe a donc un point de courbure maximale ou minimale pour $x=\pm\frac{a}{\sqrt[4]{27}}$, la deuxième pour $y=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$, et la troisième n'a aucun point (réel) de courbure maximale ou minimale.

De même que les solutions de Newton des problèmes des centres de courbure et des points d'inflexions ne se réclament de rien de similaire à une dérivée ou une différentielle secondes, sa solution du problème des points de courbure maximale ou minimale ne se réclame de rien de similaire à une dérivée ou une différentielle troisièmes. À la différence des solutions des deux premiers problèmes, elle ne se réclame pas non plus d'une égalité générale, telle que les égalités (11.114) et (11.125), que l'algorithme énoncé par la proposition 7 transforme ensuite, dans certains cas particuliers, en une procédure algorithmique portant à une expression Algébrique de la solution cherchée. Cette solution se réduit d'emblée à une procédure, qui emploie cet algorithme pour passer d'équation entière à équation entière, selon un parcours réglé que Newton s'efforce de décrire en général, tout en sachant que ce parcours ne peut être effectivement suivi jusqu'au bout que dans des cas fort simples.

11.2.3 Le problème des aires

La troisième parmi les trois remarques que Newton ajouta dans un deuxième temps au début de son traité[112], est présentée par ce dernier comme un exemple de la procédure décrite dans la deuxième remarque. Newton pose l'équation

$$y^2+axy-w^4=0 \tag{11.135}$$

entre trois variables, x, w, et y, auxquelles sont assignées des significations géométriques mutuellement indépendantes : la première dénote l'abscisse AP (fig. 4) d'une courbe AMJ, dont l'ordonnée PM, orthogonale à cette abscisse, est égale à $\sqrt{ax-x^2}$, la deuxième dénote une partie quelconque Pm de cette ordonnée, et la troisième dénote l'aire du trapézoïde APM délimité par cette courbe. Après avoir trouvé (en appliquant l'algorithme énoncé par la proposition 7) l'équation des vitesses associée à cette équation, Newton construit le rectangle APLE, dont le côté PL est pris comme étant unitaire, et suppose que l'aire x du rectangle APLE et l'aire y du trapézoïde APM "augmentent dans la même proportion que

[112]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 412. À propos de ces trois remarques cf. ci-dessus, en particulier pp. 504-11.1.2 .

PL à PM"[113]. De cette supposition, il tire la proportion

$$u : \sqrt{ax - x^2} = p : q \tag{11.136}$$

(u étant le segment unité), d'où il s'ensuit l'égalité

$$q = p\sqrt{ax - x^2} \tag{11.137}$$

Il suffit alors de substituer cet expression dans l'équation des vitesses déjà trouvée, pour en tirer une nouvelle équation qui, d'après Newton, "était demandée". Il est difficile de comprendre la nature exacte du problème que Newton pense avoir résolu de cette manière. Il est clair néanmoins que l'argument qui le conduit à l'égalité (11.137) est, en tant que tel, indépendant de l'algorithme énoncé par la proposition 7. Il dépend plutôt de deux suppositions de nature générale : i) les aires de deux trapézoïdes décrits par la translation de deux segments (variables ou constants) au long de la direction de la même droite "augmentent" dans la même proportion que ces segments ; ii) les augmentations de ces aires sont entre elles dans le même rapport que les vitesses ponctuelles des mouvements qui les engendrent. Si, comme on l'a fait jusqu'ici, on pense l'aire d'une figure plane[114] comme un segment, en particulier comme le segment qui mesure cette figure dans le domaine des segments, alors la supposition (ii) revient à supposer que les augmentations de deux segments sont entre elles dans le même rapport que les vitesses ponctuelles des mouvements qui engendrent ces segments. Une manière de justifier cette supposition est alors de penser l'augmentation d'un segment comme l'incrément que ce segment subit "en un instant", et de l'exprimer par le produit de la vitesse ponctuelle de son mouvement de génération et d'un facteur constant fonctionnant comme un paramètre temporel. C'est d'ailleurs sur cette interprétation que Newton fonde sa démonstration de la proposition 7[115]. Il suffit alors d'assumer que les aires du rectangle APLE et du trapézoïde ALM sont respectivement égales à x et y pour en conclure que les augmentations de ces aires sont entre elles comme p et q. Pour ce qui est est de la supposition (i), elle s'ensuit directement de la conception de l'augmentation de l'aire d'un trapézoïde décrit par la translation d'un segment au long de la direction d'une certaine droite comme l'aire du parallélogramme construit sur ce segment — pris dans la position qu'il occupe en un (certain) instant — et un segment constant quelconque, pris sur cette droite, qui corresponde à l'incrément que le segment joignant un point fixe quelconque pris sur cette droite au pied du segment translatant au long de la direction de celle-ci subit en un instant. Soit A' ce point fixe (que rien n'empêche de prendre comme coïncidant avec l'origine A du trapézoïde considéré), et qu'on posons $\mathsf{A}'\mathsf{P} = v$, alors les augmentations des aires du rectangle APLE et du trapézoïde APM seront respectivement égales à uso et à $\left(\sqrt{ax - x^2}\right) so$, $u = \mathsf{PL}$ étant le segment pris comme unitaire, s étant la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de v, et so étant enfin l'incrément que v subit en un instant. Le rapport de ces augmentations — qui d'après la supposition (ii) est égal au rapport de p à q — sera alors le rapport de u à $\sqrt{ax - x^2}$, comme l'affirme la proportion (11.136).

[113]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 412 : "Now drawing $\mathsf{EL} \parallel \mathsf{AP} \perp \mathsf{AE} = 1 = \mathsf{PL}$. I consider the superficies $\mathsf{APLE} = \mathsf{AP} \times \mathsf{PL} = x \times 1 = x$, & $\mathsf{APM} = y$ doe increase in the proportion of PL to PM [...]". Pour des raison d'uniformité j'ai changé les lettres de Newton et écrit "y", où Newton écrit "z" et "w", où Newton écrit "y".

[114]Cf. la section 4.1.1 ci-dessus, en particulier p. 176.

[115]Cf. ci-dessus, pp. 502-503.

L'argument qui conduit à cette proportion, que Newton présente lors d'une remarque ajoutée, sans aucune raison apparente, au début de son traité, constitue la pierre de touche des solutions que celui-ci présente pour les trois problèmes portant sur les aires des courbes considérés dans le *Traité d'octobre 1666*. D'abord, Newton se propose de trouver la "nature" d'une courbe dont l'aire est exprimée par une équation donnée (problème 5)[116] ; ensuite, il montre comment pouvoir trouver des courbes dont l'aire "puisse être comparée" avec l'aire d'une courbe donnée (problème 6)[117] ; enfin, il enseigne à trouver l'aire d'une courbe (dont la "nature" est) donnée (problème 7)[118].

Le problème inverse des aires

L'argument qui conduit Newton à la solution du premier de ces problèmes peut être reconstruit comme il suit.

Supposons que AMJ (encore fig. 4) est une courbe quelconque référée à un système de deux coordonnées cartésiennes orthogonales, d'origine A et d'axe AH et posons $\mathsf{AP} = x$, $\mathsf{PM} = z$ et $s\,[\mathsf{APM}] = y$. Construisons comme ci-dessus le rectangle APLE de base x et de hauteur $\mathsf{AE} = u$. L'aire de ce rectangle sera égale à $ux = x$. Il s'ensuivra alors, en accord avec l'argument précédent, que

$$u : z = p : q \tag{11.138}$$

et donc[119] :

$$z = \frac{q}{p} \tag{11.139}$$

Si on suppose alors que la relation entre l'abscisse x et l'aire y de la courbe AMY est exprimée par une équation Algébrique quelconque, telle que (11.116) — c'est-à-dire, dans le langage de Newton, que la "nature" de cette aire "est exprimée par une équation quelconque"[120] —, et que l'on fait usage des notations employées lors de la solution du problème 2, on aura alors, d'après l'égalité (11.117) :

$$z = \mathsf{PM} = -\frac{({}_{\bullet}\mathcal{X})\,y}{(\mathcal{X}_{\bullet})\,x} \tag{11.140}$$

qui exprime la solution du problème.

* * *

D'après Whiteside[121], de cette égalité il s'ensuit l'autre égalité[122]

$$Aire(\mathsf{APM}) = \int z dx = y \tag{11.141}$$

[116] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], prob.5^{t}, 427-428.
[117] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], prob. 6, 428-430.
[118] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], prob. 7, 430-432.
[119] En réalité Newton pose d'emblée que $\mathsf{PM} = q$ et suppose que $p = u$. En lieu de l'égalité plus générale (11.139), il écrit donc l'égalité $\mathsf{PM} = q$.
[120] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 427.
[121] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note (97), 427.
[122] Cf. la note (119), ci-dessus.

qui lui semble de surcroît équivalente à l'égalité

$$\int \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = y \tag{11.142}$$

qui exprimerait le "théorème fondamental du *calcul*". J'ai déjà observé[123] que ce dernier théorème ne peut être énoncé qu'à la condition d'avoir défini de deux manières indépendantes la dérivée d'une fonction et son intégrale définie. Affirmer que la primitive de la dérivée de z est z n'a évidement rien de fondamental, cette affirmation n'étant que la paraphrase de la définition de la primitive. Pour voir dans l'égalité (11.142) une expression du théorème fondamental du *calcul*, il faut donc supposer que les symboles "$\int - dx$" et "$\frac{d}{dx}(-)$" référent à des objets mathématiques indépendants. Si on compare entre elles les égalités (11.141) et (11.142), on comprend que Whiteside suppose que le premier de ces symboles réfère à l'aire d'une courbe (la courbe dont l'ordonnée est exprimée par le symbole qui intervient entre "$\int$" et "dx") et que le deuxième réfère à la vitesse ponctuelle r du mouvement qui engendre l'ordonnée de cette courbe. Le théorème fondamental du *calcul* serait alors exprimé par l'égalité (11.139) — où l'on aurait posé, comme le suggère Newton, $p = u$ —, plutôt que par l'égalité (11.140), qui n'en est qu'une conséquence particulière soumise à des conditions particulières qui n'ont rien à voir avec la généralité des notions d'aire et de vitesse ponctuelle d'un mouvement. Si cette égalité est loin d'être triviale, cela tient justement au fait qu'elle ne concerne pas le *calcul*, mais la conception géométrique de l'aire d'une courbe et en particulier l'interprétation de cette dernière comme l'aire d'un trapézoïde décrit par la translation d'un segment au long de la direction d'une droite donnée. Plutôt que le théorème fondamental du *calcul*, cette égalité exprime donc une partie du contenu du théorème de van Heuraet, dans la forme adaptée que Newton avait assignée à ce théorème. Pour passer de cette égalité à ce théorème, il faut ajouter ensuite que la sous-tangente d'une courbe donnée, référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales x et z, est égale au produit $z\frac{p}{r}$, comme l'affirme la solution du problème 2.

Prise pour elle même, l'égalité (11.139) dérive donc du théorème de van Heuraet et de l'introduction d'un intermédiaire entre tangentes et aires fourni par le rapport des vitesses ponctuelles de deux mouvements choisis de manière convenable. Ce qui est essentiel dans la démarche de Newton est pourtant que celui-ci parvienne à cette égalité sans se réclamer du théorème de van Heuraet. Ce théorème, avec l'appareil géométrique se réclamant de la méthode des indivisibles nécessaire à sa preuve, est donc tout simplement éliminé de la nouvelle théorie de Newton. Et le rôle fondamental que ce théorème avait joué jusqu'à l'automne 1665 dans les recherches consacrées par Newton au problème des aires est pris, au sein de cette théorie, par l'égalité (11.139). Cette égalité nous dit en effet que le rapport $\frac{q}{p}$ des vitesses ponctuelles des mouvements engendrant deux segments y et x exprime en même temps : le rapport $\frac{y}{stg._x}$ du premier de ces segments et de la sous-tangente d'une courbe dont ces segments sont les coordonnées cartésiennes orthogonales ; et l'ordonnée d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, dont x et y expriment respectivement l'abscisse et l'aire.

Cela étant dit, revenons sur l'argument qui justifie l'égalité (11.139). Voici ce que Newton écrit :[124]

[123]Cf. la note (62), ci-dessus.
[124]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 427.

> Now supposing the line MPL by parallel motion from AE to describe the two superficies $\mathsf{AL} = x$ et $\mathsf{APM} = y$; The velocity with which they increase will be, as PL to PM : that is, the motion by which x increaseth being $\mathsf{PL} = p = 1$, the motion by which y increaseth will bee $\mathsf{PM} = q$[125].

Si je le comprend bien, cet argument n'est que celui qui conduit à la proportion (11.136), et se compose donc des suppositions (i) et (ii) discutées ci-dessus. Si la deuxième de ces suppositions ne demande, à son tour, aucune preuve (une fois qu'on interprète une aire comme un segment), la première mériterait d'être justifiée par un argument supplémentaire que Newton ne fournit guère. Elle dérive certes, comme on vient de l'observer, de l'identification des augmentations du rectangle APLE et du trapézoïde APM à deux rectangles $\mathsf{PP'L'L}$ et $\mathsf{PP'NM}$ de base égale. Mais si la première de ces identifications est triviale, la deuxième demande à son tour à être justifiée. Si Newton garde sur ce point le plus strict des silences, il est clair que cette identification revient à admettre que “en un instant” le segment PM, qui, par sa translation, engendre le trapézoïde APM, translate en restant constant, c'est-à-dire que le trapézoïde $\mathsf{MNM'}$ peut être négligé par rapport au rectangle APM, ce qui rappelle le principe d'omission des infiniment petits d'ordre supérieur. L'argument de Newton se réclame donc d'une présupposition infinitésimaliste essentielle qui reste en tant que telle indépendante de la métaphore mécanique qui donne sens à la notion de vitesse ponctuelle, présupposition que Newton semble vouloir cacher.

Or si on accepte cette présupposition infinitésimaliste ainsi que la supposition (ii), c'est-à-dire qu'on suppose que l'augmentation qo de l'aire y d'un trapézoïde décrit par un segment translatant au long de la direction d'une coordonnée x est proportionnelle à z et égale à $z(po)$, alors on aura d'emblée

$$qo = z\,(po) \tag{11.143}$$

qui équivaut à l'égalité (11.139). La preuve de cette dernière égalité ne demande donc pour l'essentiel aucun recours au rectangle auxiliaire APLE. Si Newton s'en réclame ce n'est que pour mieux cacher cette présupposition infinitésimaliste.

* * *

Après avoir présenté trois exemples très simples relevant de trois équations Algébriques, exprimant la relation entre l'abscisse et l'aire d'une courbe, auxquelles il est aisé de rapporter l'égalité (11.140)[126], Newton termine son traitement du problème 5 par la remarque suivante[127] :

> Note that by this probleme may bee gathered a Catalogue of all those lines which can bee squared. And therefore it will not bee necessary to shew how this Problem may bee resolved in other cases in which q[128] is not applie[d] to x at right angles.

Newton semble supposer qu'une courbe peut être carrée si et seulement si elle peut être référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales x, z, de telle sorte que son

[125]Cf. la note (119), ci-dessus.
[126]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 428.
[127]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 428.
[128]Cf. la note (119), ci-dessus.

ordonnée z puisse être exprimée par une expression Algébrique qu'il soit possible d'écrire sous la forme d'un rapport $-\frac{({}_{\bullet}\mathcal{X})y}{(\mathcal{X}_{\bullet})x}$ référé à une certaine équation Algébrique $F(x, y) = 0$. Or, une courbe est, en tant que telle, indépendante des systèmes de coordonnées auxquels il est possible de la référer, qui, quant à eux, ne concernent que les modalités de sa donation. Il s'ensuit que d'après Newton la propriété d'une courbe d'être carrable se conserve par le changement du système de coordonnées auquel cette courbe est référée. Cette supposition ne possède pourtant un sens précis qu'à la condition de la limiter à des systèmes de coordonnées cartésiennes. Si une courbe est, en tant que telle, indépendante du système de coordonnées auquel elle est référée, il n'en est pas ainsi pour son aire. Cette dernière ne se laisse définir qu'à la condition que la courbe soit référée à un système de coordonnées cartésiennes, et, de surcroît, elle n'est pas invariante par les changements de ce système. Tout ce que Newton peut raisonnablement affirmer est donc que l'aire d'une courbe référée à un certain système de coordonnées cartésiennes peut être exprimée (en termes de l'une de ces coordonnées) par une expression Algébrique si et seulement si l'aire de cette même courbe référée à n'importe quel autre système de coordonnées cartésiennes peut être exprimée de la même manière. Et il n'est pas difficile de vérifier que'il en est effectivement ainsi ; il suffit d'observer que le passage d'un système de coordonnées cartésiennes à un autre n'induit que des transformations linéaires des coordonnées de la courbe donnée. Par la deuxième partie de sa remarque, Newton ne fait donc qu'affirmer implicitement que lorsque l'aire d'un certaine courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales est exprimée (en termes de l'une de ces coordonnées) par une certaine expression Algébrique, alors il est facile d'obtenir l'expression Algébrique exprimant l'aire de cette même courbe référée à un autre système de coordonnées cartésiennes non orthogonales, en opérant sur la première expression des transformations (linéaires) qui conservent la nature Algébrique de cette expression.

La limitation à des courbes référées à des systèmes de coordonnées cartésiennes correspond à la possibilité d'associer de manière non ambiguë une aire à n'importe quelle courbe, en laissant ouverte la possibilité de définir, par des compositions convenables, l'aire de n'importe quelle figure plane délimitée par une ou plusieurs courbes. Elle ne concerne donc que les modalités de solution du problème classique de la quadrature d'une figure plane curviligne et n'a aucune conséquence sur la généralité de la solution proposée pour ce problème. La situation est en revanche bien différente quant à la limitation à des courbes référées à un système de coordonnées cartésiennes, dont l'aire peut être exprimée par une expression Algébrique. La seule raison intrinsèquement géométrique qui peut justifier cette limitation — c'est-à-dire la supposition d'après laquelle seulement une courbe de cette nature peut être carrée — serait son équivalence avec la condition de constructibilité de l'aire cherchée par règle, compas et réitération[129]. Newton ne fait pourtant aucun effort pour démontrer cette équivalence (qui semble d'ailleurs difficile à préciser de manière suffisamment claire pour rendre une démonstration possible). Il semble plutôt se soumettre, sans se poser d'autres questions, aux limites du formalisme Algébrique, ce qu'il n'avait pas fait en revanche pour le problème des tangentes.

[129]Cf. la section 1.4.1, ci-dessus, en particulier p. 44.

Le problème direct des aires

Si on pense une courbe comme la trace d'un mouvement composé, en particulier comme la trace du mouvement du point d'intersection de deux droites qui translatent l'une au long de la direction de l'autre, alors cette courbe se présente d'emblée comme référée à un système de coordonnées cartésiennes x et z dont l'origine coïncide avec un point de la courbe. Il est alors naturel de penser l'origine de ce système de coordonnées comme l'origine du mouvement qui décrit la courbe et d'identifier son aire avec l'aire du triangle curviligne délimité par une portion de celle-ci qui commence à l'origine, une quelconque de ses ordonnées et la portion correspondante de l'axe des abscisses, ce qui correspond à ne se poser d'autre problème que celui de la quadrature de cette courbe entre les limites $x = 0$ et $x = \xi$, où ξ est une valeur quelconque de l'abscisse pour laquelle la courbe est définie.

Si le problème des aires est résolu de manière directe, à partir de la donation de la courbe elle-même, et si l'on suppose que cette courbe est exprimée, par rapport à ce système de coordonnées, par une équation Algébrique, alors il est naturel de ne considérer que des équations Algébriques $F(x, y) = 0$ telles que $F(0, 0) = 0$. Il n'y a donc aucune difficulté à supposer que $x = 0$ est la limite constante de quadrature. En revanche, si le problème est résolu à rebours, à partir d'une expression Algébrique censée exprimer l'aire cherchée, alors cette supposition peut être impossible, car la courbe dont on parvient à déterminer l'aire peut non seulement ne pas passer par l'origine du système de coordonnées cartésiennes choisi, mais aussi ne pas être définie pour $x = 0$. Pour s'assurer qu'il n'en est pas ainsi, il faut en effet avoir déjà résolu le problème. Malgré cela, Newton ne spécifie jamais les limites de quadrature, en parlant génériquement d'aire d'une courbe.

Si on se limite au problème inverse des aires, c'est-à-dire au problème 5, cette ambiguïté n'a pas de conséquences majeures. En effet, l'argument qui conduit à l'égalité (11.139) ne dépend aucunement de la limite constante du trapézoïde d'aire y et s'applique ainsi autant à l'aire du triangle curviligne NmM (fig. 5) qu'à l'aire du trapézoïde QPMN, pourvu qu'on pose respectivement $\mathsf{mM} = z$ et $\mathsf{PM} = z$, quelle que soit la portion de l'axe AH se terminant au point P qu'on identifie avec x. Ceci est pourtant aussi la raison qui fait que l'égalité (11.139) est, en tant que telle, ambiguë lorsqu'elle est lue comme l'expression d'une solution possible du problème direct des aires : l'ordonnée z d'une courbe quelconque référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales étant donnée, trouver l'aire y de cette courbe. Si on en reste à l'argument qui conduit à cette égalité il n'y a aucune manière de spécifier de quelle aire, ou, pour être plus précis, de quel trapézoïde délimité par la courbe dont il est question on est en train de parler. Ainsi, si ce qui est donné est la relation entre l'abscisse x d'une courbe quelconque référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales et l'aire y d'un trapézoïde délimité par cette courbe, alors il suffit de trouver le rapport $\frac{q}{p}$ des vitesses ponctuelles des mouvements de génération de x et y pour résoudre le problème inverse des aires, d'une manière qui est géométriquement parfaitement déterminée. Le segment $z = \frac{q}{p}$ est exactement l'ordonnée de la courbe dont il est question. Au contraire, si ce qui est donné est la relation entre l'abscisse x et l'ordonnée z d'une courbe quelconque référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, et qu'on parvient à partir de la donnée de cette relation à trouver un segment y qui est avec x dans une relation telle que $z = \frac{q}{p}$, alors on n'a pas encore résolu le problème direct des aires d'une manière géométriquement déterminée, car on ne sait pas de quel trapézoïde délimité par la courbe donnée le segment y est l'aire.

Certes, il est aisé pour nous d'éclairer la raison de cette asymétrie et de l'éliminer, en ayant recours, par exemple, à la notion d'intégrale de Cauchy-Riemann. Newton lui même aurait pu faire la même chose, au fond, en se réclamant de son adaptation du théorème de van Heuraet. La question est pourtant qu'en se réclamant de ce théorème pour éclairer la situation, Newton aurait justement montré l'insuffisance de sa théorie de la composition des mouvements et de leurs vitesses ponctuelles pour fournir une solution géométriquement déterminée au problème des aires. Le problème ne concerne pas la possibilité de déterminer correctement celle que nous reconnaissons aujourd'hui comme une constante d'intégration, ou, à rebours, d'indiquer avec précision à quel trapézoïde se réfère l'aire qu'on trouve en supposant *a priori*, comme le fait Newton, que cette constante est nulle. Il s'agit plutôt de comprendre comment ceci peut être fait sans se fonder sur une justification essentiellement extrinsèque à la théorie de la composition des mouvements et de leurs vitesses ponctuelles, à laquelle Newton veut réduire l'ensemble des problèmes géométriques. C'est un problème que Newton n'aborde jamais tel quel.

On peut penser que ce silence vise à ne pas mettre en avant une limite intrinsèque de sa théorie, ou qu'il dépend d'une conception du problème direct des aires dans laquelle ce problème a désormais perdu son originale détermination de problème géométrique. Quelle que soit la cause et quel que soit l'effet, toujours est-il que le problème direct des aires que Newton aborde et résout n'est pas, au sens strict, un problème de géométrie. Il n'est que l'occasion pour permettre à celui-ci de fournir des modèles géométriques — qui restent d'ailleurs indéterminés en tant que tels — pour ses solutions du problème posé par la proposition 8. En mettant l'égalité (11.139) à la place de son adaptation du théorème de van Heuraet et l'argument, apparemment fort simple, qui justifie cette égalité à la place de la preuve plus laborieuse de ce théorème, Newton a certes gagné en élégance et en simplicité, mais il a perdu la transparence géométrique qui caractérise cette preuve. L'impossibilité de fixer de manière précise les limites du trapézoïde dont il est question au sein de la nouvelle théorie de Newton n'est d'ailleurs qu'une conséquence d'une circonstance qui m'apparaît plus profonde. La preuve du théorème de van Heureat, ainsi que les arguments que Wallis avait avancés dans l'*Arithmetica infinitorum*[130], faisaient recours à l'interprétation d'un trapézoïde délimité par une courbe comme une somme infinie de rectangles élémentaires. L'aire de cette figure était ainsi pensée comme la somme des aires de ces rectangles. Au contraire, ce trapézoïde, et en conséquence son aire, interviennent dans le nouvel argument de Newton comme des données géométriques ultimes, des objets géométriques qui se donnent par une figure, sans qu'aucune définition ultérieure n'en précise la nature. En l'absence de cette définition ultérieure (soit-elle explicite ou implicite), il est pourtant difficile de soumettre autant ce trapézoïde que son aire aux besoins d'un calcul ou d'une procédure constructive précise. Pour y parvenir, Newton ne peut se servir que de l'égalité (11.139), qui vient alors fournir une sorte de définition implicite de l'aire d'un trapézoïde délimité par une courbe. L'ambiguïté géométrique de l'argument de Newton tient alors à l'absence d'une définition explicite, propre à exprimer ouvertement la précision, pour ainsi dire, phénoménologique, des objets géométriques représentés par les figure auxquelles Newton se réfère. Encore une fois[131], la métaphore mécanique qui donne sens à la théorie de Newton se révèle insuffisante pour éclairer la nature des objets sur lesquels porte cette

[130]Cf. le chapitre 2.
[131]Cf. la section 9.1, ci-dessus, en particulier pp. 442-9.1

théorie. Pourtant, l'ambiguïté ne concerne pas cette fois les vitesses ponctuelles qui, aussi essentielles qu'elles peuvent être dans l'ensemble de la théorie, ne se présentent, pour ce qui des applications géométriques de cette théorie, que comme des objets auxiliaires servant à trouver des solutions, sans comparaître dans celles-ci. Elle concerne des objets géométriques, tels que les aires des trapézoïdes délimités par des courbes, que cette théorie se propose d'étudier. Ce qui est en cause est donc d'emblée, comme je l'ai dit ci-dessus, la nature géométrique de cette théorie.

* * *

Après cette prémisse générale, il sera plus aisé de comprendre la manière dans laquelle Newton aborde et, dans certains cas résout, le problème direct des aires, autant dans sa forme explicite — une courbe étant donnée, en chercher l'aire — que dans sa forme implicite : une courbe étant donnée, en trouver une autre dont l'aire a avec l'aire de la courbe donnée une relation quelconque établie *a priori*. Ce sont respectivement les problèmes 7 et 6.

Le problème direct des aires dans sa forme implicite : une méthode de substitution En respectant l'ordre de Newton, considérons d'abord le problème 6. Pour le résoudre, il s'agit de mettre au point une procédure de substitution permettant de déterminer une courbe dont l'aire a avec l'aire d'une courbe donnée une certaine relation fixée à l'avance, sans se réclamer de la détermination préalable de ces aires.

Newton avait déjà su établir une procédure de la sorte une année auparavant[132], limitativement au cas où : la courbe donnée est référée à un système de coordonnées cartésiennes, implicitement prises comme orthogonales, et est exprimée, par rapport à ce système de coordonnées, par une équation Algébrique entière ; la relation entre les aires des deux courbes est une relation d'égalité ; et la deuxième courbe est censée être référée, comme la première, à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par rapport auquel elle se laisse exprimer par une équation Algébrique. La détermination de cette équation constituait la solution du problème. Newton n'avait pas justifié cette procédure de manière explicite, et il ne l'avait même pas exposée de manière générale, en se limitant à l'appliquer pour rédiger une table de courbes d'aires égales. Il est pourtant fort probable qu'il l'eût déduit de son adaptation du théorème de van Heuraet. Bien qu'il n'eût pas explicité les limites auxquelles sont référées les aires concernées par cette procédure, la référence implicite à ce théorème semble garantir la possibilité de les fixer sans aucune ambiguïté.

En abordant le problème 6 du *Traité d'octobre 1666*, Newton suppose, comme une année auparavant, que les deux courbes sont référées à des système de coordonnées cartésiennes orthogonales et que la première d'entre elles est exprimée, par rapport à ce système, par une équation Algébrique entière. Il concède en revanche que la relation entre les aires des deux courbes puisse être exprimée par une équation Algébrique entière quelconque. Il s'agit, si possible, de déterminer une équation Algébrique exprimant la deuxième courbe, par rapport au système de coordonnées auquel elle est référée. Cette fois, Newton expose sa procédure en général, et la justifie explicitement à partir de l'égalité (11.139), plutôt qu'à partir de son adaptation du théorème de van Heuraet. Cette justification ne permet pas de fixer les limites auxquelles sont référées les aires dont il est question. Comme celle qui, une année

[132] Cf. la section 7.2.1, ci-dessus.

auparavant, lui avait permis de rédiger sa table d'aires égales, la nouvelle procédure se réduit à un algorithme conduisant de la donnée de trois équations Algébriques entières — l'équation de la courbe donnée, celle qui exprime la relation entre l'abscisse de cette courbe et l'abscisse de la courbe cherchée, et celle qui exprime la relation entre les aires de ces courbes — à la détermination d'une nouvelle équation Algébrique entière exprimant la courbe cherchée. Mais à la différence de la première, cette nouvelle procédure est telle qu'il est impossible de lui assigner une signification géométrique précise ne se réclamant que des raison qui la justifient : les aires sur lesquelles elle porte ne se comportent pas comme des objets géométriques parfaitement déterminés. Pour que cette procédure parvienne à son but, il faut de surcroît, comme on le verra, que certaines conditions particulières, relatives à la nature des trois équations données, soient respectées, ce qui revient en fait à limiter son apparente généralité.

* * *

Pour exposer cette procédure, supposons donnée une courbe AM (fig. 6) référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales dont l'origine A appartient à cette courbe, et posons AP $= x$ et PM $= z$. Supposons aussi qu'un segment OQ $= w$ est donné, et qu'il est lié à l'abscisse AP de la courbe AM par une relation connue. Il s'agit d'appliquer orthogonalement à ce segment une ordonnée QN $= v$, telle que l'aire du trapézoïde OQN délimité par la courbe ON soit avec l'aire du trapézoïde APM délimité par la courbe AM dans une relation fixée au préalable. Si y et $\bar{y}$ sont respectivement les aires des trapézoïdes APM et OQN (c'est-à-dire des courbes AM et ON), on aura, conformément à l'égalité (11.139),

$$q = zp \qquad ; \qquad \bar{q} = vt \tag{11.144}$$

p, q, t et $\bar{q}$ étant respectivement les vitesses ponctuelles des mouvements de génération de x, y, w et $\bar{y}$. Supposons que la relation qui est censée avoir lieu entre les aires y et $\bar{y}$ est exprimée par une équation Algébrique entière $\Lambda(y, \bar{y}) = 0$. Il suffit d'appliquer l'algorithme énoncé par la proposition 7 pour tirer de là l'égalité

$$vt = [\Theta(y, \bar{y})]\, zp \tag{11.145}$$

où $\Theta(y, \bar{y}) = \frac{\bar{q}}{q}$ est une expression Algébrique en y et $\bar{y}$ qu'il est facile de déterminer. Si la relation liant x et w est exprimée, elle aussi, par une équation Algébrique entière $\Phi(x, w) = 0$, alors il est aisé de tirer de la même manière l'autre égalité

$$t = [\Psi(x, w)]\, p \tag{11.146}$$

où $\Psi(x, w) = \frac{t}{p}$ est une expression Algébrique en x et w qu'il est aussi facile de déterminer. Si la courbe AM est enfin exprimée à son tour, par rapport aux coordonnées cartésiennes orthogonales x et z, par une équation algébrique entière $F(x, z) = 0$, on a alors le système

$$\begin{cases} \Lambda(y, \bar{y}) = 0 \\ \Phi(x, w) = 0 \\ F(x, z) = 0 \\ vt = [\Theta(y, \bar{y})]\, zp \\ t = [\Psi(x, w)]\, p \end{cases} \tag{11.147}$$

d'où il s'agit d'éliminer les variables x, y, z, $\bar{y}$, p et t pour obtenir une équation $\mathcal{F}(w,v)=0$, en w et v, qui exprime la courbe ON.

Il est clair que cette élimination n'est pourtant pas toujours possible, et même qu'elle n'est possible que sous des conditions fort particulières propres à la nature particulière des équations $\Lambda(y,\bar{y})=0$ et $\Phi(x,w)=0$. Newton ne note pas ceci, et se limite à présenter quatre exemples[133].

Supposons d'abord que l'équation $\Lambda(y,\bar{y})=0$ se réduit à l'équation linéaire $\bar{y}=Ky$, c'est-à-dire que les aires des deux courbes sont censées être proportionnelles. Dans ce cas, le système (11.147) se réduit au suivant

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(x,w)&=0\\ F(x,z)&=0\\ Kz&=[\Psi(x,w)]\,v \end{aligned}\right. \tag{11.148}$$

d'où il ne s'agit que d'éliminer les variables x et z. Si on parvient à expliciter la première équation de ce système, c'est-à-dire qu'on la réduit à une équation de la forme $x=\phi^{-1}(w)$, et qu'en partant de cette équation l'on parvient à exprimer le rapport $\frac{t}{p}=\Psi(x,w)$ par une expression Algébrique $\psi(\phi^{-1}(w))$, contenant la seule variable w, alors la deuxième équation se réduit à :

$$F\left(\phi^{-1}(w),\frac{v}{K}\psi(\phi^{-1}(w))\right)=\mathcal{F}(w,v)=0 \tag{11.149}$$

qui est l'équation cherchée. Si l'équation $F(x,z)=0$ peut de surcroît être mise sous la forme $z=f(x)$, on aura :

$$v=K\frac{f(\phi^{-1}(w))}{\psi(\phi^{-1}(w))} \tag{11.150}$$

d'où il suffit de poser $K=1$ pour obtenir l'égalité (7.43).

La procédure mise au point durant l'automne 1665 n'est donc, en termes algorithmiques, qu'un cas particulier de la nouvelle procédure. C'est ce que Newton montre dans son premier exemple, dans lequel il suppose justement que $\bar{y}=y$, que la courbe donnée est exprimée par l'équation $ax+bx^2=z^2$, et que les variables x et w sont liées par la relation $x=w^2$, ce qui donne, évidemment,

$$\begin{gathered} \mathcal{F}(w,v)=4aw^4+4bw^6-v^2=0\\ \text{c'est-à-dire}\\ v=2w^2\sqrt{a+bw^2} \end{gathered} \tag{11.151}$$

Ceci n'est pourtant pas le seul cas où le système (11.147) fournit l'équation $\mathcal{F}(w,v)=0$ cherchée. Pour avoir un autre cas, supposons que l'équation $\Lambda(y,\bar{y})=0$ se réduit à l'équation $\bar{y}=Ky+H\,[\theta(x)]$, où $\theta(x)$ est une expression Algébrique en x. Le système (11.147) se réduit alors au système

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(x,w)&=0\\ F(x,z)&=0\\ v\Psi(x,w)&=Kz+H\vartheta(x) \end{aligned}\right. \tag{11.152}$$

[133] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 429-430.

où $\vartheta(x) = \frac{\bar{p}}{p}$, $\bar{p}$ étant la vitesse ponctuelle du mouvement de génération du segment auxiliaire $\bar{x} = \theta(x)$. Ce système ayant été obtenu, il ne s'agit, à nouveau, que d'éliminer les variables x et z. Encore une fois, si la première équation de ce système peut être mise sous la forme $x = \phi^{-1}(w)$, et qu'en partant de cette équation l'on parvient à exprimer le rapport $\frac{t}{p} = \Psi(x, w)$ par une expression Algébrique $\psi(\phi^{-1}(w))$, contenant la seule variable w, alors la deuxième équation se réduit à :

$$F\left(\phi^{-1}(w), \frac{v\psi(\phi^{-1}(w)) - H\vartheta(x)}{K}\right) = \digamma(w, v) = 0 \tag{11.153}$$

qui est l'équation cherchée.

Ce cas est celui du deuxième exemple de Newton, dans lequel celui-ci suppose que $\bar{y} = ay + bx$ et qu'à nouveau la courbe donnée est exprimée par l'équation $ax + bx^2 = z^2$ et les variables x et w sont liées par la relation $x = w^2$, ce qui donne :

$$\begin{gathered} \digamma(w, v) = v^2 - (4bw)\,v + 4b^2w^2 - 4a^3w^4 - 4a^2bw^6 = 0 \\ \text{c'est-à-dire} \\ v = 2bw + 2aw^2\sqrt{a + bw^2} \end{gathered} \tag{11.154}$$

La situation est parfaitement analogue si la relation entre $\bar{y}$ et y est exprimée par une équation telle que $\bar{y} = Ky + H\,[\theta(w)]$, où $\theta(w)$ est une expression Algébrique en w. En effet, le système (11.147) se réduit alors au système

$$\left\{ \begin{array}{c} \Phi(x, w) = 0 \\ F(x, z) = 0 \\ v\Psi(x, w) = Kz + H\vartheta(w)\Psi(x, w) \end{array} \right. \tag{11.155}$$

où $\vartheta(w) = \frac{\bar{t}}{t}$, $\bar{t}$ étant la vitesse ponctuelle du mouvement de génération du segment auxiliaire $\bar{w} = \theta(w)$. Il ne reste alors, comme ci-dessus, qu'à éliminer de ce système les variables x et z. Si la première équation peut être mise sous la forme $x = \phi^{-1}(w)$, et qu'en partant de cette équation l'on parvient à exprimer le rapport $\frac{t}{p} = \Psi(x, w)$ par une expression Algébrique $\psi(\phi^{-1}(w))$, contenant la seule variable w, on aura alors

$$F\left(\phi^{-1}(w), \frac{v\psi(\phi^{-1}(w)) - H\vartheta(w)\psi(\phi^{-1}(w))}{K}\right) = \digamma(w, v) = 0 \tag{11.156}$$

qui est l'équation cherchée.

Ce cas est celui du troisième exemple de Newton, dans lequel celui-ci suppose que $\bar{y} = \frac{2c}{a}\sqrt{aw + w^2} - y$, que la courbe donnée est exprimée par l'équation $z = \frac{4c}{a}\sqrt{x^2 - a}$, et que les variables x et w sont liées par la relation $w = x^2 - a$, ce qui donne :

$$\begin{gathered} \digamma(w, v) = v\sqrt{w^2 + aw} - c = 0 \\ \text{c'est-à-dire} \\ v = \frac{c}{\sqrt{w^2 + aw}} \end{gathered} \tag{11.157}$$

* * *

J'ai longuement insisté ci-dessus sur l'impossibilité de fournir une caractérisation précise des aires sur lesquelles portent les problèmes 5, 6 et 7, au sein de la nouvelle théorie de Newton. Si on fait confiance à la figure 6, qui reproduit celle de Newton, il semblerait que les aires y et $\bar{y}$ devraient être celles de deux triangles curvilignes délimités par les courbes d'équation $F(x, z) = 0$ et $F(w, v) = 0$, qui s'étendent, l'une et l'autre, de l'origine, où les ordonnées z et v semblent devoir s'annuler, jusqu'à une ordonnée quelconque. Il suffit pourtant de considérer le troisième exemple pour comprendre que ceci ne peut être le cas général. En effet, la courbe d'équation $z = \frac{4c}{a}\sqrt{x^2 - a}$ ne passe pas par l'origine des coordonnées x et z — où elle n'est d'ailleurs définie qu'à condition que a soit une grandeur négative — et l'abscisse w ne s'annule pas lorsque x s'annule. J'ai déjà observé que Newton n'a pas d'autre manière pour fixer la signification géométrique de y et de $\bar{y}$ que de se réclamer de ses figures. Le choix de ce troisième exemple semble ainsi confirmer que Newton n'a pas d'intérêt pour la nature géométrique du problème 6. Il semble plutôt se livrer à un pur exercice algorithmique.

* * *

Il est aisé de vérifier que la solution d'un tel exercice n'est possible que sous des conditions bien particulières concernant la nature des équations considérées. Pourtant, ce n'est pas parce que ces conditions ne sont pas respectées que le problème 6, pensé comme un problème géométrique, ne peut pas être résolu. Se pose donc la question de comprendre ce qui signifie, en termes géométriques, que du système (11.147) il ne soit pas possible de tirer une équation Algébrique en les variables w et v.

Newton laisse à un court exemple la tâche de répondre (implicitement) à cette question. C'est le quatrième et dernier exemple du problème 6. Dans cet exemple, la courbe donnée est exprimée à nouveau par l'équation $z^2 = ax + bx^2$, tandis que les variables x et w sont liées, encore une fois, par la relation $x = w^2$. La relation entre les aires y et $\bar{y}$ est en revanche exprimée par une équation Algébrique de deuxième degré, $\bar{y} = y^2$. Le système (11.147) se réduit alors au système

$$\left\{\begin{array}{c} x = w^2 \\ z^2 = ax + bx^2 \\ v = 4wyz \end{array}\right. \tag{11.158}$$

qui donne tout au plus l'équation

$$v = 4w^2y\sqrt{a + bw^2} \tag{11.159}$$

où la variable y n'est pas éliminée. Or, selon les données du problème, y est l'aire de la courbe d'équation $z = \sqrt{ax + bx^2}$. En anticipant implicitement sa solution du problème 7 — dans laquelle il identifiera l'aire d'une courbe d'ordonnée $z = f(x)$ avec la primitive de $f(x)$ — , Newton en conclut que dans ce cas la courbe cherchée est mécanique et ne peut donc pas être "trouvée géométriquement"[134].

Newton semble donc penser que l'impossibilité d'éliminer la variable y du système (11.147) indique l'impossibilité de déterminer la courbe cherchée, sans déterminer au

[134] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 430.

préalable l'aire de la courbe donnée. Si cette aire peut être déterminée et exprimée par une une expression Algébrique en x, disons $g(x)$, alors l'équation $\Lambda(y, \bar{y}) = 0$ se transforme en une équation Algébrique en x et $\bar{y}$, $\Lambda(g(x), \bar{y}) = 0$. En comparant cette équation avec l'équation $\Phi(x, w) = 0$, on obtient une nouvelle équation Algébrique en w et $\bar{y}$. Si cette équation peut être mise sous la forme $\bar{y} = \theta(w)$, où $\theta(w)$ est une expression Algébrique en w, et que de là on tire l'égalité $\bar{q} = \vartheta(w)t$, alors le problème 6 se réduit au problème 5, et sa solution est donc donnée par l'équation $v = \vartheta(w)$. Si, en revanche, l'aire de la courbe donnée ne peut pas être exprimée par une expression Algébrique en x, et que la variable y ne peut pas être éliminée du système (11.147), alors la relation entre w et v ne peut pas être exprimée par une équation Algébrique.

La considération du quatrième exemple clôt le traitement du problème 6. Newton n'évoque guère la possibilité que les courbes sur lesquelles porte ce problème ne soient pas référées à des coordonnées cartésiennes, ou que la première d'entre elles ne soit pas exprimée par une équation Algébrique. Ce silence est un indice ultérieur du désintéressement de Newton envers la nature intrinsèquement géométrique du problème des aires.

Le problème direct des aires dans sa forme explicite Si une courbe est donnée, par rapport à un système de coordonnée cartésiennes orthogonales, par une équation Algébrique de la forme $z = f(x)$, alors l'égalité (11.139) indique d'emblée comment le problème direct des aires peut être résolu, car pour trouver l'aire y d'une telle courbe il suffit alors de poser $f(x) = \frac{q}{p}$ et de chercher la primitive de cette expression à l'aide des méthodes exposées par la proposition 8. C'est tout ce que Newton observe après avoir énoncé le problème 7 et avant de fournir deux exemples. Il semble donc identifier de manière explicite l'aire d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes (que par commodité il suppose être orthogonales) avec la primitive de son ordonnée — où, comme c'est le cas dans la proposition 8, on suppose que la constante qui est éliminée lorsqu'on passe de cette primitive au rapport $\frac{q}{p}$ correspondant est nulle —, du moins lorsque cette ordonnée est exprimée par une expression Algébrique. Formellement, Newton avait fait la même chose dès ses premières recherches à propos du problème des aires. Pourtant, la référence, explicite ou implicite, au théorème de van Heureat ou aux méthodes de quadrature de Wallis, permettait d'assigner à celle qui nous apparaît comme une primitive une signification géométrique précise. Loin de réduire une aire à une primitive, Newton n'avait dans ces occasions considéré que des aires référées à des limites qui tout en restant implicites, auraient pu être précisées sans aucune difficulté. Comme on l'a déjà observé maintes fois, la substitution de l'égalité (11.139) au théorème de van Heureat change radicalement la situation. Les aires dont traite Newton ne sont plus que des primitives auxquelles il est impossible d'assigner une signification géométrique précise, se réclamant de cette seule égalité et des raisons qui la justifient. Si pour des raisons de clarté j'ai observé ceci dès le début de mon exposition des solutions que Newton présente pour les problèmes 5, 6 et 7 , la considération des deux exemples qu'il présente pour le dernier de ces problèmes[135] servira à éclairer ultérieurement l'attitude de ce dernier.

Dans le premier de ces exemples, Newton se réfère explicitement à une figure analogue à la figure 4 (où les ordonnées $\mathsf{P'M'}$ et $\mathsf{L'P'}$ ne sont pas tracées) pour assigner un sens géométrique aux variables qu'il considère ; il identifie l'aire y avec l'aire du triangle curviligne

[135] Cf. Newton (MP), I, **7**, [2], 430-432.

APM, et il pose $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{PM} = z = \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$. De là, en se réclamant de la table donnée lors de la proposition 8 qui présente l'implication[136]

$$\frac{q}{p} = \frac{cx^n}{x\sqrt{a+bx^n}} \Rightarrow y = \frac{2c}{nb}\sqrt{a+bx^n} \tag{11.160}$$

et en opérant les substitutions $c \to a$, $a \to a^2$, $b \to -1$, $n \to 2$, il conclut que y est égal à $-a\sqrt{a^2-x^2}$.

Or, il est facile de voir que la courbe d'équation $z = \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$ est une quadrique passant en l'origine avec deux asymptotes verticales d'équation $x = \pm a$. Si on suppose que a est positif (la situation est analogue si a est négatif) et qu'on distingue entre l'abscisse x et une valeur ξ de celle-ci, telle que $0 < \xi < a$, l'aire du trapézoïde délimité par une telle courbe, pris entre les limites $x = 0$ et $x = \xi$, est alors donnée par l'intégrale définie

$$\int_0^\xi \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = a^2 - a\sqrt{a^2-\xi^2} \tag{11.161}$$

Pris comme l'expression d'une aire géométriquement déterminé, le résultat donnée par Newton correspond, en revanche, à l'intégrale définie

$$\int_a^\xi \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\int_\xi^a \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -a\sqrt{a^2-\xi^2} \tag{11.162}$$

de sorte que $y = -a\sqrt{a^2-x^2}$ ne peut être que l'aire d'un trapézoïde $\mathsf{PP'M'M}$ (fig. 7), en supposant que $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{AP'} = a$ et donc : $\mathsf{PM} = \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$ et $\mathsf{P'M'} = \frac{a^2}{0} = \infty$. En posant $\mathsf{PP'} = w = a-x$, ce trapézoïde résulte alors être décrit par le segment $\mathsf{P'M'} = v = \frac{a(a-w)}{\sqrt{2aw-w^2}}$ au cours de sa translation au long de l'axe AH, de P′ vers P. C'est en passant à la primitive de cette expression, qu'on aura, en accord avec la proposition 8[137] :

$$y = -\square\frac{a(a-\xi)}{\sqrt{2a\xi-\xi^2}} = -a\sqrt{2a\xi-\xi^2} = -a\sqrt{a^2-x^2} \tag{11.163}$$

(où le signe moins est du à l'inversion de la direction de translation du segment P′M′).

S'il est donc clair qu'il est possible de donner une interprétation géométrique précise du résultat de Newton, et qu'il y a même manière de déduire ce résultat, ainsi interprété, conformément à la méthode générale prospectée par Newton, il reste le fait que cette méthode, prise à elle seule, ne permet pas de déterminer cette interprétation. Pour faire ceci, il faut d'abord trouver la primitive de z, conformément à la proposition 8, et ensuite choisir comme limite constante du trapézoïde d'aire y la valeur de x qui annule cette primitive. Or le point n'est pas seulement que cette procédure ne peut qu'intervenir après avoir trouvé, en suivant la méthode de Newton, le résultat qu'il s'agit d'interpréter géométriquement (c'est-à-dire que cette méthode fournit une réponse à une question qui peut être précisée

[136]Cf. la première section de l'annexe qui clôt le présent chapitre, entrée 2, pour $k = 1$, p. 594.

[137]La primitive de $\frac{a(a-x)}{\sqrt{2ax-x^2}}$ n'est pas donnée par la table de primitives écrite par Newton lors de la proposition 8. Elle se trouve pourtant très aisément en appliquant la méthode qui conduit aux primitives présentées dans la première section de l'annexe qui clôt le présent chapitre.

seulement après que cette réponse ait été donnée), mais surtout qu'elle n'est nullement justifiée par l'argument qui conduit à l'égalité (11.139). Dans cet argument, la valeur qui annule la primitive de z ne joue en fait aucun rôle particulier.

Le deuxième exemple présenté par Newton[138] est, si possible, encore plus parlant. En se référant encore, dans un premier temps, à une figure analogue à la figure 4, Newton pose $\mathsf{PM} = z = \sqrt{\frac{x^3}{a}} - \frac{e^2 b}{x\sqrt{ax-x^2}}$. Il veut évidemment montrer, par cet exemple, la linéarité de l'opérateur dont relève la proposition 8, conçu comme un opérateur portant de l'ordonnée d'une courbe à l'aire de cette même courbe. En se réclamant de la proposition 8, il trouve d'abord séparément les primitives $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x^5}{a}}$ et $-\frac{2e^2 b}{ax}\sqrt{ax-x^2}$ des expressions $\sqrt{\frac{x^3}{a}}$ et $\frac{e^2 b}{x\sqrt{ax-x^2}}$[139]. Il considère ensuite une nouvelle figure, telle que la figure 8, et il pose $\mathsf{AP} = x$, $\mathsf{PM'} = \sqrt{\frac{x^3}{a}}$ et $\mathsf{MM'} = \frac{e^2 b}{x\sqrt{ax-x^2}}$, de sorte que $\mathsf{PM} = z\sqrt{\frac{x^3}{a}} - \frac{e^2 b}{x\sqrt{ax-x^2}}$. Et il en conclut que $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x^5}{a}}$ est l'aire du triangle curviligne $\mathsf{APM'}$, et que $-\frac{2e^2 b}{ax}\sqrt{ax-x^2}$ est l'aire du triangle doublement curviligne $\mathsf{MNM'}$[140].

Or, il est clair que la figure 8 ne peut pas illustrer précisément le problème dont relève ce deuxième exemple, car l'ordonnée $\mathsf{MM'} = \frac{e^2 b}{x\sqrt{ax-x^2}}$ ne s'annule pour aucun x réel. Une figure plus convenable aurait du être la figure 8 bis[141]. Ceci n'est pourtant pas essentiel. Ce qui est essentiel est plutôt que ni la figure 8, ni la figure 8bis ne peuvent, à elles seules, fournir une signification géométrique précise pour la variable y, car la translation qui décrive le triangle curviligne $\mathsf{MNM'}$ ou le trapézoïde $\mathsf{MNN'M'}$ commence lorsque la translation décrivant le triangle curviligne $\mathsf{APM'}$ se termine. Pour préciser la signification géométrique de son exemple Newton suppose ainsi que le segment x est pris d'abord égal à $\mathsf{AP} = r$[142]

[138] Cf. Newton (MP), I, **7**, [2], 430-432.

[139] La première de ces primitives est immédiate conformément à la première des règles (11.16). Pour la deuxième, cf. la première section de l'annexe qui clôt le présent chapitre, entrée 2, p. 594, pour $c = e^2 b$, $a = -1$, $b = a$, $n = -1$ et $k = 1$.

[140] En termes modernes, on aura évidemment :

$$\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x^5}{a}} = \int_0^x \sqrt{\frac{x^3}{a}}dx$$

et

$$-\frac{2e^2 b}{ax}\sqrt{ax-x^2} = \int_x^a \frac{e^2 b}{x\sqrt{ax-x^2}}$$

Qu'on observe, en passant, que, pour conclure que l'aire du triangle doublement curviligne $\mathsf{MNM'}$, décrite par la translation de $\mathsf{MM'}$, équivaut à l'aire d'un triangle simplement curviligne décrit par une ordonnée qui translate le long de la direction d'une droite, Newton a besoin de se réclamer subrepticement d'un argument classiquement indivisibiliste, d'après lequel l'aire d'une figure curviligne est égale à la somme des aires d'une infinité de rectangles indivisibles. Pour parvenir à la même conclusion en s'appuyant sur l'argument qui conduit à l'égalité (11.139) il faudrait en effet généraliser cet argument au cas de coordonnées non orthogonales, ce que Newton veut en revanche éviter.

[141] L'imprécision de Newton est symptomatique, car Newton représente sur sa figure le trapézoïde d'aire $\frac{2e^2 b}{ax}\sqrt{ax-x^2}$ comme un trapézoïde décrit par la translation d'une ordonnée qui s'annule à l'origine de cette translation. Comme on l'a vu, cette condition n'est pourtant pas essentielle pour la validité de son argument qui demande plutôt que ce soit la variable exprimant cette aire qui s'annuler en cette origine, ce qui est évidemment le cas si cette dernière est placée au point $x = a$. La figure 5bis illustre donc correctement l'exemple de Newton, pourvu qu'on pose $\mathsf{AQ} = a$.

[142] Ici le point doit évidemment être conçu comme étant fixe P sur l'axe des abscisses.

et ensuite égale à $\mathsf{Ap} = s$. On aura alors

$$\begin{aligned}
&Aire(\mathsf{APM'}) = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{r^5}{a}} \quad ; \quad Aire(\mathsf{MN[N']M'}) = -\frac{2e^2b}{ar}\sqrt{ar-r^2} \\
&Aire(\mathsf{Apm'}) = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{s^5}{a}} \quad ; \quad Aire(\mathsf{mN[N']m'}) = -\frac{2e^2b}{as}\sqrt{as-s^2}
\end{aligned} \tag{11.164}$$

et donc

$$\begin{aligned}
Aire(\mathsf{Ppm'M'}) &= \frac{2}{5\sqrt{a}}\left(\sqrt{s^5}-\sqrt{r^5}\right) \\
Aire(\mathsf{Mmm'M'}) &= \frac{2e^2b}{a}\left(\frac{\sqrt{ar-r^2}}{r}-\frac{\sqrt{as-s^2}}{s}\right)
\end{aligned} \tag{11.165}$$

d'où il s'ensuit :

$$Aire(\mathsf{PpmM}) = \frac{2}{5\sqrt{a}}\left(\sqrt{s^5}-\sqrt{r^5}\right) + \frac{2e^2b}{a}\left(\frac{\sqrt{as-s^2}}{s}-\frac{\sqrt{ar-r^2}}{r}\right) \tag{11.166}$$

que Newton identifie avec l'aire cherchée.

Il n'est pas difficile de traduire cet argument dans le formalisme qui nous est habituel :

$$\begin{aligned}
\int_r^s \left(\sqrt{\frac{x^3}{a}} - \frac{e^2b}{x\sqrt{ax-x^2}}\right)dx &= \int_r^s \sqrt{\frac{x^3}{a}}dx - \int_r^s \frac{e^2b}{x\sqrt{ax-x^2}}dx \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \int_0^s \sqrt{\frac{x^3}{a}}dx - \int_0^r \sqrt{\frac{x^3}{a}}dx \\ -\int_a^r \frac{e^2b}{x\sqrt{ax-x^2}}dx - \int_a^s \frac{e^2b}{x\sqrt{ax-x^2}}dx \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{l} = \frac{2}{5\sqrt{a}}\left(\sqrt{s^5}-\sqrt{r^5}\right) \\ +\frac{2e^2b}{a}\left(\frac{\sqrt{as-s^2}}{s}-\frac{\sqrt{ar-r^2}}{r}\right) \end{array} \right.
\end{aligned} \tag{11.167}$$

Cet argument fournit pourtant, encore une fois, une réponse à une question qui a été précisée seulement après que cette réponse ait été donnée. Il n'est de surcroît guère justifié par l'argument qui conduit à l'égalité (11.139). Cela me semble confirmer une fois de plus mon jugement : malgré son élégance, sa simplicité et sa grande généralité, l'argument qui fonde la théorie des aires que Newton présente dans le *Traité d'octobre 1666*, n'est pas suffisant à faire de celle-ci une théorie géométriquement univoque ; cette théorie n'est donc géométriquement convenable que si elle est accompagnée d'autres arguments de nature essentiellement distincte (que Newton aurait pu tirer de son adaptation du théorème de van Heureat). À la différence de la théorie des tangentes, la théorie des aires se présente d'ailleurs dans ce traité plus comme une interprétation géométrique — qu'on a vu ne pouvoir être univoque — d'une procédure algorithmique, que comme une théorie intrinsèquement géométrique, fondée sur une notion d'aire géométriquement précise. Aucune notion analogue à la notion moderne d'intégrale définie ne semble donc trouver sa place dans l'horizon mathématique fixé par le *Traité d'octobre 1666*.

11.2.4 Le problème des rectifications

Le quatrième et dernier groupe de problèmes géométriques abordés dans le *Traité d'octobre 1666* concerne la rectification d'une courbe. D'abord, Newton montre comment il est possible de construire, à partir d'une courbe donnée, une autre courbe qu'il est possible de rectifier grâce à la connaissance du rayon de courbure de la courbe donnée ; il caractérise de cette manière une classe de courbes rectifiables ; c'est le problème 9[143]. En supposant, de même, qu'une courbe est donnée, il cherche ensuite à déterminer une autre courbe dont la longueur ait, avec l'aire ou la longueur de la courbe donnée, une certaine relation ; c'est le problème 10[144]. Le problème 11 apparaît comme similaire au problème 10 (bien que Newton le résolve, comme on le verra, de manière complètement indépendante) : en supposant qu'une courbe est donnée, il s'agit de déterminer une autre courbe dont l'aire soit égale à la longueur de cette courbe, ou ait avec cette longueur une relation établie au préalable[145]. Finalement, Newton aborde les problèmes direct et inverse des rectifications dans leur forme classique : une courbe étant donnée, en trouver la longueur ; et, *viceversa*, déterminer la "nature" d'une courbe dont la longueur est connue ; ce sont respectivement les problèmes 12[146] et 13[147].

Pour des raisons qui deviendront claires au cours de l'exposition des solutions que Newton propose pour ces problèmes, il convient de distinguer cet ensemble de problèmes en deux groupes : d'un côté les problèmes 9 et 10, dont la solution fait intervenir la développée d'une courbe donnée ; et les problèmes 11, 12 et 13, de l'autre côté. Je commencerai par les deux premiers problèmes.

La rectification de la développée d'une courbe donnée

La solution du problème 9 tient à la reprise et à la clarification d'un argument que Newton avait déjà esquissé dans une note rédigée au mois de mai 1665[148]. Newton formule cet argument en se servant de trois lemmes[149] qu'on peut reformuler ainsi :

i) si on associe au mouvement d'un point M (fig 9) qui décrit une courbe quelconque AMN le mouvement de la normale MG à cette courbe, prise en ce point, et qu'on prend sur cette normale un point quelconque s dont la distance au point M reste fixe au cours de ce mouvement, alors ce point s décrit à son tour une courbe usw parallèle à la courbe AMN — c'est-à-dire que le segment Ms n'est pas seulement constant, comme le veut

[143] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 432-434. Dans le manuscrit de Newton n'apparaît aucun problème 8. Là où on attendrait un tel problème, on trouve en revanche un espace blanc : cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note (113), 432.
[144] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 434-440.
[145] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2].
[146] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 440-441.
[147] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 441.
[148] Cf. la section 5.4, en particulier pp. 5.4-5.4.
[149] Cf. Newton (MP), I, **7**, [2], 433.

l'hypothèse, mais qu'il est aussi constamment perpendiculaire autant à la courbe AMN qu'à la courbe usw ;

ii) si la courbe AMN n'est pas un arc de cercle, il est toujours possible de tracer une autre courbe cCU (la même pour tout point M pris sur la courbe donnée) à laquelle la droite mobile MG soit constamment tangente au point C où elle rencontre cette droite (ce point étant conçu comme mobile autant sur la droite MG, que sur la courbe cCU), de telle sorte que toutes les courbes usw relatives à tous les points s qu'on peut prendre sur la droite mobile MG sont constamment perpendiculaires à cette nouvelle courbe aux points u où elles la rencontrent (il est clair que si s est pris comme coïncidant avec C, alors les point u coïncide lui aussi avec ces deux points) ;

iii) quel que soit le point s fixe sur la droite MG, ce point résulte ainsi associé (ou "appliqué", comme le dit Newton), grâce à la courbe usw qui passe par ce point, au point u de la courbe cCU où cette dernière courbe rencontre la courbe usw, et comme la courbe usw est perpendiculaire autant à la droite MG, au point s, qu'à la courbe cCU,au point u, il s'ensuit que la droite MG "ne glisse pas sur" la courbe cCU, et donc que "les parties correspondantes de ces lignes"— c'est-à-dire les portions $u'u''$ et $s's''$, comprises entre deux points correspondants de ces courbes — sont égales entre elles.

Il est facile de voir que dans l'énoncé de ces lemmes apparaissent des propositions qu'il faut démontrer et d'autres qui ne font que décrire des constructions qu'il est aisé de reconnaître comme étant possibles, quelle que soit la courbe AMN. Les propositions qu'il faut démontrer sont les suivantes :

i') si le segment Ms est constant, alors il est constamment perpendiculaire à la courbe usw qu'il décrit ;

ii') si la courbe AMN n'est pas un arc de cercle, alors il existe (c'est-à-dire qu'il est possible de construire[150]) une courbe qui possède les propriétés de la courbe cCU, à savoir qu'aux points C et u, où cette courbe rencontre respectivement la droite MG et une quelconque des courbes usw, elle soit tangente à cette droite et normale à cette courbe ;

iii') si la courbe usw est normale autant à la droite MG, au point s, qu'à la courbe cCU , au point u, alors la droite MG "ne glisse pas sur" la courbe cCU, et "les parties correspondantes de ces lignes" sont donc égales entre elles.

Au cours d'une remarque qu'il fait suivre — au titre de "résolution"[151] — à ses trois lemmes, Newton se limite pourtant à observer que la courbe décrite par les centres de courbure de la courbe AMN (c'est-à-dire le lieu géométrique de ces centres) possède les propriétés que la courbe cCU est censée posséder, car le centre de courbure relatif à n'importe quel point de n'importe quelle courbe est le centre de rotation instantanée de la normale à cette courbe en ce point, et donc, peut être pris, pour chaque position de la droite MG, comme un centre autour duquel cette droite tourne. Il ne fait donc qu'observer qu'une

[150] On observe que, malgré l'apparente diversité de nature des constructions qui garantissent l'existence des courbes usw et de la courbe cCU (qui est due à la forme de l'exposition de Newton), ces constructions se réduisent au fond, l'une et l'autre, à la construction d'un lieu géométrique constitué par une famille de points, dont chacun est supposé être construit sur la droite MG qui est à son tour censée pouvoir être construite pour n'importe quel point M de la courbe donnée AMN.

[151] Cf. Newton (MP), I, **7**, [2], 433.

courbe, dont l'existence est prise pour acquise, possède les propriétés dont il est question : c'est une manière habituelle de démontrer un théorème d'existence dans la tradition de la géométrie d'Euclide. À la lumière d'une telle preuve, le lemme (*ii*) peut être reformulé ainsi : quelle que soit la courbe donnée AMN, le centre de courbure C de cette courbe AMN, relatif au point courant M, décrit une courbe cCU — la développée de AMN — à laquelle la normale MG à la courbe AMN est constamment tangente et toutes les courbes usw sont normales.

L'absence de toute remarque qui puisse servir de preuve (ou d'une forme quelconque de justification) des propositions (*i'*) et (*iii'*) nous laisse penser que Newton considère comme certains les arguments — relevant, l'un et l'autre, de la théorie des indivisibles — qu'on peut employer pour justifier ces propositions. Pour ce qui est de la proposition (*i'*) il ne s'agit que de considérer une courbe comme un agrégat d'éléments rectilignes dont chacun est pris sur une tangente à cette courbe. Pour ce qui est de la proposition (*iii'*) il s'agit de se réclamer de l'absence de "glissement" assurée par l'orthogonalité de usw autant avec la courbe cCU qu'avec la droite MG, pour en conclure que chaque élément indivisible de cette courbe a la même dimension que l'élément indivisible de cette droite qui lui est associé grâce à la courbe usw, et donc que tous les agrégats des éléments correspondants de ces courbes sont égaux entre eux.

Quelle que soit la manière dont on veuille juger ces arguments, toujours est-il que les conclusions auxquelles ils mènent, et en particulier la proposition (*iii'*), ne tiennent qu'à la nature géométrique du centre de courbure et sont indépendants de la modalité de donation de la courbe AMN et de sa référence à une certain système de coordonnées[152]. Comme la distance $\mathsf{s's''}$ entre deux points quelconques de la droite mobile MG censés décrire une courbe usw, parallèle à la courbe AMN, est par construction constante lors du mouvement du point M, du lemme (*iii*) il s'ensuit, comme simple corollaire, que toute portion $\mathsf{u'u''}$ de la développée cCU d'une courbe donnée AMN est égale à la portion $\mathsf{s's''}$ de la normale MG à cette dernière courbe relative à un point M, qui lui corresponde selon la construction indiquée. Si, en utilisant une notation similaire à celle employée dans la section3.5.2, on note par le symbole "$\Lambda[\mathbf{x}]$" la longueur d'un arc de courbe $\mathbf{x}$, et, comme semble le faire Newton, on pense celle-ci comme un segment égal à cet arc de courbe, c'est-à-dire comme le segment $s[\mathbf{x}]$ qui mesure cet arc de courbe dans le domaine des segments (de sorte que les symboles "$\Lambda[\mathbf{x}]$" et "$S[\mathbf{x}]$" dénotent par convention le même objet) alors, quels que soient les points $\mathsf{u'}$ et $\mathsf{u''}$ pris sur la courbe cCU, cette conclusion peut s'exprimer ainsi :

$$\Lambda[\mathsf{u'u''}] = \mathsf{s's''} \tag{11.168}$$

c'est-à dire que le segment connu $\mathsf{s's''}$ est la longueur de l'arc de courbe $\mathsf{u'u''}$.

Il s'ensuit que toute développée d'une courbe donnée dont on sait déterminer la normale est aisément rectifiable. Pour déterminer la longueur d'une quelconque de ses portions $\mathsf{u'u''}$, il suffit en effet de tracer la normale de cette dernière courbe (la développante de la courbe qu'il s'agit de rectifier) en un point M quelconque — éventuellement choisi convenablement, au but de simplifier la construction ou les calculs —, et de prendre sur celle-ci le segment

[152]On observe que ces conclusions sont des conséquences immédiates de la définition de la développante comme la courbe tracée par l'extrémité d'un fil qui enveloppe la développée lorsque ce fil est tiré de manière qu'il reste toujours tangent à cette dernière courbe [cf. la note 46 du chapitre 5]. Il ne semble pas pourtant que Newton ait conçu la développante de cette manière, ou qu'il ait été à connaissance de cette définition de Huygens, devenue ensuite courante.

$\mathsf{s}'\mathsf{s}''$ compris entre les deux projections s' et s'' des extrémités u' et u'' de cette portion de développée, déterminées en prenant cette même courbe comme moyen de projection. Ce dernier argument, que Newton laisse implicite, fournit une solution du problème 9 parfaitement indépendante, en tant que telle, autant des propositions 7 et 8 que de la théorie de la composition des mouvement dont relèvent les propositions 1-6, hormis en ce qui concerne l'image non essentielle des courbes AMN, usw et cCU comme engendrées respectivement par les mouvements de M, s et C. Ce sera en appliquant cette solution à quelques cas particuliers pour parvenir à la détermination d'une courbe rectifiable particulière ou d'une famille de courbes rectifiables particulières, que Newton fera ensuite intervenir les appareils géométriques et algorithmiques mis en place par les propositions 1-8. C'est d'ailleurs grâce à son indépendance de la notion de vitesse instantanée que l'argument qui conduit à cette solution ne souffre pas de la même ambiguïté que celle qui caractérise l'argument conduisant à l'égalité (11.139) : la portion de courbe rectifiée grâce à une application de cette solution générale du problème 9 est clairement définie et géométriquement parfaitement déterminée.

Pour expliciter et illustrer cette solution du problème 9, Newton présente, encore une fois, deux exemples.

Le premier[153] est le même que Newton avait déjà considéré dans sa note du mois de mai 1665 et revient donc au premier des deux exemples que van Heureat avait choisis, dans sa lettre à van Schooten, pour illustrer la méthode de rectification fondée sur son théorème[154]. Comme je l'ai déjà observé ci-dessus, l'argument précédent tient à une clarification de l'argument que Newton avait déjà avancé dans cette dernière note. Il est est de même pour cet exemple, que celui-ci traite donc, encore une fois, d'une manière fort différente que celle de van Heureat. Cette différence ne tient pas à la considération des vitesses ponctuelles et des mouvements composés, qui restent étrangers à l'argument de Newton, ou qui n'y interviennent qu'indirectement pour justifier les résultats dont celui-ci se sert pour trouver le centre de courbure de la parabole en question dans cet exemple. C'est une différence plus profonde, qui tient à la structure même de l'argument.

Van Heuraet était parti de l'équation de la courbe à rectifier référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, $az^2 = w^3$, et il avait appliqué son théorème pour en déduire que la longueur de la portion de cette courbe comprise entre les abscisses $w = 0$ et $w = \xi$ est égale à l'aire de la courbe d'abscisse w et d'ordonnée $y = \frac{n.[z]_w}{z} = \sqrt{1 + \frac{9}{4a}w}$, prise entre les mêmes limites, ce qui donne

$$\Lambda_0^\xi [z] = s\left[\sum\nolimits_0^\xi \left[\frac{n.[z]_w}{z}\right]\right] = \sqrt{\frac{\left(\frac{4}{9}a + \xi\right)^3}{a}} - \frac{8}{27}a \qquad (11.169)$$

De cette manière, van Heureat avait indiqué en général un lien entre le problème des rectifications et celui des aires, et il avait montré, sur un exemple particulier, comment ce lien géométrique pouvait conduire, dans certains cas, à la détermination d'un algorithme des rectifications, construit à partir de l'algorithme des aires (et de celui des normales). Comme, dans le formalisme du calcul différentiel, la normale $n.[z]_w$ d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales w, z est donnée par le produit $z\frac{ds}{dw}$ la

[153]Cf. Newton (MP), I, **2**, [2], 433.
[154]Cf. respectivement la section 5.4, en particulier pp. 262-263, et la section 3.5.2, en particulier pp. 3.5.2-156.

méthode de van Heureat se laisse exprimer dans ce formalisme par l'égalité

$$\Lambda_{\kappa}^{\xi}[z] = \int_{\kappa}^{\xi} \left(\frac{ds}{dw} \right) dw = \int_{\kappa}^{\xi} \left(\frac{\sqrt{dw^2 + dz^2}}{dw} \right) dw \tag{11.170}$$

où κ est une racine de l'équation $z(w) = 0$.

Rien de cela n'apparaît dans la nouvelle méthode de Newton, qui est indépendante de la considération de toute sorte d'aire, et donc de la solution donnée au problème des aires et, *a fortiori*, de la solution donnée au problème posé par la proposition 8. Cela est possible car Newton ne se limite pas à considérer, comme van Heureat, la normale à la courbe qu'il s'agit de rectifier en un de ses points, mais considère plutôt les centres de courbure de la développante de cette courbe en tous les points de cette développante, et pense en particulier la courbe qu'il s'agit de rectifier comme le lieu géométrique des ces centres, c'est-à-dire comme la développée de cette développante. Tandis que la méthode de rectification de van Heuraet est ainsi une méthode directe, car la courbe d'équation $y = \frac{n.[z]_w}{z}$ est construite à partir de la courbe donnée qui est la courbe qu'il s'agit de rectifier, l'argument de Newton donne ainsi lieu à une méthode de rectification à rebours, qui en ce sens est plutôt structurellement analogue à la méthode de quadrature fondée sur l'adaptation du théorème de van Heureat.

Van Heuraet suppose que la courbe qu'il s'agit de rectifier est référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales et qu'elle est exprimée, par rapport à ce système, par une équation Algébrique. Newton fait de même, mais pour une autre courbe, à partir de laquelle il construit la courbe qu'il s'agit de rectifier comme étant sa développée. En posant $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{PM} = y$, il suppose en particulier que la courbe AMN est la parabole d'équation $y^2 = bx$. En appliquant les égalités (11.123) et (11.124), il obtient

$$\begin{aligned} \mathsf{MC} &= \frac{4x+b}{2\sqrt{b}}\sqrt{4x+b} \\ \mathsf{MD} &= y + \frac{4y^3}{b^2} \\ \mathsf{DC} &= 2x + \frac{b}{2} \end{aligned} \tag{11.171}$$

Comme le point U, où la développée cCU rencontre l'axe AP, est le centre de courbature de la courbe AMN relatif au point A d'abscisse nulle, il s'ensuit

$$\mathsf{AU} = \frac{b}{2} \tag{11.172}$$

De là, en posant

$$\begin{aligned} \mathsf{UP} + \mathsf{DC} \quad &= \mathsf{UQ} \\ &= \mathsf{AP} - \mathsf{AU} + \mathsf{DC} = x - \frac{b}{2} + 2x + \frac{b}{2} = 3x = w \\ \mathsf{PR} \quad &= \frac{4y^3}{b^2} = z \end{aligned} \tag{11.173}$$

Newton obtient l'équation

$$16w^3 = 27bz^2 \tag{11.174}$$

qui exprime la courbe cCU, en tant que référée au système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'origine U et axe AH — et qui, par la position $b = a\frac{16}{27}$, se transforme en l'équation $az^2 = w^3$ qui constitue le point de départ de l'argument de van Heureat. Du lemme (*iii*), il s'ensuit ainsi que la longueur de la portion UC de cette dernière courbe est la portion SC de la normale MG à la courbe AMN. Comme, par hypothèse, $\mathsf{MS} = \mathsf{AU}$, quel que soit M, on aura alors

$$\begin{aligned}\Lambda\left[\mathsf{UC}\right] = \Lambda_0^{\xi}\left[z\right] = \left[\mathsf{MC} - \mathsf{MS}\right]_{w=\xi} &= \frac{4x+b}{2\sqrt{b}}\sqrt{4x+b} - \frac{b}{2} \\ &= \frac{3b+4w}{18b}\sqrt{9b^2+12bw} - \frac{b}{2}\end{aligned} \tag{11.175}$$

et il suffit donc de poser $b = a\frac{16}{27}$ pour le résultat obtenu par van Heuraet.

Quant au deuxième exemple, Newton ne fait que l'esquisser[155]. Il se limite à supposer que la courbe AMN est exprimée, par rapport au système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'axe AH et d'origine A, par l'équation $xy = a^2$, et à calculer les valeurs des segments MC, MD et DC relatives à cette courbe, ce qui préfigure une rectification de la quadrique d'équation $w^4 - a^2wz - a^4 = 0$, où il sera commode de prendre l'abscisse w égale à x, entre les limite $w = a$ et $w = \xi$.

La rectification d'une courbe définie en termes de l'aire ou de la longueur d'une courbe donnée, et des nouvelles formules pour le centre de courbure d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales

En l'absence d'une méthode générale propre à trouver la développante d'une courbe donnée, la procédure précédente ne permet de rectifier qu'une classe de courbes qu'il est fort difficile de caractériser *a priori*. Elle ne permet que de rédiger des tables donnant la rectification des développées des courbes dont on suppose connaître le rayon de courbure[156]. Il s'ensuit que cette procédure ne fournit pas une solution générale pour le problème direct des rectification : une courbe étant donnée, on ne peut employer cette procédure pour la rectifier qu'à la condition de connaître, ou de savoir déterminer de quelque manière que ce soit, sa développante.

La situation est analogue pour la solution du problème 10. Ce problème demande de déterminer une courbe dont la longueur "puisse être comparée" avec l'aire ou la longueur d'une courbe donnée et de "comparer"[157] entre elles ces grandeurs. En particulier Newton suppose que l'aire ou la longueur de la courbe donnée est exprimée par une variable $\bar{y}$ et il suppose que cette variable est liée, par une certaine condition fixée au préalable, à un segment $\mathfrak{y} = \mathsf{MG}$ pris sur la normale d'une deuxième courbe AMN. Comme la développée cCU de cette dernière courbe est aisément rectifiable, pourvu qu'on connaisse le rayon de courbure MC de cette même courbe et le segment $\mathsf{MS} = \mathsf{AU}$, Newton considère que

[155] Cf. Newton (MP), I, **2**, [2], 433-434.
[156] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 440 : "Note that by this [le problème 10] or the Ninth Probleme may be gathered a Catalogue of whatever lines, whose lenghts can bee Geometrically found".
[157] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 434.

le problème est résolu lorsque cette développée a été déterminée en même temps que sa longueur.

Si la variable $\bar{y}$ exprime l'aire de la courbe donnée, et que cette courbe est référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, x et y, alors la vitesse ponctuelle $\bar{q}$ du mouvement de génération de $\bar{y}$ n'est rien que le produit yp de l'ordonnée y de cette courbe et de la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de x. Si la condition qui lie la variable $\bar{y}$ au segment MG est exprimée par une équation Algébrique entière, et qu'on applique à cette équation l'algorithme énoncé par la proposition 7, on obtient une nouvelle équation dans laquelle la vitesse ponctuelle $\bar{q} = yp$ est connue. Il sera alors possible d'exprimer la vitesse ponctuelle du mouvement de génération du segment MG en termes de l'ordonnée y de la courbe donnée. Si pour déterminer le rayon de courbure et la développée de la courbe AMN, on se réclame, plutôt que des transformations indiquées par les égalités (11.123) et (11.124), d'autres égalités plus générales, faisant intervenir cette vitesse ponctuelle, alors on pourra exprimer aussi cette développée en termes de y. Il suffira enfin de rectifier cette développée conformément à la solution du problème 9 pour avoir ainsi résolu le problème 10 dans ce cas.

Si la variable $\bar{y}$ exprime la longueur de la courbe donnée, et que cette courbe est encore référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, x et y, ainsi que la deuxième courbe, alors pour résoudre le problème 10 à l'aide d'une démarche similaire à celle que l'on vient de décrire pour le cas précédent, il faut déterminer au préalable une relation liant la vitesse ponctuelle $\bar{q}$ du mouvement de génération de $\bar{y}$ aux coordonnées x et y de la courbe donnée. Pour résoudre le problème 10 dans ce cas, il faut donc savoir résoudre au préalable le problème des rectifications. Comme on le verra, lorsque Newton considérera ce cas, il anticipera en effet, subrepticement, sa solution du problème 12.

Ces deux cas sont les seuls que Newton considère dans sa solution du problème 10. À la rigueur, ce problème ne fait, de surcroît, que l'objet de deux exemples[158], dont un porte sur le premier cas, et l'autre sur le deuxième. L'argument que Newton présente comme une solution générale du problème 10[159], ne conduit qu'à obtenir de nouvelles égalités permettant de déterminer le rayon de courbure et la développée d'une courbe quelconque, référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, à partir de la donnée de la vitesse ponctuelle de génération d'un segment tel que MG, pris sur la normale à cette courbe et joignant cette dernière à l'axe de ce système. Ce sera justement à l'aide de ces égalités que Newton pourra ensuite aborder les deux exemples portant sur le problème 10. Ces exemples sont d'ailleurs précédés par un autre exemple[160] qui ne concerne que l'usage de ces égalités.

Des nouvelles formules pour le centre de courbure d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales Commençons donc par la nouvelle solution du problème du centre de courbure d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales.

La nouvelle idée de Newton est simple et géniale. Il s'agit de supposer que la normale de cette courbe est donnée et de rapporter cette courbe, outre aux coordonnées cartésiennes

[158]Cf. Newton (MP), I, **2**, [2], respectivement 438-439 et 439-440.
[159]Cf. Newton (MP), I, **2**, [2], 434-436.
[160]Cf. Newton (MP), I, **2**, [2], 436-438.

orthogonales auxquelles elle est référée par hypothèse, également à d'autres coordonnées rectilignes non cartésiennes, données respectivement par une nouvelle abscisse, prise à partir de l'origine du système de coordonnées cartésiennes, et par le segment, pris sur la normale à cette courbe, qui coupe l'axe en l'extrémité de cette abscisse, et qui joint cette extrémité à la courbe. Naturellement l'angle formé par ces deux coordonnées est ainsi variable, mais il est néanmoins déterminé, point par point, par la condition d'orthogonalité entre la deuxième de ces coordonnées et la courbe. C'est à ce nouveau système de coordonnées que Newton rapporte ensuite le centre de courbure cherché.

Soit alors AMN (fig. 10) la courbe donnée référée au système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'axe AH et d'origine A, et MG sa normale au point courant M, de coordonnées $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{PM} = y$. Pour avoir les nouvelles coordonnées non cartésiennes $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ de ce même point, il suffit alors de poser $\mathsf{AG} = \mathfrak{x}$ et $\mathsf{GM} = \mathfrak{y}$. Si p et q sont respectivement les vitesses ponctuelles de génération de x et y, on aura alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x + sn._{x} &&= x + y\frac{q}{p} \\ \mathfrak{y} &= \sqrt{y^2 + (sn._{x})^2} &&= y\sqrt{u + \left(\frac{q}{p}\right)^2} \end{aligned} \tag{11.176}$$

(u étant, comme d'habitude, le segment unité). Si on suppose de surcroît que la courbe AMN est exprimée par une équation Algébrique entière $F(x,y) = 0$, et que $\frac{q}{p} = \tilde{F}(x,y)$, de là il sera ensuite aisé de tirer le système

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ \mathfrak{x} = x + y\tilde{F}(x,y) \\ \mathfrak{y} = y\sqrt{u + \left(\tilde{F}(x,y)\right)^2} \end{cases} \tag{11.177}$$

Si il est possible d'éliminer de ce système les variables x et y , et si grâce à cette élimination on obtient la nouvelle équation Algébrique $\mathfrak{F}(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 0$ alors on aura une expression de la courbe AMN donnée par une équation Algébrique en les variables $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$.

La situation est un peu plus complexe pour ce qui est de la transformation inverse. C'est justement à celle-ci que Newton s'intéresse d'abord. Voici son argument. De la proposition 6, il s'ensuit que le rapport $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}$ des vitesses ponctuelles $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}$ des mouvements qui engendrent les coordonnées $\mathfrak{y}$ et $\mathfrak{x}$[161] est égal au rapport entre $\mathfrak{y}$ et TG, MT étant la tangente en M à la courbe AMN. Il s'ensuit que si le rapport $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}$ est donné, alors "il est aussi donné le triangle GTM, et donc la nature de la courbe AMN"[162].

Il est facile d'expliciter ce rapide argument de Newton, qui se réclame implicitement d'une partie de l'argument que ce dernier avait employé dans la solution du problème 2. Si on pense la normale MG comme étant mobile sur l'axe AH, alors les vitesses ponctuelles du mouvement du point G, respectivement conçu comme point d'intersection entre ces deux

[161] Newton qualifie en vérité $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ comme les "augmentations des segments $\mathsf{AF} = \mathfrak{x}$ et $\mathsf{FM} = \mathfrak{y}$ " : cf. Newton (MP), I, **2**, [2], 435.

[162] Cf. Newton (MP), I, **2**, [2], 435.

droites et comme point mobile sur MG, peuvent être déterminées en se réclamant de la proposition 6, en supposant que la normale MG tourne autour du centre de courbure C de la courbe AMN relatif au point M, tandis que la droite AH reste fixe. Si GV et LF sont respectivement parallèles à la tangente TM et à la normale MG, et qu'on suppose que GV représente la vitesse ponctuelle de rotation de MG évaluée au point G, alors la vitesse de ce point conçu comme point d'intersection des droites MG et AH est représentée par le segment GF, tandis que la vitesse ponctuelle de ce même point conçu comme mobile sur CG est représentée par le segment VF. Le rapport entre ces deux vitesses, qui est justement celui des vitesses $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, est alors celui des segments GF et VF et donc celui des segments TG et MG. Comme $\mathsf{MG} = \mathfrak{y}$, il s'ensuit que

$$\mathsf{TG} = \mathfrak{y}\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} \tag{11.178}$$

Mais comme le triangle TGM est rectangle, on aura

$$(\mathsf{MP})^2 = (\mathsf{MG})^2 - (\mathsf{PG})^2 = (\mathsf{TP})\,(\mathsf{PG}) \tag{11.179}$$

et donc

$$(\mathsf{MG})^2 = (\mathsf{PG})^2 + (\mathsf{TG} - \mathsf{PG})\,(\mathsf{PG}) = (\mathsf{TG})\,(\mathsf{PG}) \tag{11.180}$$

c'est-à-dire

$$\mathsf{PG} = sn._x = y\frac{q}{p} = \frac{(\mathsf{MG})^2}{\mathsf{TG}} = \mathfrak{y}\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}} \tag{11.181}$$

En comparant cette égalité avec les égalités (11.176), on aura enfin

$$\begin{aligned} x &= \mathfrak{x} - \mathfrak{y}\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}} \\ y &= \mathfrak{y}\sqrt{u - \left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}\right)^2} \end{aligned} \tag{11.182}$$

Ces égalités suffisent pour déterminer les coordonnées cartésiennes orthogonales x et y de tout point de la courbe AMN dont on connaît les coordonnées non cartésiennes $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$, pourvu qu'on connaisse aussi le rapport des vitesses ponctuelles des mouvements de génération de ces coordonnées évaluées en ce point. Si on suppose en revanche que la courbe AMN est exprimée, par rapport aux coordonnées $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$, par une équation Algébrique entière connue, $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$, et qu'on veut exprimer cette même courbe AMN par le biais d'une équation entre les coordonnées x et y, alors il faudra tirer de l'équation $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ l'égalité $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}} = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ et éliminer, si possible, les variables $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ du système

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0 \\ x = \mathfrak{x} - \mathfrak{y}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \\ y = \mathfrak{y}\sqrt{u - (\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}))^2} \end{array} \right. \tag{11.183}$$

Ceci étant dit, revenons à l'argument de Newton. Il s'agit, comme on l'a dit, de trouver de nouvelles égalités permettant de déterminer le centre de courbure de la courbe AMN à partir des coordonnées $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$.

Si sur la normale MG, on prend un point E quelconque, qu'on trace la parallèle EK à l'axe AH passant par ce point et qu'on suppose, comme ci-dessus, que la vitesse ponctuelle de rotation de la droite MG autour du centre C, évaluée au point G, est représentée par le segment GV, alors il s'ensuit que cette même vitesse ponctuelle de rotation, évaluée au point E, est représentée par le segment EB , perpendiculaire à MG. De la proposition 6, on tire alors que le rapport entre la vitesse ponctuelle du point D, conçu comme point d'intersection entre la droite MG et l'axe AH, et la vitesse ponctuelle du point E, conçu comme point d'intersection entre la droite MG et la droite KE (considérée comme fixe, de même que l'axe AH), est égal au rapport entre les segments GF et EI (BI étant parallèle à MG) et donc au rapport entre les segments CG et CE. Mais, de même que la vitesse ponctuelle du point G, conçu comme point d'intersection entre la droite MG et l'axe AH, n'est rien d'autre que la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de $\mathsf{AD} = \mathfrak{x}$, la vitesse ponctuelle du point E, conçu comme point d'intersection entre la droite MG et la droite KE, n'est rien d'autre que la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de $\mathsf{KE} = \mathsf{AR}$, KA et ER étant perpendiculaires à l'axe AH. Donc, si on pose $\mathsf{RG} = \mathfrak{z}$, on aura $\mathsf{KE} = \mathsf{AR} = \mathfrak{x} - \mathfrak{z}$, et donc la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de KE sera égale à $\mathfrak{p} - \mathfrak{r}$ ($\mathfrak{r}$ étant la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de $\mathfrak{z}$) et on aura ainsi

$$\mathfrak{p} : \mathfrak{p} - \mathfrak{r} = \mathsf{CG} : \mathsf{CE} \tag{11.184}$$

De là, en observant que les deux segments CG et GE — qui ne sont rien d'autre que deux valeurs de la coordonnée $\mathfrak{y}$, caractérisant respectivement les points C et E, d'abscisse commune $\mathfrak{x} = \mathsf{AG}$ — sont de signe opposé, on tire enfin :

$$\mathfrak{r} : \mathfrak{p} = \mathsf{GE} : \mathsf{CG} \tag{11.185}$$

De la similarité des triangles GFV et RGE, et du fait que les côtés GF et VF du premier de ce triangle sont entre eux comme $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, il s'ensuit, d'un autre côté que

$$\mathsf{RG} : \mathsf{ER} = \mathfrak{q} : \sqrt{\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{q}^2} \tag{11.186}$$

et donc, en posant $\mathsf{ER} = a$,

$$\mathfrak{z}^2\mathfrak{q}^2 + a^2\mathfrak{q}^2 - \mathfrak{z}^2\mathfrak{p}^2 = 0 \tag{11.187}$$

En appliquant l'algorithme énoncé par la proposition 7, on aura alors

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{z}^2\mathfrak{q}\gamma + a^2\mathfrak{q}\gamma - \mathfrak{z}^2\mathfrak{p}\beta}{\mathfrak{z}\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{z}\mathfrak{q}^2} \tag{11.188}$$

où β et γ sont respectivement les vitesses ponctuelles des mouvements de génération de $\mathfrak{p}$ et de $\mathfrak{q}$[163].

En comparant cette égalité avec la proportion (11.185), et on observant que de la similarité des triangles GFV et RGE, il s'ensuit que $\mathsf{GE} = \mathfrak{z}\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}}$, on aura alors :

$$\mathsf{CG} = \left(\frac{\mathfrak{z}^2\mathfrak{p}^4 - \mathfrak{z}^2\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2}{\mathfrak{z}^2\mathfrak{q}^2\gamma + a^2\mathfrak{q}^2\gamma - \mathfrak{z}^2\mathfrak{p}\mathfrak{q}\beta} \right) \tag{11.189}$$

[163]Newton qualifie en vérité β et γ d' "incréments ou décréments des mouvements $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$" [cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 435]. Je vais revenir plus loin sur le statut de ces variables qui n'interviennent ici que comme des termes soumis aux règles induites par l'algorithme énoncé par la proposition 7.

Il suffit alors de supposer que la vitesse $\mathfrak{p}$ du mouvement de génération de $\mathfrak{x}$ est constante, ce que revient à prendre $\mathfrak{x}$ comme variable principale, pour avoir $\beta = 0$, et donc, en comparant cette égalité avec l'équation (11.187) :

$$\mathsf{CG} = \frac{\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{q}^2}{\gamma} \tag{11.190}$$

Grâce à la similarité des triangles GFV et GCQ (CQ étant perpendiculaire à l'axe AK) et au fait que le segments VF et CG sont placés de deux côtés opposés de l'axe AH, on aura enfin :

$$\begin{aligned} \mathsf{GQ} &= \frac{-\mathfrak{p}^2\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^3}{\mathfrak{p}\gamma} \\ \mathsf{QC} &= \frac{\left(\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{q}^2\right)\sqrt{\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{q}^2}}{\mathfrak{p}\gamma} \end{aligned} \tag{11.191}$$

* * *

Ces trois dernières égalités, dans lesquelles Newton pose $\mathfrak{p} = u$, ne font intervenir aucun terme qui dépende du choix du point E, sont parfaitement générales et permettent de déterminer le centre de courbure de toute courbe qu'on sait rapporter à un système de coordonnées non cartésiennes telles que $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$. Elles constituent la conclusion de l'argument que Newton présente comme solution générale du problème 10. Avant de passer aux exemples que Newton fait suivre à cet argument, il est pourtant nécessaire de s'arrêter pour réfléchir à cet argument.

Si on calcule les variables $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, à partir des égalités (11.176), en appliquant l'algorithme énoncé par la proposition 7, et en supposant que p, la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de x, est égale à zéro, ce qui revient à choisir x comme variable principale, on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= p + \frac{q^2}{p} + y\frac{\delta}{p} \\ \mathfrak{q} &= \frac{u}{\sqrt{u + \left(\frac{p}{q}\right)^2}}\left(p + \frac{q^2}{p} + y\frac{\delta}{p}\right) = \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{u + \left(\frac{p}{q}\right)^2}} \end{aligned} \tag{11.192}$$

δ étant la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de q, et donc :

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}} &= \frac{u}{\sqrt{u + \left(\frac{p}{q}\right)^2}} \\ u - \left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}\right)^2 &= \frac{u}{u + \left(\frac{q}{p}\right)^2} \end{aligned} \tag{11.193}$$

En comparant la deuxième des ces égalités avec l'égalité (11.190), on obtient sur-le-champ la nouvelle égalité :

$$\mathsf{CG} = \frac{\mathfrak{p}^2}{\gamma\left(u + \left(\frac{q}{p}\right)^2\right)} \tag{11.194}$$

Pour parvenir, ainsi, à exprimer le segment CG, et donc les coordonnées du centre de courbure C, à partir des coordonnées cartésiennes orthogonales x et y du point M, il ne s'agit que d'exprimer le rapport $\frac{\gamma}{\mathfrak{p}^2}$ à partir de ces coordonnées.

Pour montrer comment cela est possible, Whiteside[164] passe du formalisme de Newton au formalisme du calcul différentiel, en posant :

$$\begin{gathered}
\frac{\gamma}{\mathfrak{p}^2} \equiv \frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2} \qquad \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}} \equiv \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} \qquad \frac{p}{q} \equiv \frac{dx}{dy} \\
\frac{\mathfrak{p}}{p} \equiv \frac{d\mathfrak{x}}{dx} \qquad \frac{\delta}{p^2} \equiv \frac{d^2y}{dx^2}
\end{gathered} \tag{11.195}$$

Cela lui permet d'employer les règles de ce dernier formalisme pour calculer, sans difficulté :

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{\mathfrak{p}^2} \equiv \frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2} \quad &= \frac{d}{d\mathfrak{x}}\left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right)\cdot\frac{dx}{d\mathfrak{x}} \\
&= \frac{d}{dx}\left(1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-1} \\
&= \left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{d^2y}{dx^2}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{11.196}$$

De là il est ensuite facile de tirer, par substitution,

$$\mathsf{CG} = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} \tag{11.197}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
-\mathsf{CM} \quad &= -\mathsf{CG}+\mathsf{DM} \\
&= -\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}+\mathfrak{y} \\
&= -\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}+y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \\
&= -\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}
\end{aligned} \tag{11.198}$$

[164]Cf, Newton (MP), I, **2**, 7, note (123), 435.

conformément à la formule connue.

Il est aisé de réécrire cette dernière égalité dans le formalisme de Newton, selon les équivalences (11.195). Et il est aussi aisé de tirer l'égalité qui résulte de la réécriture de l'égalité (11.196) dans le formalisme de Newton, c'est-à-dire :

$$\frac{\gamma}{\mathfrak{p}^2} = \left(u + \left(\frac{q}{p}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\delta}{p^2}\left(u + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + y\frac{\delta}{p^2}\right)^{-1} \tag{11.199}$$

En comparant cette dernière égalité à l'égalité (11.194) on obtient enfin :

$$\begin{aligned} -\mathsf{CM} &= -\frac{\left(u + \left(\frac{q}{p}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(u + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + y\frac{\delta}{p^2}\right)}{\frac{\delta}{p^2}\left(u + \left(\frac{q}{p}\right)^2\right)} + y\sqrt{u + \left(\frac{q}{p}\right)^2} \\ &= \frac{-\left(u + \left(\frac{q}{p}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\delta}{p^2}} \end{aligned} \tag{11.200}$$

Le formalisme de Newton ne permet pourtant aucune preuve indépendante de l'égalité (11.199). Pour calculer la vitesse ponctuelle γ du mouvement de génération de $\mathfrak{q}$, ou le rapport $\frac{\gamma}{\mathfrak{p}^2}$, en termes des coordonnées cartésiennes orthogonales x et y, Newton n'aurait pu qu'appliquer l'algorithme énoncé par la proposition 7 à la deuxième des égalités (11.192) ou à la première des égalités (11.193).

Pour comprendre la situation, considérons la deuxième de ces possibilités. En passant de la première des égalités (11.193) à une équation entière, on obtient d'abord :

$$q^2\mathfrak{q}^2 + p^2\mathfrak{q}^2 - q^2\mathfrak{p}^2 = 0 \tag{11.201}$$

De là, grâce à l'algorithme énoncé par la proposition 7, en supposant que la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de p est nulle, on tire ensuite :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\mathfrak{p}^2} &= \frac{q\left(\gamma + \frac{q}{\mathfrak{p}}\beta - \frac{\mathfrak{q}^2}{\mathfrak{p}^2}\delta\right)}{\mathfrak{q}\left(p^2 + q^2\right)} \\ &= \frac{q\left(\delta + \frac{q}{p + \frac{q^2}{p} + y\frac{\delta}{p}}\beta - \frac{\delta}{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2}\right)\sqrt{u + \left(\frac{p}{q}\right)^2}}{\left(p + \frac{q^2}{p} + y\frac{\delta}{p}\right)\left(p^2 + q^2\right)} \\ &= \frac{p^3}{q^3}\left(u + \left(\frac{p}{q}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\delta}{p^2}\left(u + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + y\frac{\delta}{p^2}\right)^{-1} + \left(u + \left(\frac{p}{q}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\beta \end{aligned} \tag{11.202}$$

β étant, comme ci-dessus, la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de $\mathfrak{p}$. Pour retrouver l'égalité (11.199), il faudrait ainsi pouvoir démontrer que :

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{q^3-p^3}{q\left(q^2+p^2\right)}\frac{\delta}{p^2}\left(u+\left(\frac{q}{p}\right)^2+y\frac{\delta}{p^2}\right)^{-1} \\ &= \frac{q^3-p^3}{q\left(q^2+p^2\right)}\frac{\delta}{p^3}\mathfrak{p}\end{aligned} \tag{11.203}$$

Pour calculer β, Newton ne peut pourtant, encore une fois, qu'appliquer l'algorithme énoncé par la proposition 7 à la première des égalités (11.192). En supposant à nouveau que la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de p est nulle, ceci donne :

$$\beta = 3\frac{q}{p}\delta + y\frac{\varepsilon}{p} \tag{11.204}$$

où ε est la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de δ, c'est-à-dire une variable (qui dans le formalisme différentiel s'exprimerait comme une différentielle ou une dérivée troisièmes), que dans le formalisme de Newton on ne saurait exprimer en termes des variables y, p, q et δ.

On comprend alors que les nouvelles formules pour le centre de courbure données par Newton, bien que formellement équivalentes aux formules différentielles connues, ne fonctionnent pas, dans le formalisme de Newton, comme ces dernières dans le formalisme différentiel. À nos yeux, ces formules représentent certes un progrés par rapport aux résultats énoncés dans la note du 21 mai 1665 et lors de la solution du problème 2, dans le même *Traité d'octobre 1666*. À ces deux occasions, Newton était parvenu à des égalités, telles que les égalités (11.123) et (11.124) où n'interviennent que des invariants algorithmiques, se rapportant à l'équation Algébrique entière censée exprimer la courbe donnée par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales. Pourtant, dans un cas comme dans l'autre, il avait tiré de ces égalités d'autres égalités plus générales, telles que les égalités (5.97) ou (11.114), qui expriment les relations reliant le centre de courbure aux coordonnées de n'importe quelle courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, indépendamment de l'équation qui puisse éventuellement exprimer cette courbe par rapport à ce système de coordonnées.

Les égalités (11.114) diffèrent de l'égalité (5.97) par une différence essentielle qu'on a déjà observée ci-dessus[165] : dans l'égalité (5.97) interviennent des valeurs de la sous-normale prises en deux points infiniment proches, tandis que dans les égalités (11.114) interviennent les vitesses ponctuelles p et r respectivement des mouvement de génération de l'abscisse et de la sous-normale de la courbe considérée. Dans les égalités (11.190) et (11.191) intervient en, revanche, à côté des vitesses ponctuelles $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ des mouvements de génération des coordonnées $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$, également la vitesse ponctuelle γ. Newton qualifie cette dernière vitesse d' "incrément ou décrément du mouvement $\mathfrak{q}$"[166]. Cela n'empêche qu'il s'agisse en réalité de la vitesse ponctuelle du mouvement de génération d'une vitesse. J'ai déjà observé[167] que lors de la proposition 8, Newton semble considérer les vitesses ponctuelles comme des variables liées par une relation purement formelle à n'importe quelle sorte de variable exprimant un

[165]Cf. p. 542.
[166]Cf. la note (163), ci-dessus.
[167]Cf. la section 11.1.4, ci-dessus.

segment donné ou auxiliaire. Ici, il semble étendre cette même approche à des variables exprimant des vitesses, sans passer, du moins explicitement, par l'intermédiaire de certains segments représentant ces vitesses. Il semble donc faire le pas qu'il n'avait pas fait une année auparavant, où il n'avait considéré, à côté des vitesses p et q des mouvements de génération des coordonnées de la courbe, que la vitesse r du mouvement de génération de la sous-normale[168]. Les vitesses ponctuelles sont des variables parmi les autres et, en dépit de la métaphore mécanique qui donne sens à cette notion, ce sont sont directement les variables, et non pas les mouvement de génération des segments, qui ont des vitesses ponctuelles.

Si, à l'occasion de la proposition 8, Newton semble donc anticiper la notion de fluxion d'une fluente, il semble ici anticiper même la notion de fluxion d'une fluente qui soit elle-même la fluxion d'une autre fluente. L'impossibilité de démontrer l'égalité (11.199) au sein du formalisme de Newton témoigne pourtant de la différence essentielle entre une vitesse ponctuelle telle que γ et une différentielle ou une dérivée deuxièmes. Tout ce que Newton fait est de soumettre n'importe quelle équation Algébrique entière, indépendamment de la nature des variables qui y interviennent, à l'algorithme énoncé par la proposition 7[169], en associant à chacune de ces variables une vitesse ponctuelle fonctionnant *de facto* comme une nouvelle variable. Le formalisme que Newton rattache à des vitesses telles que γ — ou, si on veut utiliser dès maintenant le langage qu'il introduira seulement dans le *De methodis*, à des fluxions de fluxions — est donc ce qui définit implicitement les vitesses p et q — c'est-à-dire les fluxions des fluentes qui ne sont pas des fluxions. Une égalité telle que

$$\frac{d}{d\mathfrak{x}}\left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right) \cdot \frac{dx}{d\mathfrak{x}} \tag{11.205}$$

qu'on a employée ci-dessus pour parvenir à l'égalité (11.196) est donc tout simplement inconcevable dans ce formalisme. On verra que ce jugement sera confirmé par les exemples considérés par Newton et en particulier par la manière dont, au cours de ces exemples, celui-ci calcule la vitesse γ.

Le progrès que Newton a réalisé en passant des égalités (11.114) aux égalités (11.190) et (11.191) est ainsi payé, dans le contexte de sa théorie, au prix de l'impossibilité d'un calcul effectif des coordonnées du centre de courbure. Je m'explique. Les invariants géométriques qui interviennent dans les nouvelles formules de Newton se rapportent à la normale et à la sous-normale de la courbe donnée, cette dernière étant prise sur un axe quelconque. Ces coordonnées sont intrinsèques à la courbe, et il est donc facile de les construire géométriquement, en supposant que la courbe est donnée et qu'on sache déterminer sa tangente en n'importe quel point. Pourtant on a vu que les nouvelles formules de Newton ne se laissent pas convertir, à l'intérieur du formalisme qui les a engendrées, en des formules analogues aux formules modernes, référées aux coordonnées cartésiennes orthogonales de la courbe donnée. Pour convertir ces formules, dans le contexte de ce formalisme, en des formules référées à des coordonnées cartésiennes orthogonales, il faut faire intervenir non seulement la vitesse ponctuelle du mouvement de génération d'une vitesse ponctuelle, mais aussi la vitesse ponctuelle du

[168]Cf. ci-dessus, pp. 453-454.

[169]On observe en passant que cet algorithme intervient de ce fait dans l'argument qui conduit aux égalités générales qui expriment les relations reliant le centre de courbure aux coordonnées de n'importe quelle courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, et non seulement, comme dans la solution du problème 2 et dans la note du 13 novembre 1665, lors des applications des ces égalités à des courbes exprimées par une équation Algébrique entière.

mouvement de génération de la vitesse ponctuelle du mouvement de génération d'une vitesse ponctuelle. Plutôt que de se lancer dans cette complication non essentielle, Newton préfère imaginer que la courbe est exprimée par une équation Algébrique entière par rapport aux coordonnées non cartésiennes $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$, et calcule le centre de courbure cherché relativement à ces coordonnées[170].

Certes, si la courbe est donnée d'autres manières, par exemple par une équation algébrique référée aux coordonnées cartésiennes orthogonales x et y, Newton peut calculer sa normale et la somme $x + sn._x$ de son abscisse et de sa sous-normale, poser celles-ci respectivement égales à $\mathfrak{y}$ et à $\mathfrak{x}$, appliquer ses formules pour déterminer le rayon de courbure en termes de ces dernières coordonnées, et remplacer enfin, dans la formule finale, ces coordonnées et leurs vitesses par leurs expressions en x et y. D'autre part, s'il s'agit de trouver la longueur de la développée d'une courbe donnée, comme dans le cas du problème 9, le fait que cette dernière courbe soit exprimée par une équation en $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ n'empêche pas, une fois déterminées les coordonnée cartésiennes orthogonales w et z de son centre de courbure en termes des coordonnées non cartésiennes $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$, d'éliminer les variables $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ et de trouver ainsi l'équation de la courbe à rectifier en termes des coordonnées w et z, et sa longueur en terme d'une de ces variables. En tant qu'outils pour résoudre le problème 9, les égalités (11.190) et (11.191) fonctionnent donc, par rapport à une courbe référée aux coordonnées $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$, exactement comme les égalités (11.114) — ou même les égalités (11.123) et (11.124) — fonctionnent par rapport à une courbe référée aux coordonnées x et y. Employées de cette manière, les nouvelles formules pour le centre de courbure se réduisent à des indications pour calculer les coordonnées cartésiennes orthogonales du centre de courbure de la courbe en question. Non seulement, elles perdent donc la propriété essentielle que les rend à nos yeux bien différentes des égalités (11.114), mais elles ne viennent *de facto* à fonctionner que comme les égalités (11.123) et (11.124).

* * *

Ceci étant dit, venons-en au premier des trois exemples considérés par Newton, qui, comme on l'a dit, ne concerne pas le problème 10, mais seulement les égalités (11.190) et (11.191). Celui-ci suppose d'emblée que la courbe AMN est référée aux coordonnées non cartésiennes $\mathsf{AG} = \mathfrak{x}$ et $\mathsf{GM} = \mathfrak{y}$ et est exprimée, par rapport à ce système de coordonnées, par l'équation

$$\mathfrak{y}^2 = b\mathfrak{x} \tag{11.206}$$

Pour passer de cette équation à l'équation qui exprime cette courbe par rapport aux coordonnées cartésiennes orthogonales $\mathsf{AP} = x$ et $\mathsf{GM} = y$, il suffit de résoudre le système (11.183), ce qui donne l'équation $y^2 = bx + \frac{b^2}{4}$. À une translation près, cette dernière équation correspond à l'équation $y^2 = bx$ qui avait fait l'objet du premier exemple du problème 9. La courbe en question n'est donc, encore une fois, que la parabole étudiée par van Heureat dans sa lettre à van Schooten. En appliquant deux fois l'algorithme énoncé par la proposition 7 à l'équation (11.206) et en posant $\mathfrak{p} = u$, Newton tire l'une après l'autre les nouvelles équations

$$2\mathfrak{y}\mathfrak{q} = b \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{y}\gamma + \mathfrak{q}^2 = 0 \tag{11.207}$$

[170] Cela sera clair de la considération des exemples qu'on va considérer ci-dessous.

d'où il s'ensuit :

$$\mathfrak{q} = \frac{b}{2\mathfrak{y}} \qquad \text{et} \qquad \gamma = -\frac{\mathfrak{q}^2}{\mathfrak{y}} \tag{11.208}$$

Il suffit alors de substituer ces expressions de $\mathfrak{q}$ et γ dans les égalités (11.190) et (11.191), où on aura posé $\mathfrak{p} = u$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathsf{CG} &= \frac{b^2\mathfrak{y} - 4\mathfrak{y}^3}{b^2} \\ \mathsf{GQ} &= \frac{4\mathfrak{y}^2 - b^2}{2b} \\ \mathsf{QC} &= \frac{b^2 - 4\mathfrak{y}^2}{2b^2}\sqrt{4\mathfrak{y}^2 - b^2} \end{aligned} \tag{11.209}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \mathsf{MC} = \frac{b^2\mathfrak{y} - 4\mathfrak{y}^3}{b^2} + (-\mathfrak{y}) = -\frac{4\mathfrak{y}^3}{b^2} \\ \mathsf{AQ} = \frac{4\mathfrak{y}^2 - b^2}{2b} + \mathfrak{x} = \frac{6\mathfrak{y}^2 - b^2}{2b} = \frac{3\mathfrak{y}^2}{b} - \frac{b}{2} \end{aligned} \tag{11.210}$$

Comme l'ordonnée $z = \mathsf{QC}$ de la développée cCU s'annule lorsque $\mathfrak{y}^2 = \frac{b^2}{4}$, on aura :

$$\begin{aligned} \mathsf{AU} = \mathsf{AQ}_{\mathsf{QC}=0} = \frac{b}{4} \\ w = \mathsf{UQ} = \mathsf{AQ} - \mathsf{AU} = \frac{12\mathfrak{y}^2 - 3b^2}{4b} \end{aligned} \tag{11.211}$$

En éliminant $\mathfrak{y}^2$ entre les expressions de z et de w, on aura ainsi pour cette développée l'équation (11.174), conformément au résultat déjà obtenu lors du premier exemple du problème 9. De la deuxième des égalités (11.211) il s'ensuit d'autre part la nouvelle égalité

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{6}\sqrt{9b^2 + 12bw} \tag{11.212}$$

d'où il est ensuite aisé d'obtenir l'égalité (11.175).

La rectification d'une courbe définie en termes de l'aire ou de la longueur d'une courbe donnée Jusqu'ici, il n'a été question que d'une solution alternative aux problèmes 2 et 9. La solution du problème 10 n'est exposée par Newton qu'à l'aide de deux nouveaux exemples, dont le premier concerne le cas où la variable $\bar{y}$ exprime l'aire de la courbe donnée, et le deuxième concerne le cas où cette même variable exprime la longueur de cette courbe.

Pourvu que la courbe donnée soit référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, la solution de ce problème, dans le premier de ces cas, est un simple corollaire de la solution qu'on vient d'exposer pour le problème du centre de courbure d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales. Newton profite pourtant de l'occasion pour observer que comme les égalités (11.190) et (11.191) ne font pas intervenir directement la variable $\mathfrak{y}$, elles peuvent conduire à établir une expression Algébrique de la développée d'une courbe donnée, même si la relation censée subsister entre les coordonnées non cartésiennes $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ de cette courbe n'est pas exprimée par une équation Algébrique. Il suffit pour cela que cette relation soit telle que la relation entre les vitesses ponctuelles $\mathfrak{q}$ et γ et l'abscisse $\mathfrak{x}$ soit, elle, exprimée par une équation Algébrique.

Dans son exemple Newton suppose que la courbe donnée est l'hyperbole IJ (fig. 11) référée au système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'axe AH et d'origine A, et exprimée, par rapport à ce système, par l'équation $xy = a^2$. Si $\bar{y}$ est l'aire du trapézoïde BGED et qu'on pose $\mathsf{AG} = x$ et $\mathsf{GE} = y$, on aura, quel que soit le point B,

$$\frac{\bar{q}}{p} = y = \frac{a^2}{x} \tag{11.213}$$

Si on pose aussi $\mathsf{MG} = \mathfrak{y}$, et qu'on suppose qu'une équation Algébrique $\mathfrak{G}(\bar{y}, \mathfrak{y}) = 0$, exprimant la relation entre la variable $\bar{y}$ et le segment MG est donnée, alors il est possible de se réclamer de cette équation et de l'égalité (11.213) pour obtenir une nouvelle équation Algébrique exprimant la développée cCU de la courbe AMN d'abscisse $\mathsf{AG} = x = \mathfrak{x}$ et de normale $\mathsf{MG} = \mathfrak{y}$.

Newton observe que si l'équation $\mathfrak{G}(\bar{y}, \mathfrak{y}) = 0$ est linéaire autant en $\bar{y}$ qu'en $\mathfrak{y}$ et qu'aucune de ces variables n'est multipliée, dans cette équation, par la variable x, alors, grâce à l'égalité (11.213), on obtient des expressions Algébriques des vitesses ponctuelles $\mathfrak{q}$ et de γ dans lesquelles la variable $\bar{y}$ n'intervient pas. S'il n'en est pas ainsi, alors cette variable intervient dans les expressions Algébriques de $\mathfrak{q}$ et de γ. Mais comme la courbe IJ est une hyperbole cette variable ne peut pas être exprimée par une expression Algébrique en x et y. La développée cCU sera alors, de même que son développante AMN, une courbe mécanique.

Pour illustrer le premier cas, Newton suppose d'abord que l'équation $\mathfrak{G}(\bar{y}, \mathfrak{y}) = 0$ est la suivante

$$a\mathfrak{y} = \bar{y} \tag{11.214}$$

Encore que la courbe AMN ne puisse pas être exprimée, par rapport aux coordonnées non cartésiennes $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$, par une équation Algébrique — car, en posant, $\mathsf{AB} = b$, on aura $\mathfrak{y} = a\bar{y} = a^3 \log\left(\frac{\mathfrak{x}}{b}\right)$— ceci n'est nullement le cas de son développée cCU. De l'égalité (11.213) et de l'équation (11.214), il s'ensuit, en effet, en supposant nulle la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de $p = \mathfrak{p}$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{q} &= \frac{a}{x}p \\ \gamma &= -\frac{ap^2}{x^2} \end{aligned} \tag{11.215}$$

et donc, conformément aux égalités (11.190) et (11.191), où l'on aura posé $\mathfrak{p} = p = u$:

$$\begin{aligned} \mathsf{CG} &= \frac{a^2 - x^2}{a} \\ \mathsf{GQ} &= \frac{x^2 - a^2}{x} \\ \mathsf{QC} &= \frac{a^2 - x^2}{ax}\sqrt{x^2 - a^2} \end{aligned} \tag{11.216}$$

Comme QC s'annule lorsque $x = a$, on aura ensuite $\mathsf{AU} = \mathsf{MS} = a$ et donc

$$\begin{aligned} \mathsf{UQ} &= x - a \\ \mathsf{QC} &= -\frac{w^2 - 2aw}{aw + a^2}\sqrt{w^2 - 2aw} \end{aligned} \tag{11.217}$$

de sorte que la développée cCU sera exprimée, par rapport aux coordonnées cartésiennes orthogonales $w = \mathsf{UQ}$ et $z = \mathsf{QC}$, par l'équation

$$z^2(aw + a^2)^2 = (w^2 + 2aw)^2(w^2 + 2aw) \tag{11.218}$$

et la longueur de l'arc UC de cette développée sera

$$\mathsf{SC} = \frac{x^2 + u - 2a^2}{a} = \frac{w^2 + 2aw - a^2 + u}{a} \tag{11.219}$$

Pour illustrer le deuxième cas, dans lequel la développée cCU est, de même que la courbe AMN, une courbe mécanique, Newton suppose que l'équation $\mathfrak{G}(\bar{y}, \mathfrak{y}) = 0$ est la suivante

$$x\mathfrak{y} = \bar{y} \tag{11.220}$$

ce qui donne en effet :

$$\begin{aligned} \mathfrak{q} &= \frac{a^2 - x\mathfrak{y}}{x^2}p = \frac{a^2 - \bar{y}}{x^2}p \\ \gamma &= -\frac{3x\mathfrak{q} + \mathfrak{y}p}{x^2}p = \frac{2\bar{y} - 3a^2}{x^3}p^2 \end{aligned} \tag{11.221}$$

et l'équation qui exprime la développée cCU par rapport aux coordonnés $\mathsf{UQ} = w$ et $\mathsf{QC} = z$ fera donc apparaître la variable non algébrique $\bar{y}$.

* * *

Les deux exemples considérés par Newton, où l'on suppose que la courbe donnée est l'hyperbole d'équation $xy = a^2$, devraient suffire à montrer comment le problème 10 peut être résolu dans d'autres cas, lorsque la variable $\bar{y}$ exprime l'aire de la courbe donnée. Pour que la méthode que Newton suit dans ces exemples puisse être appliquée avec succès, il faut pourtant qu'il soit possible d'exprimer la vitesse ponctuelle $\bar{q}$ du mouvement de génération de $\bar{y}$ par une expression Algébrique où n'intervient qu'une seule variable, que l'on puisse ensuite identifier avec l'abscisse $\mathfrak{x}$ de la courbe auxiliaire AMN. Le cas considéré par Newton est le plus simple parmi ceux dans lesquels ceci est possible : la courbe donnée est supposée être exprimée, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, par une équation algébrique de la forme $y = f(x)$. L'aire $\bar{y}$ de cette courbe ne nécessite pas, du coup, d'être déterminée géométriquement de manière précise. Tout ce qui est demandé, pour rendre possible l'application de la méthode, est qu'on passe de cette équation à l'égalité $\bar{q} = yp = f(x)p$. Il suffira alors de poser $\mathfrak{x} = x$ et d'appliquer deux fois l'algorithme énoncé par la proposition 7 pour trouver les expressions de $\mathfrak{q}$ et γ, à partir de l'équation donnée $\mathfrak{G}(\bar{y}, \mathfrak{y}) = 0$. En posant $p = u$, cette dernière équation se transforme, en effet, grâce à une nouvelle application de l'algorithme énoncé par la proposition 7 en une nouvelle équation

$\mathfrak{G}(\bar{y},x,\mathfrak{y},\mathfrak{q}) = 0$ de premier degré en $\mathfrak{q}$, de sorte qu'il sera facile d'en tirer une égalité de la forme $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}(\bar{y},x,\mathfrak{y})$. De là, une application ultérieure de l'algorithme énoncé par la proposition 7 fournira ensuite une nouvelle égalité $\gamma = \mathfrak{h}(\bar{y},x,\mathfrak{y})$. Si de l'équation $\mathfrak{G}(\bar{y},\mathfrak{y}) = 0$, on peut tirer de surcroît une égalité de la forme $\mathfrak{y} = \mathfrak{f}(\bar{y},x)$, comme dans les cas considérés par Newton, alors $\mathfrak{q}$ et γ se trouvent exprimées en termes des seules variables $\bar{y}$ et x, ou, éventuellement — si $\mathfrak{G}(\bar{y},\mathfrak{y}) = 0$ est une équation linéaire autant en $\bar{y}$ qu'en $\mathfrak{y}$, et qu'aucune de ces variables ne soit multipliée, dans cette équation, par la variable x — en termes de la seule variable x, comme dans le premier cas considéré par Newton.

* * *

Si, eau lieu d'exprimer l'aire de la courbe donnée, la variable $\bar{y}$ en exprime la longueur, alors la solution du problème 10 ne peut être trouvée, selon la méthode appliquée au cas précédent, qu'à la condition de disposer d'une relation entre la vitesse ponctuelle $\bar{q}$ du mouvement de génération de $\bar{y}$ et les coordonnées de la courbe donnée qui permette d'exprimer cette vitesse ponctuelle en termes de la seule abscisse x de cette courbe. La détermination de cette relation contient d'ailleurs la clef de la solution des problèmes direct et inverse des rectifications. On ne peut donc que rester surpris face à la manière par laquelle Newton introduit cette relation, car c'est en passant qu'il note, sans plus, que l'abscisse $\mathsf{AG} = x$ et l'arc $\mathsf{DE} = \bar{y}$ de la courbe donnée, HI, quelle que soit cette courbe, "augmentent dans la proportion de GT à ET"[171], la droite ET étant la tangente à la courbe HI au point E.

Si on considère une courbe quelconque AMN (fig. 12), référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'origine A et d'axe AH, cela revient à affirmer que les vitesses ponctuelles p et s du mouvement de génération de l'abscisse $\mathsf{AP} = x$ et de la longueur v de l'arc AM de cette courbe sont entre elles comme sa sous-tangente $\mathsf{TP} = stg._x$ et sa tangente $\mathsf{MT} = tg._x$, ce qui revient à poser l'égalité

$$\frac{s}{p} = \frac{\frac{y}{q}\sqrt{p^2+q^2}}{y\frac{p}{q}} \tag{11.222}$$

d'où on tire sur-le-champ l'autre égalité :

$$s = \sqrt{p^2+q^2} = p\sqrt{u + \left(\frac{p}{q}\right)^2} \tag{11.223}$$

qui correspond à la formule différentielle connue, $ds = dx\sqrt{u + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Pour l'instant, Newton se limite, pourtant, à employer l'égalité (11.222) pour obtenir une relation entre la vitesse ponctuelle $\bar{q} = s$ du mouvement de génération de la longueur $\bar{y}$ de la courbe donnée et les coordonnées cartésiennes orthogonales de cette courbe, qui permette de résoudre le problème 10. Encore une fois, il ne fait que considérer un exemple, dont la généralisation est pourtant aisée. En supposant que la courbe donnée est, comme dans le cas précédent, l'hyperbole HI (fig. 8) exprimée, par rapport au système de coordonnées

[171] Cf, Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 439.

cartésiennes orthogonales d'origine A et d'axe AH par l'équation $xy = a^2$, et en posant $\mathsf{AG} = x$ et $\mathsf{GE} = y$, il tire[172]

$$\begin{aligned} \mathsf{GT} &= y\frac{p}{q} = -\frac{a^2}{x}\frac{x^2}{a^2} = -x \\ \mathsf{KT} &= -\sqrt{y^2 + \left(y\frac{p}{q}\right)^2} = -\sqrt{\frac{a^4}{x^2} + x^2} = -\frac{1}{x}\sqrt{a^4 + x^4} \end{aligned} \tag{11.224}$$

et donc, en posant encore, par simplicité, $p = u$,

$$\bar{q} = \frac{1}{x^2}\sqrt{a^4 + x^4} \tag{11.225}$$

Après avoir écrit cette égalité, Newton s'arrête, en observant qu'il ne faut ensuite que procéder comme dans l'exemple précédent, pourvu que soit donnée une équation Algébrique exprimant la relation entre la longueur $\bar{y}$ de la courbe donnée et le segment $\mathsf{MG} = \mathsf{q}$ pris sur la normale à la courbe auxiliaire AMN.

Les problèmes direct et inverse des rectifications

La solution des problèmes 9 et 10 ne fournit qu'une méthode pour rectifier les développées des courbes dont on suppose connaître le rayon de courbure (c'est-à-dire que la développée est construite à partir de sa développante). Les problèmes direct et inverse de rectification concernant des courbes quelconques (indépendamment de leur propriété d'être les développées d'autres courbes données) ne font l'objet que des problèmes 12 et 13[173]. Le problème 11[174] fonctionne comme un intermédiaire entre les problèmes 9 et 10 et les problèmes 12 et 13. En dépit de son énoncé, qui le fait apparaître comme similaire au problème 10, il est en fait résolu sans aucun recours à la construction d'une développée. Mais il semble être aussi indépendant du problème de rectification.

Comme pour les deux problèmes suivants, qui clôturent la partie géométrique du *Traité d'octobre 1666*, Newton est très rapide, en se limitant à donner des indications générales et à laisser un espace blanc pour des exemples qu'il n'ajoutera jamais : encore une fois, arrivé vers la fin de sa rédaction, Newton semble distrait par d'autres préoccupations et laisse son travail incomplet. Voici ce qu'il écrit[175] :

> The lenght of any streight line, to which the given curve line is cheifely referred, being called x, the lenght of the curve line v, & their motions of increase p & v. The valor of $\frac{v}{p}$, (found by the first probleme) being ordinately applyed at right angles to x, gives the nature of a curve line whose area is equal to (s) the lenght of the curve.
>
> And this Line thus found gives (by prob 6) other lines whose areas have any given relation to the length (s) of the given curve line.

[172]Cf, Newton (MP), I, **2**, 7, notes (141) et (142), 440.
[173]Cf, Newton (MP), I, **2**, 7, [2], respectivement 440-441 et 441.
[174]Cf, Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 440.
[175]Cf, Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 440. Pour des raisons d'uniformité j'écris ici "v" et "s", où Newton écrit "y" et "q", de sorte que "s" dénote la vitesse du mouvement de génération de v.

Malgré la rapidité de l'énoncé et l'absence de toute justification explicite, il n'est pas difficile de reconstruire l'argument de Newton : supposons que $\mathsf{AP} = x$ (fig. 12) est l'abscisse de deux courbes, référées à un même système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'origine A et d'axe AH, respectivement d'ordonnée $\mathsf{PM} = y$ et $\mathsf{PR} = z$, et que v est la longueur de la première de ces courbes et $z = \frac{s}{p}$, alors v est aussi l'aire de la deuxième courbe. Naturellement la longueur de la courbe AMN et l'aire de la courbe IJ dont il est ici question ne sont que des représentations géométriques indéterminées de la primitive de $\frac{s}{p}$. Newton semble supposer que ce rapport est exprimé par une expression Algébrique en x, disons $g(x)$, et pense cette expression, aussi bien comme une expression du rapport $\frac{s}{p}$ des vitesses ponctuelles des mouvements de génération de v et x, que comme une expression de l'ordonnée $\mathsf{PR} = z$ de la courbe IJ. La primitive de $g(x)$ est donc une expression $v = f(x)$ qu'on pourra prendre comme l'expression de l'aire d'un certain trapézoïde délimité par la courbe IJ et qui est par hypothèse l'expression de la longueur d'un certain arc de la courbe AMN. Cette aire et cette longueur seront donc égales. La détermination exacte des limites du trapézoïde délimité par la courbe IJ et de l'arc de la courbe AMN dont il est question (la primitive étant pris sous l'hypothèse que la constante dite aujourd'hui "d'intégration" soit nulle ou ait une certaine valeur établie au préalable) ne semble pas intéresser Newton.

Son argument est d'ailleurs parfaitement indépendant non seulement de la relation exprimée par les égalités (11.222) et (11.223), mais aussi de toute relation supposée avoir lieu entre la longueur d'un arc de courbe et les coordonnées cartésiennes orthogonales de cette courbe, c'est-à-dire qu'il est indépendant de toute solution des problèmes direct et inverse des rectifications et même de toute définition de la longueur d'une courbe et *a fortiori* de toute interprétation géométrique de celle-ci. En effet, la donnée de ce problème n'est pas, à regarder les choses de près, la courbe AMN, qui peut, à la rigueur, rester totalement inconnue, mais une variable v (que Newton semble d'ailleurs penser d'emblée comme une expression Algébrique où apparaît une autre variable x, prise comme principale), qu'on suppose exprimer la longueur de la courbe AMN, sans qu'il soit nécessaire de clarifier ce que cette supposition signifie au juste. Si au lieu de supposer que v exprime la longueur d'une certaine courbe, on supposait qu'elle exprime n'importe quelle autre grandeur liée au segment x par une certaine relation (qu'on peut supposer être exprimée par une égalité telle que $\frac{s}{p} = g(x)$), alors l'argument de Newton conduirait sans aucune difficulté à déterminer une courbe dont l'aire est égale à cette autre grandeur. On comprend alors que, conçu de cette manière, le problème 11 est, pour ainsi dire, géométriquement vide, ou du moins que son contenu géométrique se réduit au contenu géométrique du problème des aires, qui est d'ailleurs pensé, comme un problème géométriquement indéterminé. En particulier, le problème 11 n'a, en tant que tel, rien à faire avec le problème des rectifications.

* * *

Tout en concernant ce dernier problème, respectivement dans sa forme directe et dans sa forme inverse, les problèmes 12 et 13 ne portent pas,de même que les problèmes 5-7, sur une grandeur géométriquement déterminée. Alors que dans les problèmes 9 et 10 il était question de la longueur d'une portion bien déterminée d'une courbe, qui était identifiée avec un segment à son tour parfaitement déterminé, dans les problèmes 12 et 13 il est plutôt question de la longueur d'une courbe conçue comme une interprétation géométrique indéterminée d'une primitive.

Bien que Newton ne soit pas explicite dans la justification de la solution qu'il propose pour le premier de ces problèmes, il est clair que cette solution relève de la relation exprimée par l'égalité (11.223), qu'il énonce explicitement — en forme converse[176] — lors de la solution du deuxième. Il convient donc de considérer d'abord cette relation.

Sans aucune justification, Newton observe que si l'on prend sur l'ordonnée PM (fig. 12) d'une courbe référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales un point W quelconque, et qu'on trace de ce point la parallèle WX à l'axe AH à l'encontre de la tangente MT, alors les segments XW, WM et XM sont entre eux comme les vitesses ponctuelles p, q et s des mouvement de génération des segments $\mathsf{AP} = x$, $\mathsf{PM} = y$ et de l'arc de courbe $\mathsf{AM} = v$[177], ce dernier arc étant pris directement au lieu de sa longueur.

Si on pense la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de (la longueur de) l'arc AM, ou, pour être plus précis, la composante scalaire de cette vitesse, comme la composante scalaire de la vitesse du point m d'intersection entre les droites orthogonales Mm et PM qui translatent l'une au long de la direction de l'autre, alors ceci n'est qu'une conséquence immédiate de la proposition 6. Le point délicat concerne alors l'identification de la vitesse ponctuelle s du mouvement de génération de v avec la composante scalaire de la vitesse ponctuelle du point M. Dans la solution des problèmes 9 et 10, Newton semble concevoir la longueur d'un arc de courbe comme un segment qu'on suppose pouvoir appliquer de manière ordonnée à l'arc en question. Par le biais de cette identification, il semble en revanche penser cette longueur comme le chemin du point qui décrit la courbe, pris en faisant abstraction de sa configuration. Le problème direct des rectifications se présente alors, non plus comme le problème de la détermination d'un certain segment, mais comme le problème de la détermination de l'expression d'une variable engendrée par un mouvement dont on suppose connaître la vitesse ponctuelle. Si la courbe est référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, c'est-à-dire qu'elle est conçue comme la trace du mouvement du point d'intersection de deux droites orthogonales translatant l'une au long de la direction de l'autre, la relation exprimée par l'égalité (11.223) vient ainsi à fournir davantage une définition de la longueur d'un arc de courbe — en tant qu'objet d'un calcul possible —, qu'une propriété de cette longueur qui en permet la détermination. Il est alors clair que l'arc de courbe dont il est question perd sa détermination géométrique. Au lieu de se référer à l'arc AM Newton aurait pu se référer à n'importe quel autre arc pris sur la même courbe ANM. Ce n'est donc pas un hasard que, à partir du troisième exemple du problème 10, le langage de Newton ne soit pas stable : la variable v est identifiée tantôt avec un arc de courbe — dont la détermination particulière (faite en général sur une figure) est parfaitement arbitraire —, tantôt avec la longueur de la courbe à laquelle cet arc est censé appartenir.

La théorie des rectifications que Newton édifie sur la relation exprimée par l'égalité (11.223) se trouve ainsi concernée par la même ambiguïté que celle qui concerne sa théorie des aires. La notion de longueur d'une courbe, ou d'un arc de courbe, une fois libérée des implications indivisibilistes, dont relèvent autant le théorème de van Heureat que l'argument qui a conduit Newton à sa solution des problèmes 9 et 10, perd sa détermination géométrique et se confond, comme on l'a dit, avec une simple interprétation géométrique indéterminée d'une primitive. Pour retourner a une grandeur géométrique déterminée, New-

[176] Cf. ci-dessous, p. 588.

[177] Cf, Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 441.

ton ne peut que se réclamer d'une figure, remplaçant subrepticement la longueur d'une courbe par un arc particulier pris sur cette courbe, dont le choix reste pourtant parfaitement arbitraire. Évidemment, également dans ce cas, Newton aurait pu identifier ses primitives (où la constante dite aujourd'hui "d'intégration" est supposée être nulle) avec des longueurs d'arcs de courbe exactement déterminés. Comme pour le problème des aires, le point est que pour justifier cette identification, il aurait du se réclamer d'un argument essentiellement étranger à celui qui le conduit à l'égalité (11.223) et qui fonde sa théorie.

Une différence de taille est pourtant à remarquer entre le traitement newtonien du problème des aires et celui du problème des rectifications. La relation exprimée par l'égalité (11.139) — qui fonde la théorie newtonienne des aires — porte sur une notion d'aire d'une courbe dépendant de manière intrinsèque du fait de référer cette courbe à un système de coordonnées cartésiennes (qui, par simplicité, sont prises comme orthogonales). La relation exprimée par l'égalité (11.223) n'est en revanche qu'une conséquence d'une manière de concevoir la longueur d'une courbe qui ne dépende aucunement du système de coordonnées auxquelles cette courbe est référée. Si, en l'occurrence, cette égalité tient à des coordonnées cartésiennes orthogonales de la courbe à laquelle elle se réfère, il est facile d'établir d'autres égalités analogues, exprimant une relation entre la vitesse ponctuelle du mouvement de génération de la longueur v d'une courbe et d'autres grandeurs caractérisant cette courbe de n'importe quelle manière. Tout ce que Newton semble exiger, pour pouvoir introduire la notion de longueur d'une courbe, est que cette courbe soit conçue comme la trace d'un mouvement.

Cela étant dit, il est possible de passer aux solutions que Newton propose pour les problèmes 12 et 13.

* * *

Pour ce qui est du problème 12, Newton ne choisit pas la manière la plus simple pour exposer sa solution. En supposant que x est l'abscisse d'une courbe et v sa longueur, il prescrit d'opérer comme dans la solution du problème 1 pour trouver une équation Algébrique qui exprime la relation entre x et $\frac{s}{p}$ et de passer de cette équation à l'expression de y en opérant comme dans la solution du problème posé par la proposition 8. Or, s'il est donné une équation Algébrique $G(x, v) = 0$ exprimant la relation entre v et x, alors il suffit d'appliquer l'algorithme énoncé par la proposition 7 pour trouver une égalité $\frac{s}{p} = g(x)$, donnant l'expression du rapport $\frac{s}{p}$ en termes de x. Si on opère sur cette expression comme dans la solution du problème posée par la proposition 8, on ne revient pourtant, à une constante près, qu'à l'équation $G(x, v) = 0$, qui exprime d'ailleurs, dès le départ, une solution du problème. En revanche, si aucune équation telle que $G(x, v) = 0$ n'est donnée, alors il est difficile de comprendre comment, en opérant comme dans la solution du problème 1, on peut parvenir à une égalité telle que $\frac{s}{p} = g(x)$ sur laquelle opérer ensuite comme dans la solution au problème posé par la proposition 8. Il est donc clair que Newton se réclame implicitement de l'égalité (11.223). Sa prescription revient ainsi à la suivante : à supposer qu'une courbe est référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales x et y, il s'agit de chercher, comme on le fait dans la solution du problème 1, la valeur du rapport $\frac{p}{q}$, de substituer cette valeur dans l'égalité (11.223) pour obtenir la valeur du rapport $\frac{s}{p}$ et d'opérer ensuite comme dans la solution du problème posé par la proposition 8. Cette dernière étape n'est pourtant possible que si la valeur du rapport $\frac{s}{p}$ et donc celle du rapport

$\frac{q}{p}$ sont (exprimées par) des expressions Algébriques de la seule variable x. Newton suppose donc, implicitement, que la courbe qu'on cherche à rectifier n'est pas seulement référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales, mais est aussi exprimée, par rapport à ce système, par une équation Algébrique, telle qu'en appliquant l'algorithme énoncé par la proposition 7, on sache passer de cette équation à une expression Algébrique du rapport $\frac{q}{p}$, où n'apparaît que la variable x. Encore une fois, plus qu'un problème géométrique, Newton aborde ainsi un problème algorithmique, tenant d'abord à une application de l'algorithme énoncé par la proposition 7, et ensuite à la recherche d'une primitive. En parlant de longueur d'une courbe, il ne fait que donner à ce problème l'allure extérieure d'un problème géométrique.

Il ne sera pas nécessaire, pour confirmer ce jugement, d'insister sur le fait que si on en reste à la solution du problème posé par la proposition 8, on ne peut pas trouver la longueur d'un arc de courbe déterminé. L'absence d'exemples empêche de surcroît Newton de montrer comment il est possible, en s'appuyant sur des considérations indépendantes de l'égalité (11.223), de trouver une telle longueur.

* * *

Il ne reste que le problème 13, le problème inverse des rectifications.

Newton suppose d'emblée que la longueur de la courbe qu'il faut déterminer est "exprimée par une équation donnée"[178], disons $G(x, v) = 0$, qui est clairement supposée être une équation Algébrique entière, et qui exprime la relation qui lie cette longueur v à l'abscisse x de cette courbe, qui est à son tour censée être référée à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales. Il suppose aussi qu'on sait tirer de cette équation, par le biais de l'algorithme énoncé par la proposition 7, une expression Algébrique du rapport $\frac{s}{p}$ dans laquelle n'apparaît que la variable x. Après avoir tiré, grâce à l'argument discuté ci-dessus, l'égalité (11.223), dans sa forme converse :

$$q = \sqrt{s^2 - p^2} \tag{11.226}$$

il prescrit de se réclamer de cette égalité pour obtenir une nouvelle équation exprimant la relation entre x et $\frac{q}{p}$ et d'opérer sur cette équation comme dans la solution du problème posé par la proposition 8, pour trouver l'ordonnée y de la courbe cherchée.

Si on suppose que $\frac{s}{p} = f(x)$, de l'égalité (11.226) il est en effet aisé de tirer l'égalité

$$\frac{q}{p} = \sqrt{[f(x)]^2 - u} \tag{11.227}$$

qui fournit une expression du rapport $\frac{q}{p}$ dans laquelle n'apparaît que la variable x, sur la quelle on peut justement opérer comme dans la solution du problème posé par la proposition 8 pour obtenir une expression de l'ordonnée y de la courbe cherchée, en termes de son abscisse x.

C'est tout ce que Newton nous dit à propos du problème inverse des rectifications. Il est aisé de remarquer que l'ordonnée y de la courbe cherchée obtenue de cette manière souffre de la même indétermination géométrique que la longueur v de cette courbe. Cette

[178]Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [2], 441.

indétermination n'est pourtant due qu'à la présence d'une constante indéterminée dans l'expression de cette ordonnée, et n'a donc aucune conséquence sur la "nature" de la courbe cherchée, dont seule reste indéterminée la position par rapport à l'axe du système de coordonnées cartésiennes orthogonale auquel cette courbe est référée.

11.3 La troisième partie du traité : les applications mécaniques des propositions 1-8

La troisième et dernière partie du *Traité d'octobre 1666*[179] est consacrée à la solution de cinq problèmes concernant le centre et les axes de gravité d'une figure plane quelconque. Bien que distincts entre eux, ces cinq problèmes relèvent tous d'un questionnement et (mis à part le premier) d'une méthode unique : il s'agit de déterminer des conditions d'équilibre, se rapportant à la théorie des leviers, Newton résout ses problèmes en "pesant" les figures en question, et le fait, à chaque fois, en considérant ces figures comme composées par des rectangles dont une dimension est infiniment petite. Bien qu'il continue à parler de vitesses ponctuelles, et à se rapporter aux propositions 7 et 8, il semble de ce fait adopter une approche fondée sur des conceptions infinitésimalistes ou indivisibilistes. Cet approche est d'ailleurs fondé sur des résultats classiques remontant au *Traité de l'équilibre des figures planes* d'Archimède[180], et rappelle des arguments que le même Archimède avait, à l'insu de Newton, utilisés dans *La méthode*[181].

Par son traitement de ces cinq problèmes, Newton parvient ainsi à esquisser une théorie de l'équilibre des figures planes, où l'algorithme des vitesses ponctuelles ne fournit qu'un outil commode pour retrouver rapidement des résultats classiques, les généraliser et les formuler d'une nouvelle manière. Cette théorie porte sur deux définitions et deux "lemmes" que Newton se contente d'énoncer sans aucune justification[182]. La simplicité mathématique des méthodes de Newton et la relative indépendance de la problématique à laquelle elles s'appliquent par rapport aux thèmes principaux discutés dans ma dissertation me permettent de me limiter à une exposition rapide, que je ferai suivre d'un court commentaire d'ensemble.

La première définition est *de facto* inutile, car Newton y définit le "centre de mouvement" d'un corps comme le point qui reste en repos lorsque ce corps "tourne sans mouvement progressif", et observe que ce point coïnciderait avec le centre de gravité si les "rayons de gravité" étaient parallèles entre eux, et non pas convergents vers le centre de la terre[183]. Or dans la suite, Newton ne se réclame que du centre de gravité des figures qu'il étudie et il entend celui-ci de manière classique, comme le centre d'équilibre de ces figures. La deuxième définition ne sert en revanche que pour qualifier d' "axe de gravité ou de mouvement" toute droite passant par le centre de gravité, encore que ces droites ne soient traitées dans la suite que comme des diamètres d'équilibre. Quant aux lemmes, Newton établit dans le premier

[179] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [3], 441-448.
[180] Cf. Archimède (OM), II, 75-125. Pour les rapports entre les textes de Newton et d'Archimède, cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note (152), 443, où Whiteside fait l'hypothèse, fort plausible, que Newton ne possédât pas une connaissance directe du traité d'Archimède, se fondant plutôt sur "l'un ou l'autre des travaux portant sur la recherche du centre de gravité des figures mathématiques que ce traité inspira en Europe à partir de la moitié du XVI$^{\text{ème}}$ siècle".
[181] Cf. Archimède (OM), III, 77-127.
[182] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [3], 441-442.
[183] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [3], 441-442 et note (151), 441.

qu'en parlant de la position d'un corps, il se référera à la position de son centre de gravité — qui, dans le cas d'un segment, d'un cercle ou d'un parallélogramme, coïncide avec le centre géométrique —, et il énonce dans le deuxième le principe des leviers d'Archimède, dans le cas des corps qui sont en équilibre par rapport à un axe rectiligne[184] :

> Those weights doe equiponderate whose quantitys are reciprocally proportionall to their distance from the common axis of Gravity, supposing their centers of Gravity to bee in the same plaine with the common axis of Gravity.

Grâce à ces deux lemmes, le problème de la détermination des conditions d'équilibre de deux figures planes quelconques se réduit au problème de la détermination du centre de gravité de ces figures. Ceci est le dernier des cinq problèmes résolus par Newton . Sa solution n'est pourtant possible qu'à l'aide de la solution des quatre problèmes précédents qui marquent donc des étapes intermédiaires dans la solution de ce problème général.

Les deux premiers[185] problèmes, ne sont pas numérotés. Newton assigne pourtant le numéro 15 au troisième problème, ce qui nous pousse à supposer qu'il considérait le premier problème, qui dans la numérotation ajoutée par Whiteside est le problème 14_1, comme un simple scolie. Ce problème ne concerne en effet que la détermination du centre de la gravité d'un polygone, et Newton le résout de manière classique, en identifiant d'abord le centre de gravité d'un triangle avec son centre géométrique, et en reconnaissant ensuite le centre de gravité d'un polygone quelconque comme étant le point d'intersection des droites qui joignent les centres de gravité de deux parties de ce polygone séparées par des diagonales opposées.

Le deuxième problème, qui dans la numérotation ajoutée par Whiteside est le problème 14_2, concerne la recherche d'un trapézoïde rectangle qui fasse équilibre, dans une position donnée, avec un autre trapézoïde rectangle donné, par rapport à un axe de gravité qui est aussi donné. Newton illustre la solution de ce problème par quatre exemples faisant intervenir des trapézoïdes disposés, l'un par rapport à l'autre, de manière distincte. Cette solution tient pourtant à un seul principe fondamental, sur lequel est fondée *de facto* toute la théorie de l'équilibre des figures planes proposée par Newton : deux rectangles dont une dimension est infiniment petite (et qui peuvent donc être traités comme deux droites) s'équilibrent par rapport à un axe donné si les produits de leur aire par la distance de leur centre de gravité à cet axe sont égaux ; si deux figures planes sont composées chacune par une infinité de rectangles parallèles dont une dimension est infiniment petite qui s'équilibrent un à un, relativement à un axe fixé, alors ces figures s'équilibrent aussi relativement à cet axe[186].

Newton semble supposer que ce principe dérive directement des deux lemmes précédents, et il n'en fournit aucune justification explicite. Quelle que soit sa justification, si on accepte ce principe, alors il suffit de supposer que les trapézoïdes dont il est question sont délimités par des courbes référées à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales dont l'axe est colinéaire à la base de ces trapézoïdes, et que l'aire de tout rectangle infiniment petit composant ces trapézoïdes est donnée par le produit d'une ordonnée de ces courbes et

[184] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [3], 442. L'axe rectiligne dont il est question est censé diviser un plan en deux parties ; les deux figures dont il question sont censées être en équilibre, par rapport à cet axe, si ce plan ne tourne pas autour de cet axe lorsque ces figures sont respectivement appuyées sur ses deux parties, en "pesant" sur elles.

[185] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [3], 443-446.

[186] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [3], 444-445 et note (159), 444.

d'un incrément infiniment petit de l'abscisse correspondante, pour obtenir une condition caractérisant la courbe cherchée. C'est exactement ce que fait Newton. Pour plus de simplicité, il suppose de surcroît que l'axe d'équilibre est parallèle soit aux ordonnées de la courbe qui délimite le trapézoïde donné soit à l'axe auquel elle s'appliquent, et que la base du trapézoïde cherché est perpendiculaire ou parallèle à cet axe.

On retrouve alors quatre cas possibles, que Newton considère l'un après l'autre. Les figures $13a$, $13b$, $13c$ et $13d$[187] illustrent ces cas. L'axe d'équilibre est dans chaque cas la droite OI, le trapézoïde donné est celui de gauche, délimité par la courbe AM, référée au système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'origine A et d'axe AH, et le trapézoïde cherché est celui de droite, délimité par la courbe EN, référée au système de coordonnées cartésiennes orthogonales d'origine E et d'axe EK. Si on pose à chaque cas $\mathsf{AP} = x$, $\mathsf{PM} = z$, $\mathsf{EQ} = y$et $\mathsf{QN} = v$, et qu'on suppose que les incréments infiniment petits de x et y sont respectivement égaux à po et qo (où p et q sont les vitesses ponctuelles des mouvements de génération de x et y, et o est un facteur constant), alors les aires des rectangles infiniment petits composant ces trapézoïdes sont respectivement égales à zpo et vqo. Le facteur o de ces produits étant constant il peut être éliminé d'emblée. C'est ce que fait Newton, en supposant dès le début que ces aires sont égales à zp et vq. Les seules choses qui changent dans les quatre cas sont les distances des centres de gravité de ces rectangles à l'axe d'équilibre.

Dans le premier cas, ces distances sont respectivement égales à $\mathsf{OP} = x + \mathsf{AO}$ et à $\mathsf{OQ} = y + \mathsf{OE}$. Dans le deuxième, elles sont respectivement égales à $\mathsf{OP} = x + \mathsf{AO}$ et à $\frac{1}{2}v + \mathsf{OE}$ (car le centre de gravité d'une droite, dans ce cas la droite $\mathsf{QN} = v$, est son point moyen). Dans le troisième, elles sont respectivement égales à $\frac{1}{2}z + \mathsf{AO}$ et à $y + \mathsf{OE}$. Enfin dans le quatrième cas, elles sont respectivement égales à $\frac{1}{2}z + \mathsf{AO}$ et à $\frac{1}{2}y + \mathsf{OE}$. En posant $\mathsf{AO} = a$ et $\mathsf{OE} = b$, il s'ensuit que les conditions d'équilibre caractérisant l'ordonnée v de la courbe EN qui délimite le trapézoïde cherché sont exprimées respectivement par les égalités[188] :

$$\begin{aligned} &zp\,(x + a) = vq(y + b) \\ &zp\,(x + a) = \frac{1}{2}v^2q + vqb \\ &\frac{1}{2}z^2p + zpa = vq(y + b) \\ &\frac{1}{2}z^2p + zpa = \frac{1}{2}v^2q + vqb \end{aligned} \tag{11.228}$$

En supposant, comme le fait Newton, que la courbe AM est exprimée, par rapport au système de coordonnées cartésiennes à laquelle elle est référée, par une équation Algébrique entière $F(x, z) = 0$, et qu'une autre équation de la sorte, disons $\Psi(x, y) = 0$, exprime le rapport entre les abscisses x et y, pour résoudre le problème 14_2, il suffit d'employer l'algorithme énoncé par la proposition 7, pour tirer de ces égalités une nouvelle équation Algébrique $G(y, v) = 0$ exprimant la courbe EN, par rapport au système de coordonnées

[187] J'ai généralisé ici les figures de Newton en traçant des courbes quelconques au lieu des courbes particulières considérées par Newton. Pour les figures originales, cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [3], 443-445.

[188] Newton n'énonce explicitement que les deux premières et la quatrième des égalités, en supposant dans les deux premières $a = b = 0$, et $a = 0$ dans la quatrième [cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [3], 444]. Quant à la troisième, il ne fait que l'appliquer dans le traitement de son troisième exemple [cf. *ibid.*, 445]

cartésiennes à laquelle elle est référée. Cela est en général aisé, et Newton ne fait que donner plusieurs exemples de ce procédé, qu'il n'est pas nécessaire de reporter ici[189].

Le principe qui a conduit à la solution du problème 14_2 conduit aussi à la solution du problème 15[190] : en supposant donné un trapézoïde APM (fig. 14) délimité par une courbe quelconque AM référée à un système de coordonnées cartésiennes quelconques d'origine A et d'axe AH, il s'agit d'en déterminer "la gravité" relativement à un axe HK donné par position. Newton définit la gravité de l'ordonnée PM par rapport à l'axe HK comme le produit de cette ordonnée par la distance SR qui sépare son centre de gravité — c'est-à-dire son point moyen — de cet axe. La gravité du trapézoïde APM par rapport à l'axe HK pourra alors être pensée comme l'aire d'un autre trapézoïde APN délimité par une nouvelle courbe AN dont l'ordonnée PN est constamment égale au produit de l'ordonnée PM de la courbe AM par la distance qui sépare son point moyen de l'axe HK. En posant $\mathsf{AP} = x$, $\mathsf{PM} = y$, $\mathsf{PN} = z$ et $\mathsf{SR} = v$, on aura alors l'égalité : $z = yv$. Si la courbe AM est exprimée par une équation algébrique qu'on peut mettre sous la forme $y = f(x)$, l'angle $\mathsf{A\hat{H}K}$ et la distance AH étant donnés, il n'est pas difficile de parvenir à exprimer $\mathsf{SR} = v$ en termes de x. En supposant qu'on ait $v = g(x)$, on aura alors $z = [f(x)]\,[g(x)]$ et il suffit donc de résoudre le problème 7 par rapport à la courbe AN ainsi déterminée pour trouver la gravité cherchée. Newton ne présente qu'un seul exemple de ce procédé, où la courbe AM est une parabole d'équation $y^2 = ax$ et où l'axe HK passe par A et est parallèle à l'ordonnée $\mathsf{PM} = y$[191]. Il ne sera pas nécessaire de l'exposer ici. Il suffit d'observer que pour calculer l'aire du trapézoïde APN, Newton se limite à chercher la primitive de l'expression $[f(x)]\,[g(x)]$ et à multiplier cette dernière par un rapport constant qu'on identifie aujourd'hui avec le sinus de l'angle $\mathsf{A\hat{P}M}$ formé par les coordonnées x et y. Dans le cas considéré par Newton, cette primitive (où la constante dite aujourd'hui "d'intégration" est, comme d'habitude, supposée être nulle) exprime l'aire du trapézoïde APN pris à partir de la limite constante $x = 0$, ce qui correspond à la figure dessinée par Newton. Pourtant, Newton ne fait aucun effort pour clarifier en général le rapport entre une primitive et une aire, bien que la solution du problème posé ne puisse pas faire abstraction de la détermination exacte des limites des trapézoïdes dont l'aire est exprimée par la primitive trouvée.

Indépendamment de la détermination exacte de ces limites, il est, de toute façon, aisé de comprendre que la courbe AM peut être exprimée par une équation de la forme $y = f(x)$, où $f(x)$ est une expression Algébrique qui ne possède pas de primitive Algébrique, encore que l'expression $[f(x)]\,[g(x)]$ de l'ordonnée PN de la courbe AN en possède une. Il se peut donc que la gravité d'un certain trapézoïde par rapport à un axe donné soit exprimée par une expression Algébrique, encore que son aire ne le soit pas. Ceci nous permet de comprendre l'attitude de Newton vis-à-vis du problème 16[192]. Ce problème concerne la recherche d'un axe de gravité d'une figure plane, c'est-à-dire d'un axe qui partage la figure en question en

[189] Après avoir donné ces exemples, Newton observe [f. Newton (MP), I, **2**, 7, [3], 446] qu'il est aisé de généraliser la méthode ici employée au cas où les coordonnées cartésiennes auxquelles les courbes AN et EN sont rapportées ne sont pas orthogonales, ou au cas où les trapézoïdes délimités par ces courbes ne sont pas censés être en équilibre mais sont tels que leurs poids, relativement à l'axe OI, soient dans une relation donnée, (exprimée, évidemment, par une équation Algébrique entière).

[190] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [3], 446-447.

[191] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [3], 447. Encore une fois Newton laisse, à la suite de cet exemple un espace blanc destiné à être rempli par un deuxième exemple — où la courbe donnée est censée être un cercle — qu'il ne fait pourtant qu'annoncer [cf. *ibid.*, note 167, 446].

[192] Cf.Newton (MP), I, **2**, 7, [3], 447-448.

deux parties qui s'équilibrant l'une et l'autre par rapport à cet axe. Newton expose deux solutions possibles pour ce problème[193].

La première solution procède comme il suit : on trouve d'abord l'aire de cette figure (cette aire, que Newton qualifie plutôt de "quantité" de cette figure[194], étant la somme des aires de deux ou plusieurs trapézoïdes en lesquels il convient de partager cette figure) et sa gravité par rapport à un axe quelconque, et on trace ensuite un autre axe parallèle à ce dernier, à une distance de celui-ci égale au rapport entre la gravité et l'aire de la figure donnée ; ce deuxième sera alors une axe de gravité de cette figure. Newton se limite à donner ces indications. Pour éclairer la situation, supposons qu'il s'agisse de trouver un axe de gravité du trapézoïde APM, la courbe AM étant, comme ci-dessus, référée aux système de coordonnées d'origine A et d'axe AH, et exprimée, par rapport à ce système, par l'équation $y = f(x)$. Si on suppose encore que $\mathsf{SR} = v = g(x)$, alors il suffira de prendre sur la droite SR un point O, tel que

$$\mathsf{RO} = \sin\alpha \left(\frac{s\left[\sum_0^x [g(x)f(x)]\right]}{s\left[\sum_0^x [f(x)]\right]} \right) \tag{11.229}$$

α étant l'angle $\mathsf{A\hat{P}M}$ formé par les coordonnées x et y, et de tracer de ce point la perpendiculaire VW à la droite SR.

Cette méthode ne permet pourtant de construire effectivement l'axe de gravité de la figure donnée qu'à condition de pouvoir exprimer les deux aires $s\left[\sum_0^x [g(x)f(x)]\right]$ et $s\left[\sum_0^x [f(x)]\right]$ par des expressions Algébriques. Si en revanche la deuxième de ces aires ne se laisse pas exprimer par une expression Algébrique, alors le même problème peut être résolu d'une autre manière. Et c'est justement cette autre solution que Newton expose à la suite de la première : d'abord on détermine la gravité de la figure donnée par rapport à deux axes quelconques non parallèles entre eux, donnés par position ; on détermine ensuite un point quelconque dont les distances des ces axes sont entre elles comme ces granités, et on trace la droite qui joint ce point au point d'intersection de ces axes ; cette droite est un axe de gravité de la figure donnée. Il se peut naturellement que les deux axes dont il est question soient tels que les granités de la figure donnée par rapport à ces axes soient l'une et l'autre exprimées par des expressions Algébriques, encore que l'aire de cette figure ne puisse pas l'être. Cette deuxième méthode peut ainsi permettre de construire l'axe de gravité cherché, dans des cas où la première méthode ne le permet pas.

Le problème 16 ayant été résolu, la solution du problème 17[195], le dernier du *Traité*, est immédiate. Comme on l'a déjà anticipé, ce problème concerne en fait la recherche du centre de gravité d'une figure plane donnée, qui n'est rien d'autre que le point d'intersection de deux axes de gravité quelconques de cette figure. C'est tout ce que nous dit Newton, sans juger nécessaire d'ajouter des exemples.

* * *

Encore que, lors de son exemple au problème 15, Newton ne se donne pas la peine d'éclairer la nature de la relation qui lie la primitive d'une expression Algébrique à l'aire

[193] Encore une fois, Newton se limite à laisser un espace blanc après l'exposition de ces solutions, destiné à être rempli par des exemples qu'il ne fournira jamais [cf. Newton (MP), I, **2**, 7, note (169), 448].

[194] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [3], 447.

[195] Cf.Newton (MP), I, **2**, 7, [3], 448.

du trapézoïde délimité par cette courbe, son traitement des cinq problèmes précédents, concernant l'équilibre des figures planes, marque un retour à des arguments intrinsèquement géométriques, indépendants de l'algorithme énoncé par la proposition 7. La notion de vitesse ponctuelle semble même disparaître, en tant que telle, pour laisser sa place à des considérations de nature infinitésimaliste qui ne se servent localement de la considération d'une vitesse ponctuelle que pour exprimer des incréments infiniment petits d'un segment variable. Les exemples que Newton considère et la manière par laquelle il prescrit d'appliquer ces méthodes générales dans les différents cas particuliers montrent pourtant que ce dernier ne pense les courbes concernées par ses problèmes que comme des représentations géométriques d'équations Algébriques entières. L'attention vers la nature intrinsèquement géométrique des problèmes considérés et de leurs solutions qui avait caractérisé l'approche du problème des tangentes semble désormais avoir laissé la place à une confiance, qui se révèle quelque fois aveugle, dans le pouvoir du formalisme Algébrique.

11.4 Annexe

Table de primitives pour des expressions irrationnelles de $\frac{q}{p}$ donnée dans le *Traité d'octobre 1666*[196].

11.4.1 Primitives obtenues par l'application de la méthode des coefficients indéterminées

1. [197] $\frac{q}{p} = R\sqrt{S} \quad : \quad \begin{cases} R = cx^{kn-1} \\ S = a + bx^n \end{cases} \quad ; \quad [k = 1, ..., 5]$

$$y = P\sqrt{S}$$

$$\begin{array}{lll} k=1 & : & P = \frac{2c}{3nb}\left[bx^n + a\right] \\ k=2 & : & P = \frac{2c}{15nb^2}\left[3b^2x^{2n} + abx^n - 2a^2\right] \\ k=3 & : & P = \frac{2c}{105nb^3}\left[15b^3x^{3n} + 3ab^2x^{2n} - 4a^2bx^n + 8a^3\right] \\ k=4 & : & P = \frac{6c}{945nb^4}\left[35b^4x^{4n} + 5ab^3x^{3n} - 6a^2b^2x^{2n} + 8a^3bx^n + 16a^4\right] \\ k=5 & : & P = \frac{6c}{10395nb^5}\left[\begin{array}{c} 315b^5x^{5n} + 35ab^4x^{4n} - 40a^2b^3x^{3n} + \\ +48a^3b^2x^{2n} - 64a^4bx^n + 128a^5 \end{array}\right] \end{array}$$

2. [198] $\frac{q}{p} = \frac{R}{\sqrt{S}} \quad : \quad \begin{cases} R = cx^{kn-1} \\ S = a + bx^n \end{cases} \quad ; \quad [k = 1, ..., 5]$

$$y = P\sqrt{S}$$

$$\begin{array}{lll} k=1 & : & P = \frac{2c}{nb} \\ k=2 & : & P = \frac{2c}{3nb^2}\left[bx^n - 2a\right] \\ k=3 & : & P = \frac{2c}{15nb^3}\left[3b^2x^{2n} - 4abx^n + 8a^2\right] \\ k=4 & : & P = \frac{6c}{105nb^4}\left[5b^3x^{3n} - 6ab^2x^{2n} + 8a^2bx^n - 16a^3\right] \\ k=5 & : & P = \frac{6c}{945nb^5}\left[35b^4x^{4n} - 40ab^3x^{3n} + 48a^2b^2x^{2n} - 64a^3bx^n + 128a^4\right] \end{array}$$

[196] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 406-410 et la section 11.1.3, ci-dessus.
[197] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 406.
[198] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 406-407.

3. [199] $\frac{q}{p} = R\sqrt{S}$: $\left\{ \begin{array}{l} R = bx^{-1} - \frac{a}{2}x^{-n-1} \\ S = ax^n + bx^{2n} \end{array} \right.$

$$y = P\sqrt{S}$$

$$P = \frac{a}{n}x^{-n} + \frac{b}{n}$$

4. [200] $\frac{q}{p} = R\sqrt{S}$: $R = \left\{ \begin{array}{l} (-)^k \left[\prod_{i=0}^{k-1} (2i+1)\right] a^{k-1}x^{n-1} + \\ \left[\prod_{i=1}^{k-1} (2i+4)\right] b^{k-1}x^{kn-1} \end{array} \right\}$; $[k = 2, ..., 5]$
$S = ax^n + bx^{2n}$

$$y = P\sqrt{S}$$

$k = 2$: $P = \frac{2x^n}{n}\left[bx^n + a\right]$
$k = 3$: $P = \frac{2x^n}{n}\left[6b^2x^{2n} + abx^n - 5a^2\right]$
$k = 4$: $P = \frac{2x^n}{n}\left[48b^3x^{3n} + 6ab^2x^{2n} - 7a^2bx^n + 35a^3\right]$
$k = 5$: $P = \frac{6x^n}{n}\left[80b^4x^{4n} - 64ab^3x^{3n} - 18a^2b^2x^{2n} + 21a^3bx^n - 105a^4\right]$

5. [201] $\frac{q}{p} = \frac{R}{\sqrt{S}}$: $R = \left\{ \begin{array}{l} \left[\prod_{i=1}^{k} (2i-1)\right] ax^{kn-1} + \\ 2kbx^{(k+1)n-1} \end{array} \right\}$; $[k = 1, 2]$
$S = ax^n + bx^{2n}$

$$y = P\sqrt{S}$$

$k = 1$: $P = \frac{2}{n}$
$k = 2$: $P = \frac{2x^n}{n}$

6. [202] $\frac{q}{p} = \frac{R}{\sqrt{S}}$: $R = \left\{ \begin{array}{l} \left[\prod_{i=1}^{k} (2i-1)\right] a^{k-1}x^{2n-1} - \\ \left[\prod_{i=2}^{k} (2i)\right] b^{k-1}x^{(k+1)n-1} \end{array} \right\}$; $[k = 3, 4]$
$S = ax^n + bx^{2n}$

$$y = P\sqrt{S}$$

$k = 3$: $P = \frac{2x^n}{n}\left[-4bx^n + 5a\right]$
$k = 4$: $P = \frac{2x^n}{n}\left[24b^2x^{2n} - 28abx^n + 35a^2\right]$

[199] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 407.
[200] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 407.
[201] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 408.
[202] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 408.

7. [203] $\frac{q}{p} = \frac{R}{\sqrt{S}}$: $\begin{array}{l} R = acx^{2n-1} + bcx^{3n-1} \\ S = a^2 - 2abx^n - 3b^2x^{2n} \end{array}$; $[k = 3, 4]$

$$y = P\sqrt{S}$$

$$P = \frac{c}{6nb^2}\left[bx^n + a\right]$$

11.4.2 Primitives obtenues par substitution

1. [204] $\frac{q}{p} = g(x) = cx^{-1}\sqrt{ax^n + bx^{2n}}$

$$y = \square\left(\varphi(z)\right)$$

$$\begin{array}{rl} z = \phi(x) = & \sqrt{x^n} \\ \frac{r}{p} = \psi(x) = & \frac{nx^{n-1}}{2\sqrt{x^n}} \\ \varphi(z) = \frac{g(\phi^{-1}(z))}{\psi(\phi^{-1}(z))} = & \frac{2c}{n}\sqrt{a + bz^2} \end{array}$$

2. [205] $\frac{q}{p} = g(x) = cx^{n-1}\sqrt{ax^n + bx^{2n}}$

$$y = \square\left(\varphi(z)\right)$$

$$\begin{array}{rl} z = \phi(x) = & x^n \\ \frac{r}{p} = \psi(x) = & nx^{n-1} \\ \varphi(z) = \frac{g(\phi^{-1}(z))}{\psi(\phi^{-1}(z))} = & \frac{c}{n}\sqrt{az + bz^2} \end{array}$$

3. [206] $\frac{q}{p} = g(x) = \frac{cx^{2n-1}}{\sqrt{ax^n + bx^{2n}}}$

$$y = \square\left(\varphi(z)\right)$$

$$\begin{array}{rl} z = \phi(x) = & \sqrt{a + bx^n} \\ \frac{r}{p} = \psi(x) = & \frac{nbx^{n-1}}{2\sqrt{a+bx^n}} \\ \varphi(z) = \frac{g(\phi^{-1}(z))}{\psi(\phi^{-1}(z))} = & \frac{2c}{nb}\sqrt{\frac{z^2-a}{b}} \end{array}$$

4. [207] $\frac{q}{p} = g(x) = cx^{n-1}\sqrt{a + bx^n + dx^{2n}}$

$$y = \square\left(\varphi(z)\right)$$

$$\begin{array}{rl} z = \phi(x) = & x^n \\ \frac{r}{p} = \psi(x) = & nx^{n-1} \\ \varphi(z) = \frac{g(\phi^{-1}(z))}{\psi(\phi^{-1}(z))} = & \frac{c}{n}\sqrt{a + bz + dz^2} \end{array}$$

[203] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 410.
[204] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 408.
[205] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 408.
[206] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 409.
[207] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 409.

5. [208] $\frac{q}{p} = g(x) = cx^{n-1}\sqrt{\frac{d+ex^n}{a+bx^n}}$

$$y = \square\left(\varphi(z)\right)$$

$$\begin{aligned} z = \phi(x) = &\quad \sqrt{a+bx^n} \\ \tfrac{r}{p} = \psi(x) = &\quad \tfrac{nbx^{n-1}}{2\sqrt{a+bx^n}} \\ \varphi(z) = \tfrac{g(\phi^{-1}(z))}{\psi(\phi^{-1}(z))} = &\quad \tfrac{2c}{nb\sqrt{b}}\sqrt{bd-ae+ez^2} \end{aligned}$$

6. [209] $\frac{q}{p} = g(x) = cx^{3n-1}\sqrt{\frac{3a+bx^n}{-a+bx^n}}$

$$y = \square\left(\varphi(z)\right)$$

$$\begin{aligned} w = \hat{\phi}(x) = &\quad x^n \\ \tfrac{s}{p} = \hat{\psi}(x) = &\quad nx^{n-1} \\ \hat{\varphi}(w) = \tfrac{g(\hat{\phi}^{-1}(w))}{\hat{\psi}(\hat{\phi}^{-1}(w))} = &\quad \tfrac{cw^2}{n}\sqrt{\tfrac{3a+bw}{-a+bw}} \\ z = \phi(w) = &\quad \left(\tfrac{2a}{b}+w\right)\sqrt{-a+bw} \\ \tfrac{r}{s} = \psi(w) = &\quad \tfrac{3bw}{2\sqrt{-a+bw}} \\ \varphi(z) = \tfrac{\hat{\varphi}(\phi^{-1}(z))}{\psi(\phi^{-1}(z))} = &\quad \tfrac{2c}{3nb^2}\sqrt{4a^3+b^2z^2} \end{aligned}$$

11.4.3 Primitives obtenues par réduction et substitution

1. [210] $\frac{q}{p} = R\sqrt{S} = [R-A]\sqrt{S} + A\sqrt{S} \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} R = cx^{-n-1} \\ S = ax^n + bx^{2n} \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{2bc}{a}x^{-1} \\ K = -\frac{2c}{a} \end{array} \right\} \quad : \quad \tfrac{1}{K}\left[R-A\right] = -\tfrac{a}{2}x^{-n-1} + bx^{-1}$$

$$y = KP\sqrt{S} + \square\left(\varphi(z)\right)$$

$$\begin{array}{l} P = \frac{a}{n}x^{-n} + \frac{b}{n} \\ \text{[pour 3, I}^{\text{er}}\text{ gr.]} \end{array} \quad ; \quad \begin{aligned} z = \phi(x) = &\quad \sqrt{x^n} \\ \tfrac{r}{p} = \psi(x) = &\quad \tfrac{nx^{n-1}}{2\sqrt{x^n}} \\ \varphi(z) = \tfrac{g(\phi^{-1}(z))}{\psi(\phi^{-1}(z))} = &\quad \tfrac{4bc}{na}\sqrt{a+bz^2} \end{aligned}$$

2. [211] $\frac{q}{p} = R\sqrt{S} = [R+A]\sqrt{S} - A\sqrt{S} \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} R = cx^{2n-1} \\ S = ax^n + bx^{2n} \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{ac}{2b}x^{n-1} \\ K = \frac{c}{6b} \end{array} \right\} \quad : \quad \tfrac{1}{K}\left[R+A\right] = 6bx^{2n-1} + 3ax^{n-1}$$

$$y = KP\sqrt{S} - \square\left(\varphi(z)\right)$$

[208] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 409.
[209] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 410.
[210] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 408.
[211] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 409.

$$P = \frac{2x^n}{n}\left[bx^n + a\right] \quad \text{[pour 4, I}^{\text{er}}\text{ gr. } (k=2)] \quad ; \quad \begin{array}{rl} z = \phi(x) = & x^n \\ \frac{r}{p} = \psi(x) = & nx^{n-1} \\ \varphi(z) = \frac{g(\phi^{-1}(z))}{\psi(\phi^{-1}(z))} = & \frac{ac}{2nb}\sqrt{az + bz^2} \end{array}$$

3. [212] $\frac{q}{p} = R\sqrt{S} = [R - A]\sqrt{S} + A\sqrt{S} \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} R = cx^{3n-1} \\ S = ax^n + bx^{2n} \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{5a^2c}{16b^2}x^{n-1} \\ K = \frac{c}{48b^2} \end{array} \right\} \quad : \quad \frac{1}{K}\left[R - A\right] = 48b^2x^{3n-1} - 15a^2x^{n-1}$$

$$y = KP\sqrt{S} + \square\left(\varphi(z)\right)$$

$$P = \frac{2x^n}{n}\left[6b^2x^{2n} + abx^n - 5a^2\right] \quad \text{[pour 4, I}^{\text{er}}\text{ gr. } (k=3)] \quad ; \quad \begin{array}{rl} z = \phi(x) = & x^n \\ \frac{r}{p} = \psi(x) = & nx^{n-1} \\ \varphi(z) = \frac{g(\phi^{-1}(z))}{\psi(\phi^{-1}(z))} = & \frac{5a^2c}{16nb^2}\sqrt{az + bz^2} \end{array}$$

4. [213] $\frac{q}{p} = \frac{R}{\sqrt{S}} = \frac{R \pm A}{\sqrt{S}} \mp \frac{A}{\sqrt{S}} \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} R = cx^{n-1} \\ S = ax^n \pm bx^{2n} \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{2bc}{a}x^{2n-1} \\ K = \frac{c}{a} \end{array} \right\} \quad : \quad \frac{1}{K}\left[R \pm A\right] = ax^{n-1} \pm 2bx^{2n-1}$$

$$y = KP\sqrt{S} \mp \square\left(\varphi(z)\right)$$

$$P = \frac{2}{n} \quad \text{[pour 5, I}^{\text{er}}\text{ gr. } (k=1)] \quad ; \quad \begin{array}{rl} z = \phi(x) = & \sqrt{a \pm bx^n} \\ \frac{r}{p} = \psi(x) = & \frac{nbx^{n-1}}{2\sqrt{a \pm bx^n}} \\ \varphi(z) = \frac{g(\phi^{-1}(z))}{\psi(\phi^{-1}(z))} = & \frac{4c}{na}\sqrt{\pm\frac{z^2 - a}{b}} \end{array}$$

5. [214] $\frac{q}{p} = \frac{R}{\sqrt{S}} = \frac{R + A}{\sqrt{S}} - \frac{A}{\sqrt{S}} \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} R = cx^{3n-1} \\ S = ax^n + bx^{2n} \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{3ac}{4b}x^{2n-1} \\ K = \frac{c}{4b} \end{array} \right\} \quad : \quad \frac{1}{K}\left[R + A\right] = 4bx^{3n-1} + 3ax^{2n-1}$$

$$y = KP\sqrt{S} - \square\left(\varphi(z)\right)$$

$$P = \frac{2x^n}{n} \quad \text{[pour 5, I}^{\text{er}}\text{ gr. } (k=2)] \quad ; \quad \begin{array}{rl} z = \phi(x) = & \sqrt{a + bx^n} \\ \frac{r}{p} = \psi(x) = & \frac{nbx^{n-1}}{2\sqrt{a + bx^n}} \\ \varphi(z) = \frac{g(\phi^{-1}(z))}{\psi(\phi^{-1}(z))} = & \frac{3ac}{2nb^2}\sqrt{\frac{z^2 - a}{b}} \end{array}$$

[212] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 409.
[213] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 409.
[214] Cf. Newton (MP), I, **2**, 7, [1], 409.

Sixième partie

Conclusions

Chapitre 12

L'introduction de la notion de fluxion et la naissance de l'*analyse*

Newton écrivit le *Traité d'Octobre 1666* à Woolsthorpe, le hameau où il était né et où résidait sa famille. Il avait quitté Cambridge au début de l'été 1665 à cause d'une épidémie de peste devenue ensuite très célèbre. Il y était revenu le 20 mars 1666 pour repartir en juin à Woolsthorpe, où il resta jusqu'à la fin du mois d'avril 1667[1]. À Cambridge, Newton n'était à cette époque qu'un étudiant boursier et il avait quasiment ignoré les études prescrites par le *curriculum* ordinaire. Il avait probablement suivi des leçons de Barrow, mais il ne semble pas qu'il eût l'occasion de communiquer à ce dernier ses résultats ou de lui montrer son talent mathématique. Il aurait certes pu, à sa rentrée à Cambridge, faire lire son manuscrit au professeur lucasien et lui demander son soutient pour lui permettre de le publier. À en juger par la manière dont Barrow réagit lorsque Newton lui présenta le manuscrit du *De analysi*[2], celui-ci ne lui aurait certes pas nié son appui. Il est donc probable que Newton garda pour lui le manuscrit de son traité avec toutes les notes qui l'avaient précédé.

Il est difficile d'imaginer les raisons de cette attitude. Il est possible que Newton ne se souciât pas de la destinée de son œuvre, car il éprouva très vite de l'attrait pour d'autres sujets. Ceci expliquerait d'ailleurs qu'il ne complétât pas son traité dans tous ses détails. Peut-être aussi ne se sentait-il pas sûr de ses résultats et de ses méthodes et ne voulait-il pas les rendre publics par peur d'être démenti. Ce qui est certain, c'est que dès sa rentrée à Cambridge, il s'attacha à se faire connaître et apprécier des membres du Trinity College : l'élection de neuf nouveaux membres devait avoir lieu la dernière semaine de septembre 1667 ; si Newton n'avait pas été élu, il aurait du quitter Cambridge, abandonner la perspective d'une carrière académique et, du coup, l'espoir de pouvoir poursuivre ses recherches dans des conditions aussi favorables que celles qu'il avait connues jusque-là. Le 2 octobre, Newton reçut la nouvelle de son élection[3].

[1] Cf. Westfall (1980), 178-180.
[2] Cf. ci-dessous.
[3] Cf. Westfall (1980), 217-219.

À en juger par les notes qu'il nous a laissées, après son élection il ne retourna sur les problèmes qu'il avait abordés dans le *Traité d'octobre 1666* avec la même abnégation qu'il leur avait consacrée au cours des années 1664 et 1665. Il est possible qu'à cette époque il commençât à s'intéresser à la classification des cubiques et qu'ensuite il se passionnât pour la construction des courbes par règle, compas et réitération[4]. C'est du moins ce qui résulte de trois groupes de notes que Whiteside a publiées dans le deuxième volume des *Mathematical Papers* et datées des années 1667-1668[5]. Ces notes mises à part, on a très peu de témoignages d'une recherche mathématique de la part de Newton, entre le mois de novembre 1666 et le printemps 1669 : il ne reste que de courts fragments consacrés à la recherche des propriétés de quelques courbes, à des approximations numériques de certaines grandeurs exprimées par des séries logarithmiques, à la rectification de la cycloïde et à la gravité des corps délimités par des coniques[6], en plus d'une version latine de la note du 16 mai 1666[7].

Malgré cela, Barrow ne tarda pas à s'apercevoir du talent mathématique de son jeune collègue et il est même possible qu'il prît connaissance de ses résultats et de quelques-unes de ses notes (si Newton se décida à mettre en latin la note du 16 mai, c'est probablement que celui-ci l'exhorta à rendre publics certains de ses résultats, ou même que Newton n'osa présenter au professeur lucasien qu'un essai en latin plutôt que des notes assez désordonnées rédigées en anglais). Au début de 1669, Collins envoya une copie de la *Logarithmotechnia* de Mercator[8] à Barrow, qui le 20 juillet lui écrivit[9] :

> A friend of mine here, that hath a very excellent genius to those things, brought me the other day some papers wherein he hath sett downe methods of calculating the dimension of magnitudes like that of Mr. Mercator concerning the hyperbola, but very generall ; as also of resolving æquations ; which I suppose will please you.

Néanmoins, il n'envoya à son correspondant aucun exemple du "génie" de Newton avant dix jours et, lorsqu'il le fit, le 31 juillet, il ne mentionna pas le nom de son protégé et pria Collins de lui retourner le manuscrit une fois lu[10]. Ce manuscrit n'était autre que le *De analysi*.

La présentation du *De analysi* à Barrow puis à Collins changea la vie de Newton. Collins fit une copie du traité et informa de son existence et de son contenu ses nombreux correspondants, qui commencèrent ainsi à entendre parler de Newton. Barrow, impressionné par le talent de son jeune ami, ou du moins sûr de pouvoir laisser la tâche de professeur lucasien de mathématiques en de bonnes mains et se consacrer ainsi à d'autres projets, démissionna

---

[4] Cf. la section 1.4.2.

[5] Cf. Newton (MP), II, **1**, 1-159. Whiteside a proposé sa datation en se fondant pour l'essentiel sur une analyse de l'orthographie de Newton. En revanche, Westafall l'a mise en doute, supposant que ces notes furent écrites en 1670 en réponse à des questions soulevées par Collins à propos des cubiques : cf. Westfall (1980), 214, note 68.

[6] Cf. Newton (MP), respectivement : II, **2**, 1, 172-189 ; II, **2**, 2, § 1, 190-193 ; II, **2**, 2, § 3, 202-205.

[7] Cf. Newton (MP), II, **2**, 2, § 2, 194-201. Par rapport au texte du 16 mai [sur lequel, cf. le chapitre 10], Newton élimine la proposition 7 et la deuxième solution du problème du point d'inflexion de la conchoïde ; en revanche il ajoute l'exemple de la construction de la tangente à la quadratrice.

[8] Cf. la note 69 du chapitre 6.

[9] Cf. Newton (C), I, 13. Cette lettre est aussi citée par Whiteside [cf. Newton (MP), II, 2, *Introduction*, note (11), 166] et Westfall [cf. Westfall (1980), 243].

[10] Cf. Newton (C), I, 14 ; Newton (MP), II, 2, *Introduction*, note (11), 166 et Westfall (1980), 245.

de son poste et s'arrangea pour faire nommer Newton à sa place, ce qui eut lieu le 29 octobre 1669[11]. Malgré ce succès soudain, le nouveau professeur s'opposa à la proposition de Collins qui voulait publier le *De analysi*. Ce traité resta à l'état de manuscrit[12] jusqu'en 1711, lorsque il fut publié par W. Jones[13].

Il est possible que Barrow ait montré à Newton le traité de Mercator aussitôt après l'avoir reçu et que Newton ait rédigé le *De analysi* et l'ait fait voir à Barrow avant le 20 juillet. Dans ce cas, les "quelques papiers" dont ce dernier parle dans sa première lettre à Collins ne sauraient qu'être identifiés avec ce même traité. C'est ce que pensent Westfall et Whiteside[14]. Mais se pourrait également que Newton ait rapidement rédigé le *De analysi*, entre le 20 et le 31 juillet, et que Barrow se réfère à d'autres notes dans sa lettre. Reste que Newton écrivit le *De analysi* à l'intention d'un correspondant bien déterminé (Collins ou Barrow) et qu'il le fit après avoir lu la *Logarithmotechnia* : il parle à la première personne du singulier et s'adresse ouvertement à un interlocuteur en utilisant la deuxième personne du singulier, comme dans une lettre ; en outre, dans la présentation de ses résultats et de ses méthodes, il assigne aux séries une place fondamentale qu'elles n'avaient pas auparavant, comme s'il voulait par là souligner sa priorité dans l'usage de cet outil par rapport à Mercator. Certes, la structure du *De analysi* rappelle celle des deux esquisses d'un traité sur quadratures et développements binomiaux que Newton avait rédigé entre l'été et l'automne 1665[15]. Mais depuis, Newton avait progressé dans son traitement du problème des quadratures, en montrant comment parvenir dans de nombreux cas à des quadratures finitaires, et ne laissant aux séries que la tâche d'exprimer des aires qu'on ne pouvait pas exprimer par des moyens Algébriques finitaires. En revanche, dans le *De analysi*, tout se passe comme si le développement en séries était l'outil essentiel pour résoudre le problème des quadratures (et d'autres problèmes voisins, comme celui des rectifications), sauf dans le cas heureux où l'ordonnée de la courbe à carrer est exprimée par une somme finie des terme de la forme ax^q, où q est un exposant rationnel quelconque différent de -1[16].

Après avoir énoncé deux règles permettant de traiter ces cas simples, Newton construit tout son traité comme l'exposition détaillée d'une troisième règle qu'il énonce succinctement comme suit[17] :

> Sin valor ipsius y vel aliquis ejus terminus sit præcedentibus magis compositus, in terminos simpliciores reducendus est, operando in literis ad eundem modum quo Arithmetici in numeris decimalibus dividunt, radices extrahunt, vel affectas Æquationes solvunt.

Le but de la plus grande partie du traité de Newton est de montrer comment cette "réduction" est possible, ce qui revient à montrer comment on peut exprimer les ordonnées

[11]Cf. Westfall (1980), 245-247.
[12]Cf. Newton (MP), II, **2**, 3, 206-247.
[13]Cf. Newton (1711).
[14]Cf. Westfall (1980), 243-245 et Newton (MP), II, **2**, 3, note (1), 206.
[15]Cf. respectivement les sections 4.4 et 6.2.
[16]Le cas où $q = -1$ est traité de deux manières différentes en deux endroits du traité. Dans l'exemple 6 à la règle 1, Newton observe que l'aire de la courbe d'équation $y = x^{-1}$ est infinie, "comme l'est l'aire de l'hyperbole" [cf. Newton (MP), II, **2**, 3, 208]. Plus loin, il observe que si l'ordonnée de la courbe à carrer est exprimée par une somme finie de termes de la forme $y = ax^q$ dont l'un présente un exposant égal à -1, alors ce terme doit être traité séparément des autres, car il correspond à une aire hyperbolique, qui peut "être donnée par quelque sorte de calcul [*ex calculo aliquo*]" [cf. Newton (MP), II, **2**, 3, 210].
[17]Cf. Newton (MP), II, **2**, 3, 210-212.

des courbes considérées par une série, dont chaque terme est de la forme ax^q (dans la plupart des cas, une série entière). Il s'agit de courbes, dont l'ordonnée est d'abord exprimée par un quotient de polynômes[18], par une racine carrée[19], par un quotient de racines carrées[20] ou par des sommes finies de termes de cette nature[21], ou bien de courbes d'abord exprimées par des équations Algébriques entières qu'on ne saurait réduire aisément à des équations de la forme $y = f(x)$[22], ou même de courbes mécaniques, telle la cycloïde[23], dont l'ordonnée peut être exprimée par une série de la forme voulue à l'aide d'une rectification[24].

Cette réduction n'est autre qu'une préparation des données visant à mettre celles-ci sous une forme qui permette l'application d'un algorithme standard fournissant enfin la solution du problème. Elle est donc, au sens classique, une analyse — en particulier une analyse configurationnelle[25] —, car elle prépare la synthèse, la rend possible. C'est Newton même qui le reconnaît explicitement. Après avoir montré comment résoudre le problème des rectifications par les mêmes moyens utilisés pour résoudre le problème des quadratures et avoir évoqué la possibilité de résoudre aussi les problèmes inverses, et avant de passer aux courbes mécaniques, il présente deux remarques qu'il introduit ainsi[26] :

> Analysin ut vides exhibui propter adnotanda duo sequentia.

Cependant, d'après Newton, ce nom d' "analyse" ne s'applique pas à cette réduction uniquement parce qu'elle est une préparation de la solution. En employant ce terme au sens de Viète, plutôt que dans le sens classique qui lui avait été assigné par Aristote[27] — pour indiquer ce qui dans mon langage est davantage une procédure *algébrique* visant à obtenir des expressions convenables des grandeurs considérées —, celui-ci observe que cette réduction ne diffère pas essentiellement de l' "analyse ordinaire"[28] :

> Et quicquid Vulgaris Analysis per æquationes ex finito terminorum numero constantes (quando id sit possible) perficit, hæc per æquationes infinitas semper perficiat : Ut nil dubitaverit nomen Analysis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hâc non minùs certa sunt quàm in illâ, nec æquationes minùs exactæ ; licet omnes earum terminos nos homines & rationis finitæ nec designare neque ita concipere possumus, ut quantitates inde desideratas exactè cognoscamus : Sicut radices surdæ finitarum æquationes nec numeris nec quavis arte Analytica ita possunt exhiberi ut alicujus quantitas a reliquis distinct[è] & exactè cognoscatur. [...] Denique ad Analiticam merito pertinere censeatur cujus beneficio curvarum areæ & longitudines &c (id modò fiat) exactè & Geometricè determinatur.

Ce n'est pourtant pas à l'invention de cet ensemble de procédures visant à obtenir des séries dont chaque terme est de la forme ax^q, que remonte l'origine de l'*analyse*, à mon sens.

[18]Cf. Newton (MP), II, **2**, 3, 212-214.
[19]Cf. Newton (MP), II, **2**, 3, 214-216.
[20]Cf. Newton (MP), II, **2**, 3, 216.
[21]Cf. Newton (MP), II, **2**, 3, 218.
[22]Cf. Newton (MP), II, **2**, 3, 218-232.
[23]Cf. Newton (MP), II, **2**, 3, 238-240.
[24]Cf. Newton (MP), II, **2**, 3, 232-234.
[25]Cf. la note (31) du chapitre 1.
[26]Cf. Newton (MP), II, **2**, 3, 236.
[27]Cf. Panza (1997*b*).
[28]Cf. Newton (MP), II, **2**, 3, 240-242.

Comme elles sont appliquées à des expressions ou équations censées exprimer des grandeurs géométriques déterminées, et qu'elles conduisent à obtenir les séries cherchées terme après terme, grâce à une réitération de transformations opérant sur des expressions qui ne relèvent que d'additions, soustractions, multiplications, divisions ou extractions de racines, ces procédures peuvent être qualifiées d'Algébriques. Ceci est, au fond, ce que Newton observe dans le passage que je viens de citer. Il est néanmoins clair que ces procédures ne dépendent nullement de la nature particulière des grandeurs exprimées par les expressions auxquelles elles s'appliquent. Dans ce sens, on peut aussi les qualifier d'*algébriques*. Pourtant, elles ne sont pas des procédures *analytiques*, car lorsqu'elles ne se réfèrent pas à des grandeurs déterminées, elles ne consistent qu'en des transformations symboliques s'appliquant à des schémas d'énoncés possibles qui n'ont, quant à eux, aucun pouvoir expressif[29]. Hormis l'insistance sur la généralité de la méthode consistant à obtenir des expressions en séries pour des grandeurs données et à opérer sur ces expressions terme après terme pour parvenir à des expressions infinitaires des grandeurs cherchées[30], il n'y a rien de nouveau dans le *De analysi*.

* * *

Les premiers cours que Newton dispensa à Cambridge en tant que professeur lucasien ne portèrent pas sur des sujets mathématiques, mais sur l'optique, et en particulier la théorie des couleurs[31]. Ce fut le sujet qui accapara presque exclusivement Newton entre 1668 et 1670, ne laissant que peu de temps pour les mathématiques, temps que celui-ci passait surtout à répondre aux sollicitations de Barrow et Collins. Ceux-ci le poussèrent notamment[32] à réviser et annoter l'*Algebra* de G. Kinckhuysen[33] — qui venait d'être traduite de l'hollandais en latin par N. Mercator sur l'initiative du même Collins —, en vue d'une édition commentée[34]. Newton s'adonna à ce travail plus pour ne pas déplaire à ses protecteurs que pour satisfaire un intérêt véritable vis-à-vis de l'œuvre de Kinckhuysen. Finalement il transmit ses annotations[35] à Collins le 11 juillet 1670[36], en le priant de ne pas mentionner son nom dans la réédition de l'ouvrage. Collins eut la mauvaise idée de demander à Newton d'ajouter quelques éclaircissements à propos des racines des binômes. Ce dernier en profita pour se faire retourner le manuscrit, ce que Collins fit le 19 juillet[37]. Rentré en possession de son manuscrit, Newton ne le renvoya plus jamais à Collins. Il lui écrivit le 27 septembre, en l'informant qu'il avait d'abord pensé à beaucoup modifier ses annotations, mais qu'il avait finalement décidé d'intervenir uniquement à propos des racines des binômes, préférant

[29]Cf. la section 1.5.

[30]Cf. Newton (MP), II, **2**, 3, 240 : "Nec quicquam hujusmodi scio ad quod hæc methodus idque varijs modis, sese non extendit."

[31]Cf. Westfall (1980), 252.

[32]Probablement ces sollicitations sont-elles aussi à l'origine d'une longue note sur la construction géométrique des équations que Whiteside a datée de 1670 : cf. Newton (MP), II, **3**, 2, § 2, 450-517.

[33]Cf. Kinckhuysen (1661).

[34]Cette édition ne vit jamais le jour et la traduction de Mercator resta à l'état de manuscrit. Elle a été reproduite par Whiteside dans le volume II des *Mathematical Papers* : cf. Newton (MP), II, **3**, 1, § 1, 295-364.

[35]Cf. Newton (MP), II, **3**, 1, § 2, 364–447.

[36]Cf. : Newton (MP), II, **3**, 1, § 2, note (1), 364-365 ; et Newton (C), I, 30-31.

[37]Cf. : Westfall (1980), 267-268 ; et Newton (C), I, 36.

pour le reste écrire un nouveau traité[38]. Puis, jusqu'au 20 juillet 1671, il ne lui donna plus aucune nouvelle. Collins lui avait écrit le 5 juillet pour s'informer sur l'avancement de son travail en lançant l'idée d'une publication des annotations à l'*Algebra* de Kinckhuysen sous le nom de Newton (ce qui aurait peut-être aidé aux ventes de l'ouvrage)[39]. Quinze jours plus tard, il reçut une réponse assez évasive, qui contenait également ces quelques mots[40] :

> The last winter [...] partly upon D^r Barrows instigation I began to new methodiz the discourse of infinite séries, designing to illustrate it with such problems as many (some of them perhaps) be more acceptable then the invention it selfe of working by such séries. But being suddainly diverted by some buisinesse in the Country, I have not yet had leisure to returne to those thoughts, & I feare I shall not before winter. But since you informe me there needs no hast, I hope I may get into the hummour of completing them before the impression of the introduction, because if I must helpe to fill up its title page, I had rather annex something which I may call my owne & which may bee acceptable to Artist as well as the other to Tyros.

Cette annexe que — on ignore si sincèrement ou pas — Newton proposait d'ajouter à l'édition commentée de l'*Algebra* de Kinckhuysen pour justifier la présence de son nom dans la page de titre n'était autre que le *De methodis*[41]. Le projet d'une édition révisée et commentée de l'*Algebra* de Kinckhuysen ne fut jamais réalisé, et malgré d'autres projets de publication[42], le nouveau traité ne fut jamais complètement terminé et ne fut publié qu'en 1736, dans la traduction anglaise de Colson[43].

Ainsi s'ouvre ce traité[44] :

> Animadvertenti plerosque Geometras, posthabitâ fere Veterum syntheticâ methodo, Analyticæ excolendæ plurimum incumbere, et ejus ope tot tantasque difficultates superasse ut pene omnia extra curvarum quadraturas et similia quædam nondum penitùs enodata videantur exhausisse : placuit sequentia quibus campi analytici terminos expandere juxta ac curvarum doctrinam promovere possem in gratiam discentium breviter compingere.

Tout en faisant sentir, par le jeu rhétorique d'un incident, que la "négligence des méthodes synthétiques des anciens" ne saurait être signe de progrès, Newton n'a, encore une fois, aucune hésitation à inscrire ses résultats et ses méthodes dans la tradition de l'analyse, ainsi qu'elle avait été revigorée et réformée par Viète. Mais il ne s'agit plus, tout simplement, de proposer des procédures Algébriques (ou *algébriques*) à même de fournir une configuration convenable des données à l'aide de séries, comme pour le *De analysi*. Les procédures dont

[38] Newton compléta son projet seulement entre la fin de 1683 et le début de 1684, lorsque, conformément à ses obligations de professeur [cf. Westfall (1980), 248], il déposa à la bibliothèque de l'Université de Cambridge le compte-rendu de ses leçons tenues entre 1673 et 1683 : cf. Newton (MP), V, **1**, 2, 54-532. Sur les *Leçons d'Algèbre* de Newton et ses relations avec les annotations à l'*Algebra* de Kinckhuysen, cf. Brigaglia (1995), 236-250.

[39] Cf. : Newton (MP), II, **2**, *Indroduction*, 287-288 ; Westfall (1980), 268 ; et Newton (C), I, 66.

[40] Cf. : Newton (MP), II, **2**, *Introduction*, 288 ; Newton (MP), III, **1**, *Introduction*, 5 et **2**, § 1, note (1), 32 ; Westfall (1980), 269 ; et Newton (C), I, 68.

[41] Cf. Newton (MP), III, **1**, 3-372.

[42] Cf. : Newton (MP), III, **1**, *Introduction*, 5-6.

[43] Cf. Newton (1636).

[44] Cf. : Newton (MP), III, **1**, 2, § 1, 32.

l'exposition constituait le cœur de ce dernier traité, ne sont maintenant présentées — avec l'ajout de la méthode du parallélogramme[45], qui au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle sera souvent citée comme l'une des grandes acquisitions de Newton — qu'au tout début du traité[46] et qualifiées de simples "règles de calcul [modi computandi]"[47].

Ces règles ayant été présentées "pour illustrer cet art analytique, il reste" — dit Newton — "à exposer quelques problèmes typiques, comme ceux qui concernent la nature des courbes[48]." L' "art analytique" ne se limite donc pas à préparer les données pour la solution du problème — ou, pour être plus précis, à fournir les règles générales pour cette préparation. Il tient aussi à cette solution. On serait tenté de préciser : cet art tient à cette partie de la solution qui consiste dans la détermination des relations Algébriques entre les grandeurs données et les grandeurs inconnues, relations qui indiquent une construction possible de ces dernières grandeurs. Néanmoins, dans la suite de son traité Newton ne distingue guère entre l'expression Algébrique des grandeurs inconnues en termes de grandeurs connues et la construction de ces grandeurs. Comme il l'avait déjà fait dans le *Tractatus d'octobre 1666*, il recourt souvent au formalisme Algébrique pour spécifier la longueur des segments qui entrent dans des constructions fournissant les grandeurs cherchées, et dans certains cas, comme par exemple celui de la tangente à la quadratrice[49], il présente la construction de ces grandeurs sans aucunement se servir de ce formalisme. Il semble aussi que, à part les "règles de calcul" concernant la préparation des données[50], l' "art analytique" de Newton tienne à l'interprétation des problèmes assignés en termes de la théorie de la composition des mouvements que ce dernier avait élaborée dès l'été 1665 et à leur solution au sein de cette théorie. C'est Newton qui suggère cette interprétation, car il enchaîne ainsi[51] :

> Sed imprimis observandum venit quod hujusmodi difficultates possunt omnes ad hæc duo tantùm problemata reduci quæ circa spatium motu locali[52] utcunque accelerato vel retardato descriptum proponere licebit.
>
> 1. Spatij longitudine continuò (sive ad omne tempus) data, celeritatem motûs ad tempus propositum invenire.
>
> 2. Celeritate motûs continuô datâ longitudinem descripti spatij ad tempus propositum invenire.

À première vue, Newton ne fait que reformuler de manière plus compacte et générale les problèmes, dont relèvent les propositions 7 et 8 du *Traité d'octobre 1666*[53]. Il semble donc

[45]Cf. Newton (MP), III, **1**, 2, § 2, 48-54. À propos de la méthode du parallélogramme, cf. *ibid.,* note (29), 50-51 et Panza (1992*a*), 149-152 et 356.

[46]Cf. Newton (MP), III, **1**, 2, § 1, 36 et § 2, 38-70. Les différences entre le texte du *De analysi* et celui du *De methodis* sont indiquées dans les notes ajoutées de Whiteside.

[47]Cf. Newton (MP), III, **1**, 2, § 2, 70.

[48]Cf. Newton (MP), III, **1**, 2, § 2, 70 : "Jam restat ut in illustrationem hujus Artis Analyticæ tradam aliquot Problematum specimina qualia præsertim natura curvarum ministrabit."

[49]Cf. Newton (MP), III, **1**, 2, § 2, 144-146.

[50]D'ailleurs ces règles, conduisant à des expressions des données à l'aide de séries, n'ont qu'un usage local dans le *De methodis*, où, comme dans le *Traité d'octobre 1666*, Newton cherche autant que possible des solutions finitaires.

[51]Cf. Newton (MP), III, **1**, 2, § 2, 70.

[52]Comme l'observe Whiteside [cf. Newton (MP), III, **1**, 2, § 2, note (80), 70-71], il s'agit du "mouvement local [*φορά*]" d'Aristote, c'est-à-dire, pour être plus précis, du mouvement selon le lieu, entendu comme opposé à la *κίνησις*, dans toute sa généralité.

[53]Cf. les sections 11.1.2 et 11.1.5.

que ce qu'il déclare n'être que licite soit la réduction des problèmes géométriques déterminés, tels les problèmes des tangentes et des aires et tous les problèmes connexes, à des problèmes généraux concernant des mouvements et leurs vitesses. Il suffit pourtant de continuer la lecture pour comprendre que le verbe "licet" s'applique plutôt à une autre réduction, d'une certaine manière inverse. Les deux problèmes précédents sont en effet aussitôt présentés par Newton comme des versions particulières de deux autres problèmes, qui ne concernent pas les mouvements locaux[54] et leurs vitesses, mais plus en général toute quantité variable, et la "fluxion" avec laquelle elle augmente. Voici comme Newton s'explique[55] :

> Cùm autem temporis nullam habeamus æstimatione nisi quatenus id per æquabilem motum localem exponitur et mensuratur, et præterea cùm quantitates ejusdem tantùm generis inter se conferri possint et earum incrementi et decrementi celeritates inter se, eapropter ad tempus formaliter spectatum in sequentibus haud respiciam, sed e propositis quantitatibus quæ sunt ejusdem generis aliquam æquabili fluxione augeri fingam cui cæteræ tanquam tempori referantur, adeoque cui nomen temporis analogicè tribui mereatur. Siquando itaque vocabulum temporis in sequentibus occurrat [...] eo nomine non tempus formaliter spectatum subintelligi debet sed illa alia quantitas cujus æquabili incremento sive fluxione tempus exponitur et mensuratur.

Par cette déclaration, Newton semble abandonner la métaphore mécanique, qui avait servi à exprimer l'invariante géométrique constituée par le rapport entre l'ordonnée et la sous-tangente d'une courbe quelconque de manière à pouvoir généraliser la méthode des tangentes de Roberval, voire de transformer cette méthode en une théorie des mouvements composés applicable à l'étude des courbes. Ou, pour être plus précis, il semble vouloir assigner à cette métaphore le rôle marginal d'une illustration analogique d'un phénomène plus fondamental dont cette métaphore n'est justement qu'une manifestation accidentelle. En quelque sorte, il paraît vouloir revenir de la particularité de la *φορά* à la généralité de la *κίνησις*[56]. Mais ce retour à la généralité originaire de la notion aristotélicienne de *κίνησις* ne se fait pas sans un progrès. C'est précisément ce progrès qui nous permet désormais de parler de variation plutôt que de changement ou de mouvement au sens large.

Newton a compris deux choses ou, mieux encore, il a compris que la première de ces choses, qu'il avait saisie lors de ses premières recherches mathématiques au début de 1664[57], porte en soi la deuxième, ce qui est en revanche une nouveauté. Au début de 1664, Newton avait compris d'une part que pour parler de variation d'une grandeur déterminée, tel

[54] Cf. la note (52), ci-dessus.

[55] Cf. Newton (MP), III, **1**, 2, § 2, 72. Vu l'importance de ce texte pour mon argument, il m'a semblé bon d'en fournir une traduction littérale, qui diffère légèrement de celle (en anglais) proposée par Whiteside [*ibid.*, 73] : "D'ailleurs, comme nous n'avons aucune considération du temps sinon en ce qu'il se manifeste et se mesure par [un] déplacement uniforme, et comme de surcroît seule les quantités du même genre peuvent être comparées entre elles, [de même qu']entre elles [peuvent être comparées] leurs vitesses d'incrément et de décrément, je ne me référerai pas par la suite au temps en tant que tel, mais j'imaginerai que, parmi les quantités proposées qui sont du même genre, l'une augmente avec une fluxion uniforme [et que] les autres s'y réfèrent comme au temps, de sorte que le nom 'temps' puisse lui être assigné par analogie. Ainsi, lorsque le terme 'temps' apparaît par la suite [...], on ne doit pas entendre par ce terme le temps en tant que tel, mais cette autre quantité par l'incrément uniforme ou la fluxion de laquelle le temps se manifeste et se mesure."

[56] Cf. la note (52), ci-dessus.

[57] Cf. la section 4.1.1, en particulier pp. 170-173.

un segment variable, il suffit de disposer d'une autre grandeur, homogène à celle-ci, qui fonctionne comme paramètre, en ce sens que la détermination de cette dernière grandeur entraîne la détermination de la première, et d'autre part que pour comparer les modalités de variation des différentes grandeurs déterminées, il suffit de comparer les façons dont ces grandeurs en viennent à être déterminées lorsque le paramètre l'est. C'était l'idée clé de la variable indépendante. Il a maintenant compris que dans le genre des changements (au sens de la *κίνησις* d'Aristote), on peut distinguer une espèce, l'espèce des variations, qui se caractérise précisément par ce que la nature propre à tout élément particulier de cette espèce se manifeste dans son individualité dès que l'on dispose d'un changement quelconque de cette même espèce, dont tous les autres dépendent, en ce sens qu'on sait dire comment les sujets de ces derniers changements se déterminent dès que le sujet du premier changement résulte être déterminé, pourvu que la détermination des sujets des ces changements consiste en l'assignation à ces sujets d'une place déterminée dans une hiérarchie de places possibles. On observera que ces changements sont des changements de quantités ou plus en général de qualités intensives, lorsque ces quantités ou qualités intensives dépendent les unes des autres. Cependant, l'essentiel est que Newton a ici subrepticement renversé les rôles des deux termes de cette définition. Ce n'est pas la notion de quantité ou celle de qualité intensive, qui sert à définir la notion de variation, mais au contraire c'est la notion de variation qui définit celle de quantité : une quantité n'est autre que ce qui est soumis à une variation ; et une variation n'est à son tour rien d'autre que la possibilité d'une détermination relative consistant en l'assignation d'une place déterminée dans une hiérarchie de places possibles, la condition qui tient au fait d'en venir à occuper l'une de ces places dès qu'une certaine entité en occupe une autre.

Il s'ensuit que pour parler de quantités, on n'a plus besoin d'en exhiber une espèce particulière. Il suffit de pouvoir se référer à des individus indéterminés mais distincts les uns des autres — par exemple à l'aide de notations convenables, telles des lettres —, de choisir un de ces individus — qu'on sait reconnaître en identifiant le symbole qui le dénote —, et de lui assigner le rôle du sujet de la variation fondamentale. On dira alors que n'importe laquelle de ces quantités se caractérise comme une quantité particulière dès qu'on sait comment la déterminer lorsque le sujet de la variation fondamentale est déterminé. Pour passer ensuite des quantités, pensées de cette manière, aux grandeurs, il suffit de supposer que la hiérarchie des places possibles est continue, la continuité étant une condition que Newton ne peut spécifier autrement qu'en insistant sur l'analogie temporelle ou en renvoyant implicitement à une image géométrique[58].

C'est justement cette analogie qui justifie l'introduction d'une nouvelle sorte de grandeurs variables qui mesurent la variation des grandeurs de la première sorte, par rapport à la variation de la grandeur fondamentale. Ces deux sortes de grandeurs ne forment pas pour autant deux espèces distinctes de grandeurs. Leur distinction n'est que relative ; elle n'est qu'une distinction entre les fonctions de deux grandeurs considérées l'une par rapport à l'autre. C'est bien pour désigner ces rôles que Newton introduit respectivement les termes de "fluentes" et de "fluxion". Cependant, il ne le fait pas de manière explicite. Bien que le premier de ces termes intervienne déjà dans le texte que je viens de citer, il semble y indiquer plus un phénomène propre aux grandeurs qu'une grandeur au sens propre[59].

[58] Cf. Panza (1992*b*).

[59] Whiteside souligne ce fait de manière éclatante dans sa traduction [cf. la note (55), ci-dessus], en

C'est plutôt lorsque — à la lumière des ses nouvelles considérations — il reformule les deux problèmes précédents en termes plus généraux, qu'il introduit ces deux termes leur attribuant la signification qu'ils conserveront par la suite. Voici cette reformulation :

> Prob : 1. Relatione quantitatum fluentium inter se datâ, fluxionum relationem determinare[60].
>
> Prob : 1. Exposita æquatione fluxiones quantitatum involvente, invenire relationem quantitatum inter se[61].

Au sens propre, l' "art analytique" de Newton consiste dans la solution de ces deux problèmes généraux, et dans l'application de cette solution à la solution de plusieurs problèmes particuliers concernant des courbes. Mais, comme ces problèmes en tant que tels ne renvoient à aucune espèce de grandeurs particulières, en portant plutôt en général sur des grandeurs variables définies implicitement comme l'on vient de dire, ils sont aussi à mons sens des problèmes *analytiques*. Bien que, ces problèmes étant résolus, le *De methodis* continue en suivant la trace du *Traité d'octobre 1666*, en tant que traité de géométrie employant le formalisme de l'Algèbre, il marque de ce fait une étape fondamentale dans l'origine de l'*analyse*.

C'est une étape que Newton a atteinte à la fin d'un parcours complexe qui avait commencé par la lecture de l'*Arithmetica infinitorum* de Wallis et de la *Géométrie* de Descartes, que j'ai essayé ici de reconstruire. Reste que malgré cette innovation essentielle qui concerne les fondements de la théorie des fluxions, celle-ci se développera, dans le *De methodis*, comme dans les trois versions successives du *De quadratura curvarum*[62], suivant les lignes directrices que le *Traité d'octobre 1666* avait fixées. Contrairement au calcul différentiel de Leibniz, elle ne sera jamais la théorie d'un opérateur linéaire dont l'application est réitérable[63], ni même la théorie d'un objet formel explicitement défini, tels que le différentiel ou la limite du rapport incrémental[64]. Elle restera une théorie d'un objet défini, comme on vient de le voir, par un acte d'abstraction qui conduit à une généralisation de la notion classique de quantité ouvrant la voie à la théorie des fonctions, mais aussi par le truchement d'une analogie, qui tout en se substituant à la métaphore mécanique qui avait donné un sens à la notion de vitesse du mouvement de génération d'un segment, ne saurait assigner à cet objet une nature formelle, autre que celle qui lui est implicitement attribuée par l'algorithme conduisant à la solution du premier des deux problèmes précédents. Ce sera cette lacune originaire de la théorie des fluxions qui fera que le développement de l'*analyse*, en tant que théorie des fonctions, n'aura lieu que lorsque la notion générale de grandeur introduite par Newton se rencontrera avec le formalisme puissant et les définitions explicites propres au calcul différentiel.

---

préférant le terme "fluw", au terme "fluxion".

[60] Cf. Newton (MP), III, **1**, 2, § 2, 74.

[61] Cf. Newton (MP), III, **1**, 2, § 2, 82.

[62] Cf., respectivement : Newton (MP), VII, **1**, § 2, 48-129, un texte rédigé entre la fin de 1691 et le début de 1692, que Newton ne publia pas ; Wallis (1693), 390-396, un *excerptum* du texte précédent que Newton envoya à Wallis dans l'été 1692 et que ce dernier inséra dans l'édition latine de son *Algèbre* [cf. aussi Newton (MP), VII, **1**, appendice 3, 170-182, où est publié le manuscrit que Newton envoya à Wallis] ; et Newton (1704), la version enfin publiée en tant que traité autonome.

[63] J'ai insisté en différents endroits sur cet aspect de la théorie de Newton ; cf. par exemple : pp. 362-7.1 ; p. 377 ; p. 494 ; p. 510.

[64] Cf. la section 9.1, en particulier, pp. 442-445.

Septième partie

Références bibliographiques

Apollonius (CH) *Conica, in Apollonii Pergæ quæ græce exstant [. . .]*, editit et latine interpretatus est I. L. Heiberg, Teubner, Leipzig, 1891-1893 (2 vols.), I,1 - II,97.

Apollonius (CVE) *Les coniques* traduction, introduction et notes par P. Ver Eecke, Brouwer, Bruges, 1924.

Apollonius (CT) *Conics. Books V to VII. The Arabic Translation of the Lost Greek Original in the version of the Banū Mūsā*, édité, traduit et commenté par G. J. Toomer, Spinger-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, 1990 (2 vols.).

Alembert, J. le R. d' (Dis.) "Discours préliminaire des éditeurs", *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, I ed., Briasson, David l'aîné, le Breton, Durand, Paris 1751-80 (35 voll.), vol. I, 1751, I-XLV.

Archimède (OM) *[Œuvres d']Archimède*, texte établi et tradauit par C. Mugler, Les Belles Lettres, Paris, 1970-1972 (4 vols.)

Auger, L. (1962) *Un savant méconnu : Gilles Personne de Roberval (1602-1675)*, A. Blanchard, Paris 1962.

Baron, M. E. (1969) *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Pergamon Press, Oxford, 1969.

Barrow, I. (1670) *Lectiones Geometricae : In quibus (praesertim) Generalia Curvarum Linearum Symptomata declarantur*, G. Godbid, Londini, 1670.

Barrow, I. (1683) *Lectiones Mathematicæ XXIII*, Typis J. Playford, pro G. Wells *in Cœmeterio D. Pauli*, Londini, 1683 [trad. angl. par J. Kirkby : *The Usefulness of Mathematical learning explained and demonstrated : being Mathematical Lecturtes [. . .]*, S. Ausren, London, 1734].

Barrow, I. (GLC) *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow, Translated with notes and proofs, and a discussion of the advance made therein on the work of his predecessors in the infinitesimal calculus*, by J. M. Child, Open Cort publ. Co., Chicago and London, 1916.

Berkeley, G. (1734) *The Analyst*, J. Tonson, London, 1734.

Blay, M. (1999) "Méthodes mathématiques et calcul de l'infini au temps de Fermat", *Historia Scientiarum*, 1999, 57-71.

Bombelli R. (1572) *L'Algebra parte maggiore dell'aritmetica divisa in tre libri*, G. Rossi, Bologna, 1572.

Bombelli R. (AB IV,V) *L'Algebra.Opera di Rafael Bombelli da Bologna. Libri IV e V [...]*, édité par E. Bortolotti, Zanichelli, Bologna, 1929.

Bombelli, R. (AB) *L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna. Prima edizione integrale,* (édité par E. Bortolotti), Feltrinelli, Milano, 1966.

Bos, H. J. M. (1981) "On the representation of curves in Descartes' *Geometry*", *Archive for History of Exact Sciences*, **24** , 1981, 295-338.

Bos, H. J. M. (1984) "Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory ; the 'Construction of Equations', 1637-ca. 1750", *Archive for History of Exact Sciences*, **30**, 1984, 331-380.

Bos, H. J. M. (1986) "The Concept of Construction and Representation of Curves in Seventeenth-Century Mathematics", *in* A. M. Glason (éd. par), *Proceeding of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, California August 3-11, 1986*, AMS, Providence (RI), 1987, vol. I,2, 1629-1641.

Bos, H. J. M. (1988) "Tractional Motion and the Legitimation of Transcendental Curves", *Centaurus*, **31**, 1988, 9-62.

Bos, H. J. M. (1990) "The Structure of Descartes' *Géométrie*", *in* G. Belgioioso, G. Cimino, P Costabel, G. Papuli (édité par), *Descartes : il metodo e i Saggi. Atti del Convegno per il 350° anniversario della pubblicazione del* Discours de la Méthode *e degli* Essais, Instituto della Enciclopedia Italiana, Roma, 1990, 349-370.

Bos, H. J. M. (1996) "Tradition and Modernity in Early Modern Mathematics. Viète, Descartes and Fermat", *in* C. Goldstein, J. Gray et J. Ritter (éd. par), *L'Europe mathematique : histoire, mytes, identités*, Éd. de la Maison des sciences de l'homme, Paris, 1996, 183-204.

Brigaglia, A. (1995) "La riscoperta dell'analisi e i problemi apolloniani", in Panza et Roero (1995), 221-269.

Brown, H. (1934) *Scientific Organisations in Seventeenth Century France*, Baltimore, 1934.

Brunschvicg, L. (1912) *Les étapes de la philosophie mathématique*, Alcan, Paris, 1912.

Cantor M. (1880-1908) *Vorlesugen über Geschichte des Mathematik* , B. G. Teubner, Leipzig, 1880-1908 (4 vols.).

Cardano, G. (1545) *Ars Magna sive de regulis algebraicis lib. unus*, J. Petreius, Norimbergæ, 1545, ; II$^{\text{ème}}$ éd., Officina Henricpetrina, Basilea, 1570 ; III$^{\text{ème}}$ éd., *in* G. Cardano, *Opera Omnia [...]*, sumptibus I. A. Huguentan, & M. A. Ravaud, Lugduni, vol. IV, 1663.

Carnot, L. (DTIM) *Dissertation sur la théorie de l'infini mathématique* (dissertation envoyée à l'Académie royale des sciences, arts et belles-lettres de Berlin, pour concourir au concours de l'année 1786, daté d'Arras, le 8 septembre 1785), ms. conservé aux Archives de la Deutsche Akademie der Wisenschaften zu Berli, sous la côte AAW 1261-1262 ; reproduite en fac-similé *in* C. G. Gillispie et A. P. Youschkevitch, *Lazare Carnot Savant*, Princeton Univ. Press, Princeton (N. J.), 1971 ; éditée *in* C. G. Gillispie et A. P. Youschkevitch, *Lazare Carnot savant et sa contribution à la théorie de l'infinini mathématique*, Vrin, Paris 1979.

Carnot, L. (1797) *Réfléxions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, Duprat, Paris an V (1797).

Carnot, L. (1813) *Réfléxions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, IIème 2d., M. V. Courcier, Paris, 1813.

Cavaillès, J. et Lautman, A. (1939) "La pensée mathématique", compte rendu d'une discussion entre Jean Cavaillès et Albert Latman, à la séance du 4 février 1939 de la Société française de Philosophie, *Bulletin de la Société française de Philosophie*, **40**, 1946, 1-39.

Cavalieri B. (1653) *Geometria indivisibilium continuorum nova quadam ratione promota [...]*, C. Ferronii, Bononiæ, 1635.

Clagett, M. (1968) *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motion. A Treatise on the Uniformity and Difformity of Intensities, known as* Tractatus de configurationis qualitatum et mutum, The Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1968.

Clavius, C. (1611-1612) *Operum Mathematicorum [. . .]*, A. Hierat, Moguntiæ, 1611-1612 (5 vols.).

Collins J. (1712) *Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum deAnalysi promota, jussu Societatis Regiæ in lucem editum*, typis Pærsonianis, Londini, 1712.

Collins J. (1722) *Commercium epistolicum J. Johannis Collins et aliorum deAnalysi promota, jussu Societatis Regiæ in lucem editum et jam una cum ejusdem recensiona præmissa (curante Newton) et judicio primarii, ut ferebatur, mathematici subjuncto, iterum impressum*, ex officina J. Thomson et J. Watts, Londini, 1722.

Costabel P. (1985) "Descartes et la Mathématique de l'infini", *Historia Scientiarum*, 1985, 37-49.

Desanti, J. T. (1968) *Les idéalités mathématiques*, ed. du Seuil, Paris, 1968.

Descartes, R. (1637) *La Géométrie*, *in* R. Descartes, *Discours de la méthode [...]. Plus la Dioptrique. Les météores. Et la Géométrie qui sont des essaies de cette Méthode*, I. Maire, Leyde, 1637, 295-413.

Descartes R. (1644) *Principia Philosophiæ*, L. Elzevirium, Amstelodami, 1644.

Descartes, R. (DM, 1650) *Specimina philosophiæ : seu dissertatio de methodo recte regendæ rationis, & veritatis in scientiis investigandæ : Dioptrice, et Meteora. Ex Gallico traslatata, & ab autore perlecta, variisque in locis emendata*, L. Elvezirium, Amstelodami, 1650

Descartes, R. (GvS, I) *Geometria, à Renato des Cartes Anno 1637 Gallicè edita [...], operâ atque studio Francisci a Schooten [. . .]*, ex officina J. Maire, Lugduni Batavorum,1649

Descartes, R. (GvS, II) *Geometria, à Renato des Cartes Anno 1637 Gallicè edita [...] Operâ atqe studio Francisci à Schooten [...]* , L. & D. Elzevirios, Amstelædami, 1659-1661 (2 vols.).

Descartes, (AT) *Œuvre de Descartes* (édités par C. Adam et P. Tannery), Vrin, Paris, 19897-1910 (12 vols.).

Dhombres J. (1992) (sous la direction de) *L'École Normale de l'an III. Leçons de mathématiques. Laplace - Lagrange - Monge*, Dunod, Paris, 1992.

Dhombres J. (1995) "L'innovation comme produit captif de la tradition : entre Apollonius et Descartes, une théorie des courbes chez Grégoire de Saint-Vincent", *in* Panza et Roero (1985), 13-83.

Dhombres, J. et Dhombres, N (1997) *Lazare Carnot*, Fayard, Paris, 1997.

Diophante (AX) *Rerum Arithmeticarum Libri sex*, Eusebium Episcopium, & Nicolai Fr. hæredes, Basileæ, 1575.

Diophante (OT) *Diophanti Alexandrini Opera Omnia cum Græcis commentariis. Edidit et Latine interpretatus est Paulus Tannery,* B. G. Teubneri, Lipsiæ, 1893-1895 (2 vols.).

Di Sieno, S. et Galuzzi, M. (1987) "Calculus and Geometry in Newton's Mathematical Works : Some Remarks", *in Rossi, S. (édité par), Science and imagination in the XVIIIth-century British culture*, Unicopli, Milano, 1987, 177-189.

Di Stefano, E. (1992) "Alcune considerazioni sull'*In artem analyticam Isagoge* di François Viète", *in* L. Conti (é d. par), *La matematizzazione dell'universo. Momenti della* *cultura matematica tra '500 et '600*, Ed. Porziuncola, s. l. [Assisi], 1992, 153-164.

Duhamel, M. J.-M.-C. (1838) "Note sur la méthode des tangentes de Roberval", *Mém. présentés par divers Savants à l'Acad. Roy. des Sci. de l'Inst. de France, Sci. Math. et Phys.*, **5** , 1838, 257-266.

Euclide (GLP, 1573) *Euclidis Elementorum Libri XV, Græcè et Latinè [...]*, apud H. de Marnef et G. Cavellat, Parisiis, 1573.

Euclide (B, 1655) *Euclidis Elementorum Libri XV. breviter demonstrati*, Operâ Is. Barrow Cantabrigiensis, Impensis G. Nealand, Catabrigæ, 1655.

Euclide (EH) *Elementa,* Edidit et latine interpretatus est I L. Heiberg, *in* Euclidis, *Opera Omnia* (Editerunt I. L. et H. Menge), Teubner, Leipzig, 1883-1889 (8 vols. + 1 vol. supl.), vols. I-V.

Euclide (EV) *Les Éléments*, traduction et commentaire par B. Vitrac, P.U.F., Paris, 1990-... (3 vols. parus).

Euler, L. (1748) *Introductio in analysin infinitorum*, M.-M. Bousquet & Soc. , Lausannæ, 1748 (2 vols.).

Fermat, P. de (1679) *Varia Opera Mathématica*, apud Joannem Pech, Tolosæ, 1679.

Fermat, P. de (OTH) *Œvres de Fermat*, publiées par les soins de MM P, Tannery et Ch. Henry, Gauthiers-Villars et Fils, Paris 1891-1922 (4 vols. + 1 suppl.).

Florimond de Baune (1649) "In Geometriam Renati Des Cartes Notæ Breves", *in* Descartes (GvS, I), 119-161, et *in* (GvS, II), pars I, 107-142 [les references bibliografiques renvoyent à (GvS, II)].

Freguglia, P. (1988) Ars Analytica. *Matematica e* methodus *nella seconda metà del Cinquecento*, Bramante editrice, Busto Arsizio, 1988.

Freguglia, P. (1989) "Algebra e geometria in Viète", *Bollettino di Storia delle Scienze Metematiche*, **9**, 1989, 49-88.

Freguglia, P. (1991) "Bombelli, Viète e Descartes : tre momenti dello sviluppo dell'algebra tra Cinquecento e Seicento", *in* P. Casini (a cura di), *Lezioni Galileiane - I. Alle origini della rivoluzione scientifica*, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma, 1991, 199-217.

Freguglia, P. (1992) "L'*Arithmétique* di Simopn Stevin e gli sviluppi dell'algebra nella seconda métà del Cinquecento", *in* L. Conti (a cura di), *La matematizzazione dell'universo. Momenti della cultura matematica tra '500 et '600*, Ed. Porziuncola, s. l. [Assisi], 1992, 131-151.

Freguglia, P. (1994) "Sur la théorie des équations algébriques entre le XVI et le XVII siècle", *Bollettino di Storia delle Scienze Metematiche*, **14**, 1994, 259-298.

Freguglia, P. (1999) *La geometria fra tradizione e innovazione [...]*, Bollati Boringhieri, Torino, 1999.

Fraser C. (1997) "The Background to and Early Emergence of Euler's Analysis", *in* M. Panza and M. Otte (eds.), *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy*, Kluwer A. P., Dordrecht, 1997, 47-78.

Galilei, G. (1638) *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze [...]*, Appresso gli Elzeviri, Leida, 1638.

Galilei, G. (1655) *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze [...]* per gli HH del Dozza, in Bologna, 1655 ; rélié avec pagination separée in *Opere di Galileo Galilei [...]*, per gli HH. del Dozza, in Bologna, 1656 (2 vols.), vol. II.

Galilei, G. (DS) "Mathematical Discourses and Demostration touching Two New Sciences pertaining to Machanicks and Local Motion", *Mathematical Collections and Trans-*

lations in two tomes (Englished from the originall Latine and Italian, by T. Salusbury), W. Leybourn, 1661-1665 (2 vols. in 5 tomes), II, 1, 1665 (trad. de Galilei (1638)).

Galilei, G ; (EN) *Le opere di Galileo Galilei*, édité par A. Favaro, Ed. nazionale, Barbera, Firenze, 1890-1900 (20 vols.).

Galuzzi, M. (1980) "Il problema delle tangenti nella 'Géométrie' di Descartes", *Archive for History of Exact Sciences*, **22**, 1980, 37-51.

Galuzzi, M. (1995) "L'influenza della geometria nell'evoluzione del pensiero di Newton", *in* Panza et Roero (1995), 271-288.

Gardies, J.-L. (1988) *L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide*, Vrin, Paris, 1988.

Gardies, J.-L. (1997) *L'organisation des mathématiques grecques de Thétéète à Archimède*, Vrin, Paris, 1997.

Giusti, E. (1980) *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*, Ed. Cremonese, Roma, 1980.

Giusti, E. (1984) "A tre secoli dal calcolo : la questione delle origini", *Bollettino Unione Matematica Italiana*, **6**, 1984, 1-55.

Giusti, E. (1987) "La *Géométrie* di Descartes fra numeri, grandezze", *Giornale critico della filosofia italiana*, IV$^{\text{ème}}$ sér., **7**, 1987, 409-432.

Giusti E. (1990) "Galilei e le leggi del moto", *in* G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e ai movimenti locali*, a cura di E. Giusti, Einaudi, Torino, 1990, IX-LX.

Giusti, E. (1992) "Algebra and Geometry in Bombelli and Viète", *Bollettino di Storia delle Scienze Metematiche*, **12**, 1992, 303-328.

Giusti, E. (1993) *Euclides reformatus. La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana*, Bollati-Boringhieri, Torino, 1993.

Giusti, E. (1999) *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati-Boringhieri, Torino, 1999.

Grégoire de Saint Vincent (1647) *Opus geometricum quadraturæ circuli et sectionis coni decem libris comprehensum*, I & I Meursios, Antverpæ, 1647.

Grosholz E. R. (1980) "Descartes' Unification of Algebra and Geometry", *in* S. Gaukroger (edited by), *Descartes. Philosophy, Mathematics and Physics*, The Harverster Press, Brighton (Sussex) and Barnes & Noble Books, Totawa (New Jersey), 1980, 156-168.

Grosholz E. R. (1991) *Cartesian Method and the Problemof Reduction* , Clarendon Press, Oxford, 1991.

Hara, K. (1965) *Etude sur la théorie des mouvements de Roberval"*, Thèse de troisième cycle soustenue à la faculté des Lettres de l'Univ. de Paris, le 11 novémbre 1965.

Hara, K. (1975) "Robervl, Gilles Personne (or Personier de)", *Dictionary of Scientific Biography*, XI, 1975, 486*b*-491*a*.

Hall, R. A. (1980) *Philosophers at war : the quarrel between Newton and Leibniz*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

Hall, R. A. (1992) *Isaac Newton*, Blackwell Publishers, Oxford, Cambridge (Mass.), 1992 (ed. citée : Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966).

Hall, R. A. and Boas Hall, M. (1962) *Umpublished Scientific Papers of Sir Isaac Newton*, Cambridge University Press, Cambridge, 1962.

Heath (1921) *A History of Greek Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1921 (2 vols.)

Herigone, P. (1634-1637) *Cursus mathematicus, nova brevi et clara methodo demonstratus*, H. Le Gras, Paris, 1634-1637, (5 vols. + 1 supll.).

Herstein, I. N. (1964) *Topics in Algebra*, Blaisdell P. C., New York, Toronto, London, 1964.

Heuraet, van H. (1659) "Epistola de transmutatione curvarum linearum in recatas', *in* Descartes (GvS, II), I, 517-520 (lettre à van Schooten du 13 janvier 1559).

Hintikka, J. et Remes, U. (1974) *The Method of Analysis. Its Geometrical Origin and Its General Significance*, Reidel, Dordrecht, 1974.

Hofmann J. E. (1638) "Nicolaus Mercators *Logarithmotechnia* (1668)", *Deutsche Mathematik*, **3**, 1938, 446-466.

Hofmann, J. E. (1943) *Studien zur Vorgeschichte des Prioritätstreites zwischen Leibniz und Newton um die Entdeckung der höheren Analysis. I. Abhandlung : Materialen fur ersten mathematischen Schaffensperiode Newtons (1665-1675)*, *Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1943, Nr. 2, Verlag Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1943.

Houzel, C. (1978) "Fonctions elliptiques et intégrales abéliens", *in* J. Dieudonné (édité par), *Abregé d'hitsoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1978 (2 vols), nouv. éd. citée, 1986 (1 vol.), 293-314.

Hudde , J. (1658*a*) "Epistola prima de Reductione Æquationum", *in* Descartes (GsV, II), I, 507-516 (lettre à van Schooten datée du 6 février 1658).

Hudde , J. (1658*b*) "Epistola seconda de Maximis et Minimis", *in* Descartes (GsV, II), I, 406-506 (lettre à van Schooten daté des ides de Juillet 1657).

Hudde , J. (JL) "Extrait d'une Lettre de fue M. *Hudde* à M. *van Schooten* [...]. Du 21 de Novembre 1659", *Journal Literaire*, **1**, 1 713, 465-469.

Huygens C. (1654) *De circuli magnitudine inventa [...]*, apud J. & D. Elzevier, Lugduni Batavorum, 1654.

Huygens C. (1673) *Orologium Oscillatorium [...]*, F. Muguet, Parisiis, 1673.

Huygens C. (OC) *Œuvres complètes de Christian Huygens*, publiés par la Soc. Hollandaise des Sciences, M. Nijhoff, La Haye, 1888-1950 (22 vols).

Israel G. (1997) "The Analytical Method in Descartes' *Géométrie*", *in* M. Panza and M. Otte (eds.), *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy*, Kluwer A. P., Dordrecht, 1997, 3-34.

Jullien, V. (1996) *Descartes. La* Géomètrie *de 1637* , PUF, Paris, 1996.

Kempe A. B. (1876) "On a general method of describing plane curves of the n^{th} degree by linkwork", *Proceedings of the London Mathematcal Society*, **7**, 1875-1876, 213-216 [read June 9th, 1876].

Kinckhuysen, G. (1661) *Algebra Ofte Stel-konst [...]*, Passchier van Wesbusch, Harlem, 1661.

Klein, J. (1934-1936) "Die griechischte Logistik und die Entstehung der Algebra", *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abteilung B : *Studien*, **3**, fasc.1, 1934,18-105 and fasc. 2, 1936,122-235 ; trad. angl. citée, par E. Brann : *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, M.I.T. Press, Cambridge (Mass.), 1968.

Lachterman D. R (1989) *The Ethics of Geometry. A Genealogy of Modernity*, Routledge, New Yourk and London, 1989.

Lautaman A. (1977) *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Union générale d'édition, Paris, 1977

Lenoir, T. (1979) “Descartes and the Geometrization of Thought : the Methodological Background of Descartes’ *Géométrie*”, *Historia Mathematica*, **6**, 1979, 355-379.

Leibniz G. W. (1684) “Nova methodus pro maximis et minimis [. . .]”, *Acta Eruditorum*, Octobris 1684, 467-473.

Leibniz G. W. (GM) *Leibnizes mathematische Schriften* (édité par C. I. Gerhardt), Asher & Comp., Berlin, 1849-1850 (vols I-II), H. W. Schmidt, Halle, 1855-1863 (vols. III-VII) ; réimpression anastatique : G. Holms, Hildesheim, 1961-1962.

l’Hôpital, G. F. H. Marquis de (1696) *Analyse des infiniments petits pour l’inteligence des lignes courbes*, Impr. Royale, Paris, 1696 ; II$^{\text{ème}}$ éd. citée : Montalant, Paris, 1716.

Loget, F. (2000) *La querelle de l’angle de contact (1554-1685). Constitution et autonomie de la communauté mathématique entre Reannaissance et Âge baroque*, Thèse de doctorat, E.H.E.S.S., Päris, 2000 (2 vols.).

Maanen, van J. (1984) ”Hendrick van Heuraet (1634-1660 ?) : His Life and Mathematical Work”, *Centaurus*, **27**, 1984, 218-279.

Mäenpää, P. (1997) “From Backard Reduction to Configurational Analysis”, *in* M. Otte and M. Panza (eds.), *Analysis and Synthesis in Mathematics*, Kluwer A. P., Dordrecht, 1997, 201-226.

Mahoney, M. S. (1980) “The Beginnings of Algebraic hought in the Seventeenth Century”, *in* S. Gaukroger (edited by), *Descartes. Philosophy, Mathematics and Physics*, The Harverster Press, Brighton (Sussex) and Barnes & Noble Books, Totawa (New Jersey), 1980, 141-155.

Mahoney, M. S. (1994) *The Mathematical career of Pierre de Fermat*, second edition revised, Princeton Univ. Press, Princeton 1994 (first ed., 1973).

Mancosu, P. (1996) *Philososphy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford Univ. Press, 1996.

Maieru, L. (1991) “John Wallis : lettura della polemica fra Peletier e Clavio circa l’angolo di contatto”, *in* M. Galuzzi (a cura di), *Giornate di storia della matematica, Cetraro, Settembre 1988*, Editel, Commenda di Rende (Cosenza, Italia), 1991, 315-364.

Maizeaux, P. de (1720) *Recueil de diverses pieces sur la philosophie, la religion naturelle, l’histoire, les mathématiques, etc. par Mrs. Leibniz, Clarke, Newton et autres autheurs célébres*, chez Duvillard et Changuion, Amsterdam, 1720 (2 vols.) [le nom de P. de Maizeaux, n’apparaît pas dans la page de titre ; on le treuve seulement à la fin de l’ “Epitre”].

Mercator N. (1668) *Logarithmothechnia ; sive Methodus construendi Logarithmos Nova, accurata & facilis [...]. Cui accedit vera quadratura hyperbolæ et inventio summæ logarithmorum*, M. Pitt, Londini, 1668.

Moivre, de A. (1730) *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, J. Thomson et J. Watts, Londini, 1730.

Molland A. G (1976) “Descartes’s Transformation of Ancient Geometry”, *Historia Mathematica*, 3, 1976, 21-49.

Monge, G. (1799) *Géométrie descriptive. Leçons données aux Écoles Normales, l’an 3 de la République*, Paris, Baudoin, an VII.

Montucla, J. (1758) *Histoire des mathématiques* A. Jobert, Paris, 1758 (2 vols).

Montucla, J. (1799-1802) *Histoire des mathématiques*, nouvelle édition considérablement augmetée et prolongée jussque vers l’époque actuelle, H. Agasse, Paris an VII-X (4 vols, dont le duex dernières furent publié par Lalande après la mort de Montucla).

Naux, C. (1966-1971) *Histoire des logarithmes de Neper à Euler*, Blanchard, Paris, 1966-1971 (2 vols).

Newton I. (1687) *Philosophie Naturalis Principia Mathematica,* J. Streater, Londini, 1687.

Newton (1704) "Tractatus de quadratura curvarum", *in* I. Newton, *Opticks [. . .] Also Two Tratise of the Species and Magnitude of Curvilinea Figures*, S. Smith and B. Walford, London, 1704, 138-162.

Newton I (1711) "De Analysis per Æquationes Numero Terminorum Infinitas", in I. Newton, *Analysis per Quantitatum, Series, Fluxiones, ac differentias cum Enumeratio Linearum Tertii Ordinis*, édité par J. Colson, ex Officina Pærsoniana, Londini, 1711.

Newton, I. (1714-1715) "An Account of the Book entitled *Commercium Epistolicum Collini & aliorum, DeAnalysi promota*", (publié anonyme), *Philosophical Transactions* **29**, 1714-1715, (numero du janvier-février 1715), 173–224.

Newton I. (1736) *The Method of Fluxions and Infinite series [...] Translated by John Colson*, printed by H. Woodfall and sold by J. Nourse, London, 1736.

Newton (H) *Opera quæ extant omnia commentariis illustrabat Samuel Horsley*, J. Nichols, Londini, 1779-1785 (5 vols.).

Newton I (MP) *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, ed. by T. D. Whiteside, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1967-1981 (8 voll.).

Newton (C) *The Correspondance of Isaac Newton*, ed. by H. W. Turnbull, F.R.S., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959-1977 (7 vols.).

Otte, M. et Panza, M. (1997*a*) (éd. par) *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy*, Kluwer A. P., Dordrecht, Boston, London, 1977

Otte, M. et Panza, M. (1997*b*) "Introduction", *in* Otte et Panza (1997*a*), IX-XIII.

Oughtred W. (1631) *Arithmeticæ in numeris et speciebus institutio [...]*, T. Harperum, London, 1631 ; II^{ème} éd. : *Clavis mathematicæ[...]*, T. Harper, Londini 1646 ; III^{ème} éd. : *Clavis mathematicæ[...]*, L. Lichfield, Oxoniæ, 1652.

Panza M. (1992*a*) *La forma delle quantita. Analisi algebrica e analisi superiore : il problema dell'unità della matematica nel secolo dell'illuminismo, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences* , vols. 38-39, 1992.

Panza, M. (1992*b*) "De la continuité comme concept au continu comme objet mathématique", *in* J.-M., Salanskis, et H. Sinaceur, (édité par), *Le Labyrinthe du Continu*, Springer-France, Paris, 1992, 16-30.

Panza (1995*a*) "L'intuition et l'évidence. La philosophie kantienne et les géométries non euclidiennes : relecture d'une discussion", in M. Panza et J.-C. Pont (éd. par), *Les savants et l'épistémologie vers la fin du XIX*^e *siècle*, Blanchard, Paris, 1995, 39-87.

Panza, M. (1995*b*) "Platonisme et intentionnalité", in M. Panza et J.-M. Salanskisont (éd. par), *L'objectivité mathématique. Platonismes et structures formelles*, Masson, Paris, 1995, 85-132.

Panza (1995*c*) "Da Wallis à Newton : una via verso il *calcolo*. Quadrature, serie e rappresentazioni infinite delle quantità e delle forme trascendenti", in Panza et Roero (1995), 131-219.

Panza, M. (1997*a*) "Mathematical Acts of Reasoning as Syntethic *a priori*", *in* Otte et Panza (1997*a*), 273-326.

Panza, M. (1997*b*) "Classical Sources for the Concepts of Analysis and Synthesis", *in* Otte et Panza (1997*a*), 365-414.

Panza, M. (1997*c*) Recension de : E. Giusti "Galilei e le leggi del moto", in. G. Galiei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze [...]*" (édité par E. Giusti), Einaudi, Torino, 1990, IX-LX ; et E. Giusti, *Euclides reformatus [...]*, Bollati Boringhieri, Torino, 1993 ; *Sciences et Techniques en perspective*, II^{e} ser., **1**, 1997, 179-200.

Panza, M. (1998) "Quelques distinctions à l'usage de l'historiographie des mathématiques", in J.-M. Salanskis, F. Rastier, R. Sceps (édtité par), *Herméneutique : textes, sciences*, PUF, Paris, 1997, 357-383.

Panza (2000) "How Axiomatics Can Generate Mathematical Objects. The Example of the Construction of a Right Angle in the First Book of Euclid's *Elements*", à paraître *in* J. Lacki, M. Panza, J.-C. Pont, M. Radu (éd. par), *The axiomatic Way*, Kluwer A. C., Dordrech, Boston.

Panza, M. et Roero, S.(1995) (éd. par) *Geometria, flussioni e differenziali. Tradizione e innovazione nella matematica del Seicento*, La città del sole, Napoli, 1995.

Pappus (CC) *Pappus Alexandrini Mathematicæ collectiones a Federico Commandino [...] in latini convers* , apud H. Concordiam, Pisauri, 1588.

Pappus (CH) *Pappus Alexandrini Collectionis quæ supersunt [...] edidit, latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch [...]*, Weidemann, Berolini, 1876-1878 (3 vols).

Pappus (CVE) *La collection mathématique*, trad. introd. et notes de P. Ver Eecke, Desclée de Brouwer et C., Paris, Bruges, 1933.

Pascal B. (1665) *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matiere*, G. Desprez, Paris, 1665.

Prag, A. (1931) "John Wallis. 1616-1703. Zur Ideengeschichte der Matematik im 17. Jahrhundert", *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abt. B, **1**, 1931, 381-412.

Ramée, P. de la (1599), *Arithmeticæ libri duo geometriæ septem et viginti [...]*, apud A. Wecheli heredes, C. Maurium et J. Aubrium, Francofurti, 1599 (1 vol en 2 tomes) ; II$^{\text{ème}}$ éd. augmentée : sumptibus Wechelianorum, apud D. et D. Aubrios et C. Scheichium, Francofurti ad Moenum,1627 (1 vol. en 2 tomes).

Rashed, R. (1994) *The Development of Arabic Mathematics : Between Arithmetic and Algebra*, Kluwer A. P., Dordecht, London and Boston, 1994.

Rashed, R. (1996) "Algebra", in R. Rashed (éd. par), *Encyclopedia of the History of Arabic Science*, Routledge, London and New York, 1996 (3 vols.), II, 349-375.

Rigaud, S. P. (1938) *Historical Essay on the First Publication of Sir Isaac Newton's* Principia, Oxford Univ. Press, Oxford, 1938.

Raphson, J. (1715) *Historia Fluxionum [...]*, Typis Pearsonianis, Prostant Venales apud R. Mount, Londini, 1715.

Robervall, G. P. de (1693) "Observations sur la composition des Mouvemens, et sur le moyen de trouver les Touchantes des lignes courbes", *in* Roberval (DOM), 67-111 (éd. 1693) et 1-89 (éd. 1730 ; où n'apparaît pas l' "Avertissement") [les références biblographiques rénvoyent à l'édition de 1693].

Roberval, G. P. de (DOM) "Divers Ouvrages de M. de Roberval", *in Divers Ouvrages de Mathématique et de Physique par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences*, Impr. Royale, Paris, 1693, 65-302 ; l'ensemble des "Divers Ouvrages de Roberval" fût républié plus tard sous le titre de "Divers Ouvrage de M. Personnier de Roberval" *in Mém. Acad. Roy. Sci., depuis 1666 jusqu'au 1699*, **6** , 1730, 1-478.

Roberval, G. P. de (LT) “Epistola ægidii personerii de Roberval ad Evangelista Torricellium”, *in* Roberval (DOM), 440-478 (éd. 1730).

Robervall, G. P. de (PLM) “Projet d’un livre de mechanique”, *in* Roberval (DOM), 90-93 (éd. 1730).

Robins, B. (MTW) *Mathematical Tracts of the late Benjamin Robins [...] published by J. Wilson*, J. Nourse, London, 1761 (2 vols.).

Sarasa, A. A, de (1649) *Solution problematis A. R. P. Marino Mersenno Minimo propositi [...]*, I. & I. Meursios, Antperviæ, 1649.

Schooten, F. van (1656-1657) *Francisci à Schooten Exercitationum Mathematicorum Libri Quinque*, J. Elzivirii, Lugduni Batavorum, 1656-1657 (4 vols.).

Schooten, F. van (1649) “In Geometriam Renati des Cartes Commentarii”, *in* Descartes (GvS, I), et *in* Descartes (GvS, II), I, 143-344 [les reférences bibliografiques renvoyent à (GvS, II)].

Scott, J. F. (1938) *The Mathematical Work of John Wallis, D. D. F. R. S. (1616-1703)*, Chelsea, New York, 1938.

Scriba C. J. (1976) “Wallis, John”, *Dictionary of Scientific Biography*, XIV, 1976, 146-155.

Serfati M. (1993) “Les compas cartésiens”, *Archives de Philosophie*, **56**, 1993, 197-230.

Sesiano J. (1982) *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic Translation Attributed to Qustā Ibn Lūqā*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

Sesiano, J. (1999) “Le Moyen Age et l’extension des nombres”, *Science et techniques en perspective*, II$^{\text{ème}}$ sér., **3**, 1999, 3-25.

Shoemaker, S. (1968) “Self-Reference and Self-Awereness”, *Journal of Philosophy*, **65**, 1968, 555-567.

Skinner, Q. (1966) “Thomas Hobbes and his disiples in France and England”, *Comparative studies in Society and History*, **8**, 1966, 153-167.

Stevin S. (1585) *L’Arithmétique*, Plantin, Leyden, 1585.

Sylla, E. (1971-1972) “Medieval Quantifications of Qualities : The ‘Merton School”’, *Archive for History of Excat Sciences*, **8** , 1971-1972, 9-39.

Sylla, E. (1973) “Medieval Concepts of the Latitude of Forms : the Oxford Calculators”, *Archives d’Histoire Doctrinal et Littéraire du Moyen Age,* 1973, 223-283.

Tannery, P. (1882) “De la solution géoémétrique des problèmes du second degré avant Euclide”, in P. Tannery, *Mémoires scientifiques*, Privat, Toulouse et Gauthier-Villars, Paris, 1912-1937 (14 vols.), vol. I, 254-280 (note de 1882).

Tartaglia N. (1556) *La seconda parte de general trattato di numeri et mesure*, Curtio Troiano dei Navo, in Vinegia, 1556.

Torricelli, E. (1644) *Opera Geometrica*, Amatoris Maisse & Laurantij de Landis, Florentiæ, 1644 (2 tomes).

Torricelli, E. (LV) *Opere de Evangelista Torricelli*, édité par G. Loria et G. Vassura, G. Montanari, Faenza, 1919 (vols. I-III) et F. Lega, Faenza, 1944 (vol. IV).

Viète, F. (1591*a*) *In artem analiticem isagoge, apud* J. Mettayer, Turonis 1591 [ed. citée in Viète (OPvS), 1-12].

Viète, F. (1591*b*) *Zeteticorum libri quinque[...]*, apud J. Mettayer, Turonis 1591.

Viète, F. (1591-1593) *Effectionum geometricarum canonica recensio*, s. l. n. d. [prob. Tours, apud. J. Metteyer, vers 1591 : cf. *Catalogue général des imprimés de la Bibliothèque Nationale*, CCVIII, 967]

Viète F. (1593*a*) *Supplementum Geometri* , apud J. Mettayer, Turinis, 1593.

Viète F. (1593*b*) *Variorum de rebus mathematicis responsorum Liber VIII [...]*, apud J. Mettayer, Turonis, 1593.

Viète F. (1595) *Pseudo-Mesolabum [...]*, apud J. Mettayer, Parisiis, 1595.

Viète, F. (1600) *De numeros potestatum ad exegesim resolutione [...]*, D. Le Clerc, Parisiis, 1600.

Viète, F. (1615*a*) *De æquationum recognitione et emendatione tractatus duo*, ex typ. J. Laquehay, Parisiis, 1615.

Viète F. (1615*b*) *Ad angulares sectiones theoremata καθολικώτερα [...]*, apud O. de Varennes, Parisiis, 1615.

Viète, F. (1631) *Ad logicisticam speciosam notæ priores*, G. Baundry, Paris, 1631.

Viète, F. (OPvS) *Francisci Vietæ Opera Mathematica, In unum Volumen congesta, ac recognita, Operâ atque studio Francisci à Schooten Leydensis [...]*, B. & A. Elzeriorum, Lugduni Batavorum, 1646 (réimpr. an., G. Olms, Hildesheim, 1970).

Vuillemin, J. (1960) *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, P.U.F., Paris, 1960.

Wallis J. (1656*a*) *Operum Mathematicorum Pars Altera [...]*, Lichfield, Oxonii, 1656.

Wallis J. (1656*b*) *De sectionibus Conicis, Nova Methodo expositis, Tractatus*, relié avec pagination séparée *in* Wallis (1656*a*).

Wallis J. (1656*c*) *Disquisitio geometrica de Angulo Contactus et Semicirculis,* relié avec pagination séparée *in* Wallis (1656*a*).

Wallis J. (1656*d*) *Arithmetica Infinitorum, Sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaque difficiliora Matheseos Problemata*, relié avec pagination séparée *in* Wallis (1656*a*).

Wallis J. (1685) *A Treatise of Algebra, both historical and practical [...]*, Playford, London, 1685.

Wallis J. (1693) *De Algebra tractatus historicus et praticus,* II$^{\text{ème}}$ volume de J. Wallis, *Opera mathematica*, e theatro Sheldoniano, Oxoniæ, 1693-1699 (3 vols.).

Westfall, R. (1980) *Never at Rest. A Biography of Isaac Newton*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980 (trad. franç. citée, par M.-A. Lescourret : *Newton* , Flammarion, Paris, 1994 [cette traduction présente qualques coupures par rapport à l'original].

Westfall, R. (1994) *The Life of Isaac Newton*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

Whiteside, D. T. (1960-1962) "Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century", *Archive for History of Exact Sciences*, **1**, 1960-1962, 179-388.

Whiteside, D. T. (1961) "Newton's Discovery of the General Binomial Theorem", *The Mathematical Gazette*, **45**, 1961, 175-180.

Witting A. (1911-1912) "Zu Frage der Erfindung des Algorithmus der Newtonschen Fluxionrechnung",*Bibliotheca Mathematica*, 3$^{\text{ème}}$ sér., **12**, 1911-1912, 56-60.

Zeuthen H. G. (1886) *Die Lehre von der Kegelschinitten im Altertum*, A. F. Höst und Sohn, Kopenhagen, 1886.